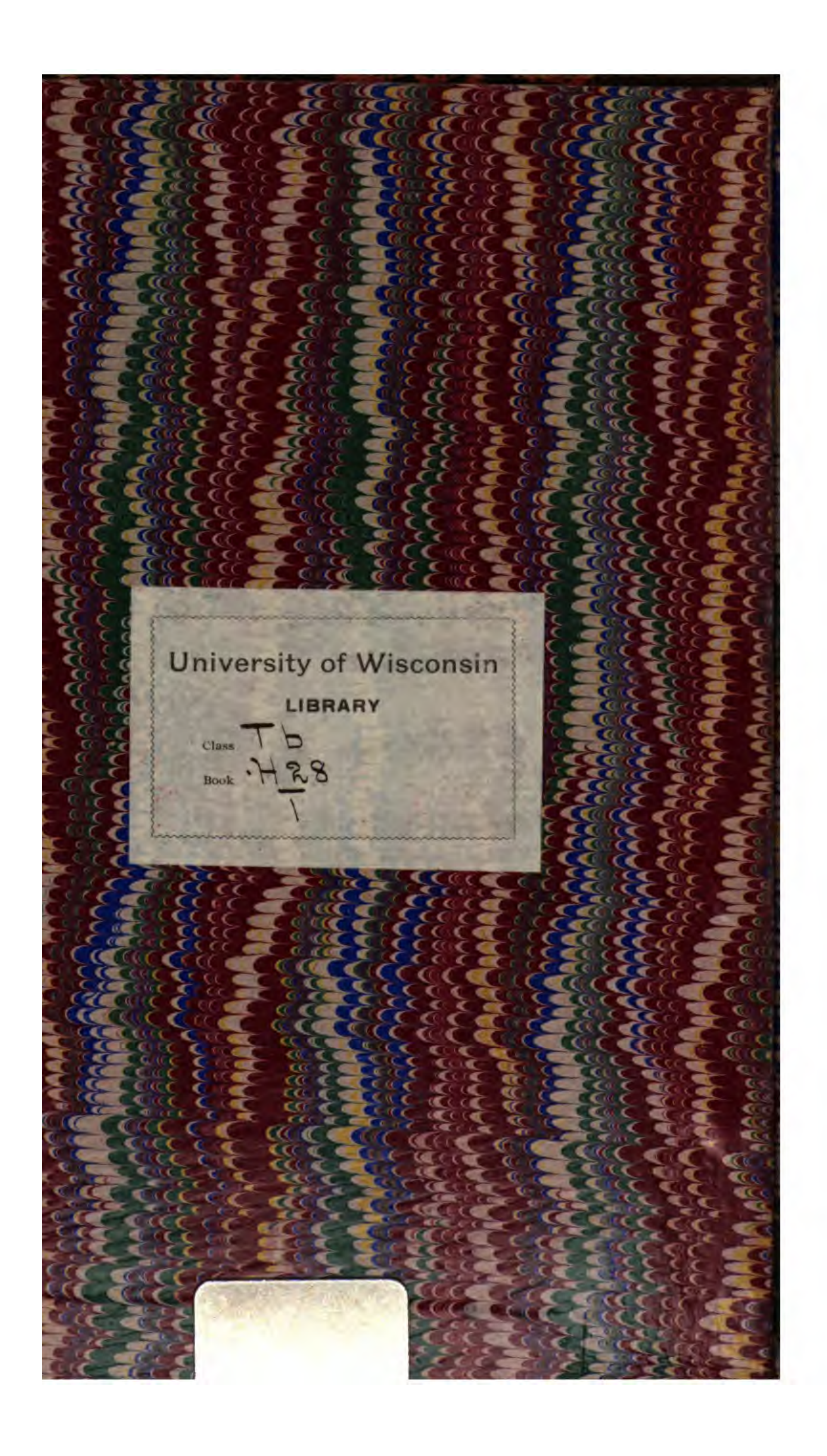






COURS

DE

MACHINES

17831. — PARIS, IMPRIMERIE A. LAHURE
9, rue de Fleurus, 9

COURS

DE

MACHINES

PAR

Julien-Napoléon

M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines
Directeur de l'École supérieure des Mines

TOME PREMIER

PARIS

Vve CH. DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

49, QUAI DES AUGUSTINS, 49

1889

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE — HYDRAULIQUE

CHAPITRE I. — Préliminaires.

CHAPITRE II. — Théorème de Bernoulli.

CHAPITRE III. — Orifices.

CHAPITRE VI. — CANAUX.

CHAPITRE VII. — JAUGEAGES.

SECONDE PARTIE — MOTEURS HYDRAULIQUES

CHAPITRE VIII. — Théorie générale des moteurs hydrauliques.

CHAPITRE IX. — Roues hydrauliques.

CHAPITRE X. — TURBINES.

COURS

DE

MACHINES

COURS
DE MACHINES

PREMIÈRE PARTIE
HYDRAULIQUE

CHAPITRE I
PRÉLIMINAIRES

—

§ 1
GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES

1 — On appelle *machine* [1] tout appareil destiné à mettre en relation un *agent moteur* avec une *résistance à vaincre*. Ni la matière dépositaire de l'énergie motrice, ni la substance à élaborer ne constituent la machine : elles lui sont extérieures. Celle-ci en est distincte. Elle recueille le travail positif fourni par la première, et surmonte le travail négatif opposé par la seconde. Indiquons, avant d'aller plus loin, quelques exemples des unes et des autres.

Parmi les agents moteurs, on peut citer : la *force volontaire*

[1] Ce *Cours de Machines* constitue, avec celui *d'Exploitation des Mines* (Dunod, 1885, 2 vol. grand in-8°), l'ensemble du Cours d'exploitation des mines et machines que j'ai l'honneur de professer à l'École Supérieure Nationale des Mines.

de l'homme et de certains animaux, tels que le cheval, le bœuf, le mulet, l'âne, etc.; la *pesanteur* agissant sur les poids des horloges ([1]) ou sur les chutes d'eau; l'*élasticité* des ressorts ou de l'air comprimé; la *chaleur* qui intervient par l'intermédiaire de l'eau, de l'air, du chloroforme, etc.; l'*électricité* développée dans les phénomènes d'induction; l'*affinité* mise en jeu par la déflagration des explosifs; l'*inertie* ou la force vive préalablement emmagasinée dans les cours d'eau, le vent, les marteaux de forge, etc.

Comme exemples de résistance à vaincre, j'indiquerai de même : la *pesanteur*, pour les terrassements, l'extraction ou l'épuisement des mines, etc.; les *forces moléculaires* dans la préparation mécanique des minerais, la forge, les ateliers de construction mécanique, la mouture des céréales, etc.; les *résistances passives* développées par le roulage, le traînage, la navigation; l'*inertie* qui intervient dans la ventilation, la filature, le tissage, etc.

2 — La machine qui est appelée à mettre en relation deux éléments aussi dissemblables, se présente, en quelque sorte, comme une *fonction de deux variables indépendantes;* et une liste générale de tous ces appareils constituerait une *table à double entrée.*

On peut, d'après cela, distinguer, dans chacune d'elles, trois parties essentielles. La première se trouve dans un rapport étroit avec l'agent moteur que l'on entreprend d'utiliser; elle en reçoit, pour ainsi dire, l'empreinte. On l'appelle *récepteur* ([2]).

A l'autre extrémité des transmissions, un second ensemble d'organes est destiné à se modeler directement sur le type spécial d'élaboration que l'on a en vue. Il prend le nom d'*opérateur* ([3]).

Ces deux systèmes, se trouvant constitués sous l'empire de préoc-

([1]) On appelle *moteurs de seconde main* ceux que la nature ne nous fournit pas sous leur forme immédiate, tels que les poids que l'horloger est obligé de remonter, ou les ressorts qu'il lui faut bander à l'aide de sa propre force, pour les laisser ensuite actionner le mécanisme; l'air comprimé qu'un moteur spécial doit préalablement mettre en tension, etc.

([2]) Il arrive souvent que l'on confond, dans le langage ordinaire, le récepteur avec le moteur. Cette incorrection est d'ailleurs sans importance, pourvu que les idées restent précises à cet égard, et que l'on n'oublie pas que le moteur est étranger à la machine, dont le récepteur fait, au contraire, partie intégrante.

([3]) Ou *machine-outil.*

cupations distinctes et entièrement indépendantes, ne sauraient, en général, s'adapter avec facilité l'un à l'autre d'une manière immédiate. Pour établir cette connexion, un intermédiaire plus ou moins développé sera ordinairement nécessaire. Seulement cet organisme ne se trouvera plus appelé à relier ensemble des objets aussi disparates que l'étaient, l'un par rapport à l'autre, l'agent moteur et la matière qui forme l'objet de l'élaboration industrielle; comme c'était le cas de la machine envisagée dans son ensemble. On n'a plus maintenant à réunir que des dispositifs présentant tous les deux un type mécanique bien caractérisé. Aussi les intermédiaires en question ne sortent-ils pas d'un cercle assez constant d'organes élémentaires. On les appelle *mécanismes*.

3 — Donnons encore, comme nous l'avons fait tout à l'heure, pour fixer les idées, quelques exemples de chacune de ces trois parties.

En ce qui concerne les récepteurs, je citerai : la manivelle, le cabestan, la roue à marches pour l'homme; le manège pour les chevaux; pour les chutes d'eau : les roues hydrauliques, les turbines; pour les ressorts : l'horlogerie, la lampisterie; pour la chaleur : les machines à vapeur, à air chaud, à gaz; pour l'électricité : les électro-moteurs; pour la poudre : les fulmi-moteurs, l'artillerie; pour les cours d'eau : les roues pendantes; pour les courants aériens : les moulins à vent, les panémones, etc.

Si nous passons aux opérateurs, le champ d'études s'élargit au point de devenir, pour ainsi dire, inabordable. La question constitue alors, par son ensemble, la *technologie*, dont l'exposition se trouve disséminée dans l'ensemble des Cours que renferment les diverses Écoles industrielles. On peut citer, en ce qui concerne l'industrie minérale : les appareils d'extraction, les pompes d'épuisement, les perforatrices, les broyeurs, classeurs, laveurs, les ventilateurs, les marteaux, presses, laminoirs, etc.; pour la construction mécanique : les cisailles, les machines à raboter, tourner, tarauder, percer, poinçonner; pour l'agriculture : les charrues, les batteuses, sarcleuses, semeuses, faucheuses, décortiqueuses; et, dans les ordres d'idées les plus divers : les moulins, les scieries, les fila-

tures, les métiers de tissage, les clouteries, les ascenseurs, les propulseurs, les compresseurs, les appareils frigorifiques, etc.

En ce qui concerne les mécanismes, je citerai comme exemples : les engrenages, les vis sans fin, les courroies, les excentriques, les bielles, les balanciers, les parallélogrammes, les moufles, les encliquetages, les régulateurs, les freins, etc.

4 — D'après ces divisions, l'ensemble de la mécanique appliquée se répartira en trois parties correspondantes. Mais il s'en faut de beaucoup que chacune d'elles doive devenir ici l'objet de développements d'une égale étendue.

La description des opérateurs reste spéciale à la monographie de chaque industrie en particulier. L'une des deux années que comprend, à l'École supérieure des Mines, le Cours d'exploitation et machines, est consacrée à l'exploitation souterraine, et renferme ce qui est relatif aux appareils réclamés par cet ordre de travaux. Les considérations relatives aux opérateurs ne tiendront, d'après cela, dans le Cours actuel, qu'une place très secondaire ([1]).

L'étude des mécanismes doit, pour être complète, embrasser trois points de vue distincts : 1° leur *théorie cinématique*, dans laquelle on s'attache aux circonstances de leur fonctionnement géométrique; 2° leur *théorie dynamique*, envisagée au point de vue des résistances passives, genre d'appréciation indispensable pour permettre d'établir ces organes en vue du meilleur rendement; et, en outre, pour éviter de s'y heurter à des impossibilités physiques que la cinématique est impuissante à prévoir, telles que l'arc-boutement dû au frottement; 3° leur *théorie élastique*, destinée à établir les pièces dans des conditions qui assurent leur conservation, sous les efforts qu'elles sont chargées de transmettre, tout en réalisant la meilleure économie de matière première, tant au point de vue du prix de revient que de l'allègement de la machine, afin de diminuer les frottements, qui sont proportionnels aux forces mises en jeu. Les deux premières parties de cette triple exposition appartiennent à l'enseignement de la mécanique géné-

([1]) Par exemple, les compresseurs, les machines soufflantes, les appareils frigorifiques, les élévateurs, etc.

rale[1]; la troisième formera l'une des divisions du Cours actuel, sous le nom de *théorie de la résistance des matériaux.*

Quant à celle des récepteurs, elle constituera la plus grande partie de notre étude. Ces appareils, si l'on écarte ceux qui ne tiennent dans cette exposition qu'une place secondaire, peuvent se ranger en deux grandes classes : les récepteurs hydrauliques et les récepteurs thermiques. Il sera d'ailleurs nécessaire, pour que leurs théories puissent être convenablement approfondies, de faire précéder chacune d'elles de l'exposition des lois générales qui régissent ces deux ordres de phénomènes.

D'après cela, l'ensemble que nous avons à parcourir se divisera en cinq parties distinctes, sous les titres suivants :

I. — Hydraulique.
II. — Moteurs hydrauliques.
III. — Thermodynamique.
IV. — Moteurs thermiques.
V. — Résistance des matériaux.

§ 2

PRINCIPES D'HYDROSTATIQUE

5 — L'étude des forces qui agissent sur les liquides comprend deux divisions distinctes : l'*hydrostatique* et l'*hydrodynamique,* suivant que l'on envisage ces corps dans l'état de repos ou de mouvement. L'exposition de l'hydrostatique fait partie du Cours de mécanique générale. Toutefois, comme nous n'aurons à lui faire qu'un très petit nombre d'emprunts, je crois utile de présenter directement ces divers résultats, de manière à pouvoir m'y reporter à l'occasion, mais sans chercher d'ailleurs en aucune façon à les relier ici en un corps de doctrine complet.

(1) Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes, renfermant la théorie géométrique des organes et celle des résistances passives.* 1 vol. in-8°. Paris, chez Gauthier-Villars, 1864.

On appelle *pression rapportée à l'unité de surface*, ou, plus simplement, *pression* en un point d'une paroi baignée par le fluide, la limite du rapport que supporte un petit élément de cette surface à l'étendue de sa superficie, lorsque l'on fait, par la pensée, tendre cette dernière vers zéro. La pression n'est donc pas une force, mais le quotient d'un nombre de kilogrammes, par un nombre de mètres carrés. Il faut, pour obtenir une force, multiplier une pression par une surface ([1]).

On envisage de même la pression en un point quelconque de l'intérieur d'une masse liquide. On imagine pour cela que l'on fasse passer une cloison par ce point, et que l'on vide le compartiment situé sur l'une de ses faces, de manière à la transformer en une paroi, comme dans le cas précédent. On obtient ainsi la pression en un point et dans une certaine direction, qui est celle de la normale à cette cloison idéale. Mais cette notion de direction s'élimine immédiatement d'après le théorème suivant : *La pression est la même dans toutes les directions autour d'un point déterminé.*

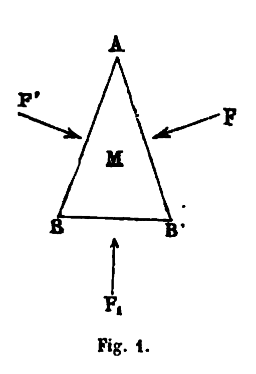


Fig. 1.

Si, en effet, pour un point M (fig. 1), F et F′ désignent deux directions quelconques, isolons par la pensée le liquide renfermé dans un prisme triangulaire que nous formerons de deux plans AB, AB′ respectivement perpendiculaires à F et F′, deux autres parallèles à celui de ces deux directions, et un cinquième BB′ perpendiculaire à ces derniers, et également incliné par rapport aux deux premiers. Appliquons à l'équilibre de ce système matériel l'équation de projections des forces extérieures sur l'arête BB′ du prisme. On y devra comprendre : 1° les *forces de masse* analogues à la pesanteur, qui sollicitent toutes les molécules individuellement, et dont la somme de projections sera de l'ordre du cube des

([1]) Cette remarque est d'autant plus essentielle que, par un véritable abus de langage, assez difficile du reste à éviter dans l'usage, il arrive souvent que l'on parle de la *pression supportée par une paroi*, là où il conviendrait de dire l'*effort exercé sur cette enveloppe*.

dimensions, si l'on fait, par la pensée, tendre ces dernières vers zéro, en laissant la figure semblable à elle-même autour du centre d'homothétie M; 2° les *forces de surface* provenant des actions exercées par le liquide environnant, pour empêcher celui que l'on considère de se disperser dans l'espace. Celles-ci seront, dans les mêmes conditions, de l'ordre du carré des dimensions. Les premières formeront donc, par rapport à elles, des infiniment petits d'ordre supérieur, qui devront être négligés, conformément à la méthode infinitésimale. Il ne restera plus en présence, par conséquent, que les cinq sommes de projections relatives aux faces du prisme. Or, les trois derniers plans sont parallèles à BB', et les forces qui leur sont normales, disparaîtront d'elles-mêmes. Les faces AB, AB' interviendront seules. Comme elles sont d'ailleurs également inclinées sur BB', ainsi, par suite, que leurs normales respectives, l'égalité des projections impliquera celle des efforts eux-mêmes. En divisant enfin ces derniers par les superficies correspondantes, qui sont égales entre elles, nous obtiendrons, à la limite, l'égalité des pressions par unité de surface estimées suivant les deux directions considérées.

6 — *Pour un liquide pesant, la pression reste constante dans toute l'étendue d'un plan horizontal.*

Si, en effet, nous concevons deux points quelconques M et M' d'un pareil plan, nous pourrons, en tirant la droite finie MM' qui les joint, la prendre pour axe d'un cylindre infiniment mince de section ω, isoler par la pensée le liquide qu'il renferme, et appliquer à son équilibre l'équation de projections sur son axe des forces extérieures qui le sollicitent. La pesanteur et les forces exercées par le liquide environnant étant normales à cette droite, disparaîtront spontanément. Il ne restera que les efforts imprimés sur les deux bases du cylindre, dont l'égalité impliquera, en les divisant par la valeur commune ω de ces sections, celle des pressions par unité de surface en ces deux extrémités.

7 — *Dans un liquide pesant, la pression croît proportionnellement à la profondeur.*

Envisageons, en effet, deux points N, N' d'une même verticale,

séparés par une hauteur infiniment petite *dh*, en désignant par *h* la profondeur comptée vers le bas à partir d'un niveau fixe N_0. Imaginons, autour de NN′, un cylindre analogue au précédent. et appliquons-lui l'équation de projections verticales. Les efforts exercés sur les parois latérales disparaîtront encore d'eux-mêmes. Celui $p\omega$ que supporte la face supérieure figurera en vraie grandeur. La base inférieure introduira de même le terme $-(p+dp)\,\omega$. Quant au poids, qui entrera également en vraie grandeur, il aura pour valeur $\varpi\,\omega\,dh$, en marquant par ϖ le poids spécifique du liquide, c'est-à-dire celui de l'unité de volume. Si donc, dans l'équation :

$$p\omega + \varpi\omega dh - (p + dp)\omega = 0,$$

on supprime le facteur ω, il restera :

$$dp = \varpi dh,$$

d'où, en intégrant :

$$(1) \qquad p = p_0 + \varpi h,$$

si l'on appelle p_0 la pression dans le *plan de comparaison* N_0 dont le choix reste, bien entendu, arbitraire.

8 — Imaginons, en particulier, une masse liquide surmontée du vide absolu, et adoptons pour plan de comparaison la surface libre de pression nulle, en désignant par H les profondeurs comptées à partir de ce niveau spécial. L'équation (1) prendra, dans ces conditions, la forme plus simple :

$$p = \varpi H.$$

On en déduit :

$$(2) \qquad H = \frac{p}{\varpi}.$$

Ces quotients d'une pression par le poids spécifique jouent un

grand rôle dans la mécanique des liquides. On les appelle *hauteurs piézométriques* (¹). On voit, en effet, qu'elles représentent la hauteur du liquide considéré qu'il faudrait établir au-dessus du point considéré, en la prolongeant théoriquement jusqu'au vide, pour déterminer, en ce point, la pression en question.

On peut toujours, d'ailleurs, lorsqu'un liquide, comme c'est le cas ordinaire, se trouve, en réalité, surmonté d'une atmosphère de pression p_0, rentrer par la pensée dans le cas précédent, en surmontant le bain donné d'une couche idéale, de hauteur $\frac{p_0}{\varpi}$; ce qui devient simplement à mettre l'équation (1) sous la forme équivalente :

$$p = \varpi\left(h + \frac{p_0}{\varpi}\right).$$

9 — Les pressions se comptent, le plus ordinairement, en *kilogrammes par mètre carré*. Mais on peut aussi employer, pour leur évaluation, certaines *unités intrinsèques* ou *pressions-types*, dont toutes les autres deviennent de simples multiples, et que la formule (2) va nous permettre de définir.

Dans l'étude des *phénomènes naturels*, on emploie ordinairement, sous le nom d'*atmosphère*, la tension déterminée par une colonne de $0^m,76$ de mercure, pris à la température de la glace fondante et surmonté du vide. Elle équivaut, d'après la densité de ce métal, à une hauteur d'eau de $13,6 \times 0^m,76 = 10^m,336$; ou encore à une pression de 10336 kilogrammes par mètre carré.

Pour les questions qui concernent les *générateurs de vapeur*, la législation a fixé une unité plus simple, égale à un kilogramme par centimètre carré, ou dix tonnes par mètre carré. Elle revient à une hauteur de dix mètres d'eau, ou de $0^m,7352$ de mercure. On l'appelle quelquefois *atmosphère métrique*, mais plus souvent *pression d'un kilogramme* ; sans s'astreindre à rappeler explicitement, dans le langage usuel, que cet effort correspond à une surface d'un centimètre carré.

Pour éviter, dans ce dernier cas, toute confusion, il faut encore

(¹) Πιέσις, pression ; μετρεῖν, mesurer.

distinguer la pression *absolue* et la pression *effective*. La première est celle que supporterait la paroi solide, si l'on avait fait le vide derrière elle. La seconde s'exerce dans les conditions ordinaires, contre-balancée en partie par la tension de l'air qui se trouve situé sur la face opposée. Si, pour plus de simplicité, et aux termes du décret du 30 avril 1880, l'on confond cette dernière avec l'atmosphère métrique, on voit que, si n désigne en kilogrammes la pression absolue, $n - 1$ sera la pression effective.

C'est expressément cette dernière qui constitue le *timbre* légal des chaudières, et qui doit former la graduation des manomètres réglementaires; cette dernière marquant zéro, lorsque le générateur est librement ouvert. Mais, en dehors de cette question de réglementation administrative, la quantité p exprimera toujours, dans nos calculs, la pression absolue, et sera évaluée en kilogrammes par mètre carré.

10 — *L'effort total supporté par une aire plane d'un contour quelconque, et inclinée d'une manière arbitraire, a pour valeur le produit de cette aire par la pression rapportée à l'unité de surface qui s'exerce en son centre de gravité.*

Nous venons de voir, en effet, que l'on peut toujours raisonner comme si la masse liquide se trouvait, à un niveau convenable, surmontée du vide. Dans ces conditions, l'effort élémentaire supporté normalement par une aire infinitésimale étant exprimé par le produit de cette aire et de la pression, qui est alors proportionnelle à la profondeur, deviendra le moment de cette aire par rapport au plan de pression nulle. La somme de toutes les forces analogues formera donc le moment total; et l'on sait que celui-ci est le même que si toute la masse se trouvait réunie en son centre de gravité (1).

11 — *Dans un milieu de pression uniforme, la somme des projections sur un axe des efforts exercés sur les divers éléments*

(1) On ne devra pas perdre de vue que le centre de gravité ne figure ici que pour l'évaluation de l'effort total, mais ne concerne nullement la situation du point d'application de cette résultante. Ce dernier point, appelé *centre de pression*, est absolument différent du premier; mais nous n'aurons pas besoin d'invoquer ici les théories qui s'y rapportent.

d'une surface courbe quelconque a pour valeur le produit de cette pression par la projection de la surface sur un plan perpendiculaire à l'axe.

En effet, la force imprimée sur un élément ω a pour valeur $p\omega$, et se trouve dirigée suivant la normale. Sa projection sera donc $p\omega \cos \alpha$, si α désigne l'angle que fait avec l'axe cette normale, ou, ce qui revient au même, l'angle dièdre compris entre le plan tangent et le plan perpendiculaire à l'axe. D'ailleurs $\omega \cos \alpha$ mesure, dans ces conditions, la projection de l'élément sur ce plan fixe. Enfin, quand on fait la somme des termes analogues, la pression constante se trouve en facteur commun de toutes les projections élémentaires, ce qui démontre le théorème.

12 — On remarquera en particulier que *la somme des projections sur un axe des efforts exercés par la pression atmosphérique sur une surface fermée quelconque est toujours nulle.*

En effet, la surface étant fermée, le cylindre projetant d'un élément quelconque la traverse nécessairement deux fois. Il projette en même temps, d'après cela, deux éléments qui supportent, suivant deux sens opposés, en projection sur l'axe, l'action du fluide intérieur. La somme des projections des forces sera donc nulle pour chacun de ces groupes individuellement, et, par suite, pour tout leur ensemble.

13 — *Le travail développé par la pression atmosphérique sur une masse liquide incompressible, qui se déforme d'une manière quelconque, est toujours identiquement nul.*

Supposons, en effet, qu'une pression constante p s'exerce sur tous les éléments d'une surface quelconque S (fig. 2), qui devient S' par une modification infinitésimale. Envisageons un élément ω de la superficie, limité par un contour quelconque AB. Les molécules qui en occupent le périmètre se retrouveront, après la déformation, en A'B'. Elles y parviennent en parcourant un faisceau de trajectoires, telles que AA' et BB'. Un point quelconque M de l'intérieur de cette aire décrit de même l'arc MM'. Si l'on représente, suivant la nor-

male MN, l'ensemble [1] $p\omega$ des forces que la pression ambiante exerce sur cet élément, le travail sera le produit de $p\omega$ par la projection sur MN du chemin décrit MM'.

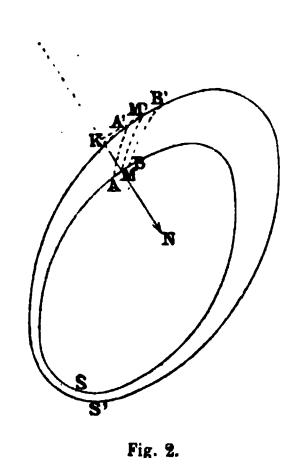


Fig. 2.

Pour projeter l'extrémité M', il nous est permis de nous servir du plan tangent en ce point ; car ce plan, n'ayant pu se dévier qu'infiniment peu de sa direction première, doit être considéré comme perpendiculaire à la normale MN. Le travail sera donc $p\omega$.MK. Or, le volume ABA'B' peut être envisagé comme un cylindre oblique de base ω et de hauteur MK. Le produit ω.MK représente, par suite, son volume. Si donc V désigne celui du corps S, dV sera l'accroissement compris entre les surfaces S, S'; et d^2V en représentera l'élément ABA'B'. Il vient ainsi, en définitive, pour l'expression différentielle du travail :

$$d^2T = pd^2V,$$

et, en intégrant dans toute l'étendue de la surface S, sur laquelle la pression reste constante :

$$dT = pdV.$$

On ne saurait intégrer de nouveau sans spécifier la manière dont la pression p variera, s'il y a lieu, suivant les modifications qu'éprouve la surface terminale et les autres circonstances du phénomène. Nous ne pouvons dès lors, dans le cas général, qu'indiquer cette seconde intégration :

$$T = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \tag{3}$$

[1] Pour évaluer la somme des travaux, nous n'avons pas besoin de prononcer le mot de *résultante*, qui ne serait pas ici à sa place, puisqu'il ne s'agit pas d'une paroi solide.

Mais si la pression reste, au contraire, constante pendant la déformation, il vient simplement :

$$(4) \qquad T = p(V_2 - V_1),$$

d'où ce théorème : *Le travail exercé par une pression constante sur un corps qui se dilate d'une manière quelconque est le produit de cette pression par la variation du volume.*

Si donc il s'agit d'un fluide incompressible, qui change de forme sans changer de volume, on voit que le travail s'annule, conformément à l'énoncé précédent.

§ 3

ÉQUATION DE CONTINUITÉ

14 — Les principes d'hydrostatique que nous venons de rappeler, nous suffiront pour passer à l'étude du mouvement des liquides. On a constitué, à cet égard, sous le nom d'*hydrodynamique*, une science purement rationnelle, fondée sur les mêmes bases expérimentales que le reste de la dynamique, et avec la même rigueur dans les déductions. Elle conduit à des développements analytiques très remarquables, mais dont la complication se trouve, en général, hors de proportion avec l'utilité pratique des résultats obtenus. Au contraire, la plupart des solutions indispensables à l'ingénieur restent inaccessibles par cette voie.

On a donc été amené à constituer parallèlement, sous le nom d'*hydraulique*, un corps de doctrine d'un caractère mixte, dans lequel, lorsque des aperçus rigoureux ne peuvent suffire pour surmonter les difficultés du problème, certaines approximations, quelques hypothèses et enfin l'expérimentation directe viennent apporter leur concours, pour permettre d'atteindre le résultat d'une manière plus ou moins satisfaisante.

15 — Les questions auxquelles donnent lieu les liquides, sont de deux sortes, et concernent, soit le mouvement *permanent*, soit le

mouvement *varié*. Il est essentiel d'établir tout d'abord cette distinction fondamentale.

L'état instantané du milieu sera complètement connu, si l'on se trouve en mesure de déterminer, pour chaque point de coordonnées x, y, z, et pour toute valeur du temps t, les trois composantes de la vitesse. Ces inconnues se présentent donc comme des fonctions de quatre variables indépendantes. Dès lors, on devra naturellement s'attendre à d'importantes simplifications pour les problèmes dans lesquels le nombre de ces variables s'abaisserait, de lui-même, à trois, par la disparition du temps. La vitesse reste alors, à chaque instant, la même en grandeur et en direction pour un même point de l'espace, tout en se modifiant quand on passe d'un point à l'autre. Les phénomènes du mouvement *permanent* présentent, d'après cela, une sorte de fixité qui les rend mieux saisissables pour l'esprit, et leur communique un intérêt particulier. On doit donc s'attendre à leur voir occuper, dans l'étude de l'hydraulique, une place prépondérante, sinon exclusive. Il sera, en effet, toujours sous-entendu que le mouvement considéré présente ce caractère, à moins que le contraire n'ait été explicitement spécifié.

16 — Envisageons, pour éclaircir ces considérations, une molécule M qui vient, en un temps infiniment petit dt, occuper une position M_1. Au bout d'une égale durée, elle arrivera de M_1 en M_2. Mais la molécule qui, pendant le premier intervalle, l'avait remplacée en M ne pourra, d'après l'hypothèse de la permanence, que reproduire ce qui aura été exécuté par la première. Elle se portera donc comme celle-ci de M en M_1, en même temps que la première ira de M_1 en M_2, et qu'une troisième molécule viendra prendre position en M. Dans un troisième laps de temps dt, le premier point matériel avancera de M_2 dans une nouvelle situation M_3. Le second, parvenu en M_1, devant reproduire en ce point les circonstances qui s'y sont déjà succédé, ne pourra que se transporter de M_1 en M_2. Enfin le troisième, actuellement en M, ira, pour le même motif, de M en M_1.

On voit, d'après cela, que chaque point matériel est *suivi* d'une série d'autres qui *emboîtent le pas*, en quelque sorte, derrière lui, en

reproduisant rigoureusement, l'un après l'autre, les mêmes circonstances. Cette *file de molécules* dessine par cela seul, à chaque instant, la *trajectoire* qui est parcourue successivement par chacune d'elles.

Une semblable file présente, par rapport à l'un quelconque N de ses points, deux segments qui s'y soudent mutuellement. Celui suivant lequel le mobile est parvenu à la position N constitue l'*amont* de ce point. Il est actuellement garni par l'ensemble des molécules qui sont appelées à passer successivement par N. La portion de la trajectoire vers laquelle se dirige, au contraire, la molécule N, est appelée l'*aval* de ce point. Elle est occupée par tous les mobiles qui sont déjà passés en N. L'*écoulement* d'une file de molécules a ainsi toujours lieu d'amont en aval, le long de cette trajectoire.

17 — Prenons maintenant une pareille file, envisagée comme une simple ligne sans dimensions transversales. Faisons, au point M, une section par un plan normal à cette courbe, dans lequel nous tracerons autour de M un contour de forme quelconque, renfermant une aire infiniment petite ω. Diverses molécules M′, M″, M‴... occupent les points de ce périmètre, ainsi que ceux de son intérieur. De chacune d'elles partent, de la même manière, des files $M'M_1'M_2'M_3'$...; $M''M_1''M_2''M_3''$...; $M'''M_1'''M_2'''M_3'''$...;... Ce *pinceau* de files juxtaposées porte le nom de *filet liquide*, ou encore de *veine liquide*. L'une des files qui le constituent, par exemple celle $MM_1M_2M_3$... qui nous a servi de point de départ, constitue, en quelque sorte, le *profil en long* de ce *canal* ou *tube* élémentaire; et si, en ses divers points M_1, M_2, M_3,.., l'on pratique d'autres sections normales, on obtiendra par là ses différents *profils en travers*. Leurs aires ω_1, ω_2, ω_3,... pourront parfois rester égales. Mais, généralement, elles varieront et iront en croissant ou en décroissant, de manière à présenter, dans leur succession, certains maxima ou minima. Les premiers portent le nom de *ventres*; les seconds sont les *nœuds* de cette veine liquide.

18 — Les mêmes aperçus peuvent s'appliquer, dans certains cas, à l'écoulement qui s'effectue sur des dimensions finies, à travers

des tubes ou gaines plus ou moins importants. Toutefois, rien n'autorise ordinairement à affirmer alors que les molécules qui occupent à un même instant la section droite Ω, dessineront, après divers intervalles égaux à dt, des surfaces $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ précisément planes et normales au profil en long. Cet état de choses peut se présenter, à la vérité, mais à titre de cas particulier, qui ne se réalisera pas d'une manière générale.

Les cas spéciaux dans lesquels il se produira présentent, par cela seul, beaucoup d'intérêt, en raison des simplifications dont cette circonstance sera la source. On a donné à ce mode particulier d'écoulement le nom de *conservation des tranches*. Si, en outre, le profil en long est rectiligne, on obtient le *parallélisme des tranches*. Ces deux expressions sont souvent prises l'une pour l'autre, attendu que l'on raisonne ordinairement pour des sections infiniment rapprochées; et alors leur plan ne peut se dévier dans l'espace que d'une quantité infiniment petite, négligeable vis-à-vis des angles finis qui définissent l'orientation de ce plan.

Par une vue analogue, nous pourrons dire que la conservation des tranches est toujours admissible pour un filet de dimensions transversales élémentaires. Supposons, en effet, que la section plane ω se soit transformée rigoureusement, au bout d'un temps infinitésimal, en une calotte courbe ω_1, et menons, au point M_1, le plan tangent à cette surface. On sait que tous les points de cette calotte resteront à des distances de ce plan infiniment petites du second ordre, c'est-à-dire négligeables vis-à-vis des dimensions de la section. Concluons donc en disant que le parallélisme des tranches, qui constitue pour les veines finies une exception relativement rare, est toujours admissible, au point de vue de la méthode infinitésimale, pour un filet élémentaire.

19 — Imaginons, d'après cela, un tel filet, ou une veine finie qui présente en particulier le caractère du parallélisme des tranches. Tous les points de sa section devant rejoindre en même temps le plan parallèle, avec des directions qui ne peuvent différer qu'infiniment peu, seront animés d'une même vitesse v. La section ω *engendre* donc, dans un temps dt, un cylindre qui a pour volume

le produit de cette aire par le chemin parcouru vdt, c'est-à-dire ωvdt.

Appelons d'autre part Q le *débit* ou la *dépense*, c'est-à-dire le *volume* [1] *liquide qui passe dans l'unité de temps* à travers cette section. Il franchira également toutes les autres dans les mêmes conditions. En effet, le liquide est incompressible; il n'éprouve ni dilatation ni contraction; il ne se crée, il ne s'anéantit en aucun point [2]. Un *jaugeage* exécuté dans n'importe quelle section devra donc toujours fournir la même valeur. Par l'introduction de cet élément fixe, le volume qui passe en un temps dt aura pour expression Qdt.

Si donc nous égalons ces deux quantités, nous obtiendrons la relation fondamentale :

$$(5) \qquad Q = \omega v.$$

On l'appelle l'*équation de continuité*. Elle montre que *la vitesse varie, d'une section à l'autre, en raison inverse de la surface de cette section*. Elle sera donc maxima aux nœuds, et minima aux ventres que présente la veine liquide.

[1] On distingue le débit en volume Q et le débit en poids P. Pour l'eau, ces deux constantes présentent la relation nécessaire :

$$P = 1000\ Q,$$

car le premier nombre est rapporté au kilogramme, et le second au mètre cube.

[2] Nous réservons le cas des affluents, aussi bien que celui des parois perméables, ou des conduites débitant en route (n° 86) pour lesquelles on ferait abstraction des dérivations dans la considération de la veine principale, et enfin l'influence de l'évaporation (Boussinesq. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, t. XXIV, p. 57). J'ai eu également à considérer, dans certains problèmes, des surfaces mobiles pour lesquelles le débit du courant continu qui vient les traverser dans l'unité de temps, varie avec leur degré d'obliquité. (Haton de la Goupillière. Théorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. C, p. 953 à 958.)

§ 4

ÉVALUATION DE LA PRESSION

20 — En général, la pression se trouvera engagée avec les autres inconnues dans les diverses équations du problème, et ne pourra être obtenue que par la voie de l'élimination, lorsque toutes les relations nécessaires auront été établies. On peut cependant signaler des cas assez étendus, dans lesquels certains aperçus directs permettent de se procurer immédiatement la valeur de cet élément essentiel. Il importe, par suite, de les indiquer tout d'abord. Il en existe quatre, dont deux se prêtent à des solutions rigoureuses, tandis que les deux autres fournissent seulement des valeurs approximatives.

Le premier cas est celui pour lequel *chaque filet liquide décrit, dans le régime proposé, la trajectoire spontanée qu'affecterait le mouvement d'un mobile libre soumis aux mêmes forces extérieures; les molécules liquides parcourant en outre cette courbe précisément suivant la loi du mouvement que ces forces sont capables de communiquer directement à un point matériel* [1].

La pression reste alors RIGOUREUSEMENT *constante dans toute l'étendue de la veine.* Elle sera par suite nulle, si l'écoulement a lieu dans le vide; ou égale à celle de l'atmosphère ambiante, au sein de laquelle s'effectue, au contraire, le mouvement.

En effet, s'il existait une variation de pression dp entre deux points M et M' infiniment voisins, nous prendrions MM' pour l'axe d'un cylindre élémentaire analogue à ceux que nous avons déjà considérés, et nous écririons l'équation différentielle de son mouvement projeté sur cette droite. Les efforts exercés sur la surface latérale de la part du liquide environnant disparaîtraient en projec-

[1] Par exemple, s'il s'agit d'un liquide pesant, cet énoncé suppose d'abord que les filets présentent la forme de paraboles ayant leur axe vertical. Mais cela ne saurait d'ailleurs suffire. Il faut, en outre, que la projection verticale de l'écoulement qui se produit en réalité, représente un mouvement uniformément varié, dont l'accélération soit précisément égale à celle de la gravité : $g = 9^{m},8088$.

tion, et ceux qui sont appliqués sur les deux bases ω donneraient pour la somme algébrique de leurs projections ωdp. Cette force perturbatrice viendrait donc mêler son influence aux autres actions extérieures, et empêcherait que le mouvement fût, conformément à l'hypothèse, identique à celui qui résulte de ces forces prises isolément.

21 — *Si les filets sont rectilignes et de vitesses constantes, le régime des pressions est* RIGOUREUSEMENT *celui de l'hydrostatique* défini par les théorèmes 6 et 7.

En effet, si chaque point matériel est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, les forces qui le sollicitent satisfont aux relations d'équilibre. Il en est donc de même pour tout l'ensemble de la masse, ce qui constitue l'état hydrostatique.

22 — *Pour un fluide animé de mouvements très lents, le régime des pressions est* SENSIBLEMENT *celui de l'hydrostatique.*

En effet, des mouvements quelconques, mais indéfiniment ralentis, ayant pour limite l'état de repos, le régime progressivement variable de pressions qui leur correspond, doit se rapprocher de plus en plus de la limite relative à l'état d'immobilité.

23 — *Si une veine liquide traverse un certain plan avec des trajectoires normales et d'une très faible courbure, le régime des pressions* DANS L'ÉTENDUE DE CE PLAN *est* SENSIBLEMENT *celui de l'hydrostatique.*

Envisageons, en effet, la tranche liquide comprise entre le plan en question et un autre que l'on mènerait parallèlement, à une distance infiniment petite du premier. Nous appliquerons au mouvement de ce système matériel le théorème de D'Alembert, en écrivant les équations de projections sur deux axes tracés dans ce plan, et celle des moments relativement à un axe perpendiculaire, avec adjonction aux forces réelles des forces d'inertie pour écrire l'équilibre de cet ensemble. Or, ces dernières se décomposent, sur chaque point matériel, en forces tangentielles $m\,\frac{dv}{dt}$, et forces centrifuges $m\,\frac{v^2}{\rho}$.

Les premières peuvent avoir des intensités quelconques, mais comme elles sont, d'après l'hypothèse, perpendiculaires au plan, elles disparaissent identiquement des trois équations en question. Quant aux forces centrifuges, nous les négligerons par approximation en raison de leur faible intensité, puisque les rayons de courbure ρ sont supposés très grands.

Ce résultat, simplement approximatif dans les conditions de l'énoncé, deviendrait rigoureux si toutes les trajectoires présentaient, à la traversée du plan, un point d'inflexion; ou si elles étaient rectilignes sur une longueur finie, car on aurait alors $\rho = \infty$, et $\frac{mv^2}{\rho} = 0$.

CHAPITRE II

THÉORÈME DE BERNOULLI

—

§ 1

LIQUIDE SANS VISCOSITÉ

24 — Nous rattacherons presque toutes les questions que présente l'hydraulique à une formule fondamentale qui a été donnée par Daniel Bernoulli ([1]), et que nous obtiendrons en appliquant au mouvement permanent d'un liquide pesant l'équation générale des forces vives.

Ce dernier théorème consiste en ce que l'accroissement de la demi-force vive est égal à la somme des travaux des forces, soit extérieures, soit intérieures. Nous aurons donc à tenir compte de l'effet assez mal connu de ces dernières, que l'on désigne sous le nom de *viscosité* ([2]). On comprend, à la vérité, dans cette dénomination, en même temps que les actions intérieures, l'influence extérieure des forces tangentielles, c'est-à-dire des frottements exercés par les parois entre lesquelles s'écoule la veine liquide considérée; soit que ces surfaces appartiennent à la masse indéfinie du liquide au sein duquel on isole, par la pensée, un filet partiel, pour lui

([1]) *Hydrodynamica*, p. 264.

([2]) On doit à M. Engler, professeur au Polytechnikum de Carlsruhe, un appareil destiné à la mesure de la viscosité dans les huiles minérales. Cette appréciation est fondée sur la comparaison des temps qu'un volume déterminé met à s'écouler à travers un ajutage, dans des conditions uniformes. On estime qu'une bonne huile de graissage doit couler dix fois plus lentement que l'eau.

appliquer le théorème; soit qu'elles constituent les rivages solides qui embrassent l'ensemble d'un courant.

Dans certains cas, avec des liquides doués d'une grande fluidité, et le long de faibles parcours, ces influences peuvent être négligées. Mais, pour de longs trajets, il devient, au contraire, indispensable d'y avoir égard. Nous commencerons donc par présenter le théorème de Bernoulli sous la forme simple, dans laquelle on fait abstraction de la viscosité intérieure et des actions tangentielles des parois; nous réservant de rétablir ultérieurement ces forces perturbatrices.

Je rappellerai d'ailleurs que la démonstration suivante, qui suppose la conservation des tranches, reste complètement générale pour un filet infinitésimal (n° 18); et, qu'en outre, le théorème qu'elle fournit pourra également être invoqué directement avec des veines de dimensions finies, lorsque l'hypothèse du parallélisme des tranches se trouvera, pour elles, convenablement justifiée.

25 — Envisageons donc un filet liquide compris entre deux tranches A_0B_0 et A_1B_1 (fig. 3), séparées par un intervalle fini quelconque A_0A_1. En un temps dt, cette masse liquide atteint la situation $A_0'B_0'A_1'B_1'$. La partie commune $A_0'B_0'A_1B_1$ possédant, d'après la permanence du mouvement, des vitesses immuables en chaque point, sa force vive disparaît identiquement dans la soustraction; il ne reste, pour former le premier membre de l'équation, que la différence des demi-forces vives des tranches extrêmes d'aval et d'amont $A_1B_1A_1'B_1'$ et $A_0B_0A_0'B_0'$.

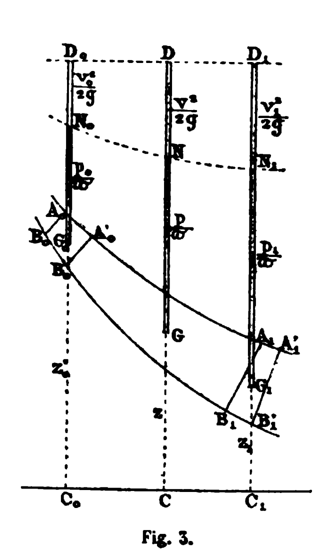


Fig. 3.

Le débit étant Q par unité de temps, le volume $A_1B_1A_1'B_1'$ a pour expression Qdt; le poids correspondant sera donc ϖQdt, et la masse $\frac{\varpi Qdt}{g}$.

Si la vitesse de cette tranche est désignée par v_1, sa demi-force vive aura pour valeur $\frac{\varpi Q dt}{2g} v_1^2$. Pour la tranche d'amont, il suffira de substituer v_0 à v_1, et, par suite, le premier membre de l'équation des forces vives deviendra :

$$\frac{\varpi Q dt}{2g}(v_1^2 - v_0^2).$$

Dans le second, se trouveront les travaux élémentaires de la pesanteur et des efforts développés normalement aux surfaces encaissantes. En ce qui concerne les parois latérales, ce travail est nul, puisque les filets superficiels les parcourent en restant perpendiculaires aux forces.

Pour les tranches extrêmes, les efforts s'exerceront, au contraire, suivant la direction même du déplacement, dans le sens moteur en A_0B_0, et dans le sens résistant pour A_1B_1. La force appliquée sur la tranche d'amont a pour valeur $p_0\omega_0$, si ω_0 représente l'aire de cette section, et p_0 la pression en son centre de gravité [1]. Le travail sera donc le produit de $p_0\omega_0$ par le chemin parcouru $v_0 dt$. Comme, du reste, $\omega_0 v_0$ représente le débit Q, d'après l'équation de continuité (éq. 5), ce travail peut se mettre sous la forme $p_0 Q dt$. Celui que subit, en sens contraire, la tranche d'aval sera pour la même raison $-p_1 Q dt$; et, par conséquent, l'ensemble des travaux exercés par les surfaces encaissantes se résumera dans le terme :

$$Q dt (p_0 - p_1).$$

En ce qui concerne la pesanteur, imaginons qu'il faille un nombre n d'intervalles de temps dt, pour que la tranche $A_0B_0A_0'B_0'$ parvienne effectivement en $A_1B_1A_1'B_1'$. Dans ce trajet fini, cette tranche prend ainsi successivement les situations M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n (fig. 4). En un même instant quelconque, tous ces volumes seront,

[1] Si l'on suppose des dimensions transversales finies. Lorsqu'il s'agit d'un filet élémentaire, le centre de gravité peut être confondu avec un point quelconque de la tranche.

dans la réalité, occupés par des masses équivalentes, puisqu'une même quantité d'eau est capable de s'y loger successivement. D'après cela, le travail de la pesanteur, qui figure dans l'équation des forces vives, s'exerçant à la fois, *pour un seul intervalle de temps* dt, sur *l'ensemble* $M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M_n$ qui vient en $M_2 M_3 \ldots M_n M_{n+1}$, est équivalent à la somme des travaux que la gravité exerce individuellement sur chacune de ces tranches, tandis qu'elle prend la place de la précédente; ou encore, puisqu'elles sont de masses égales, au travail qu'accomplirait la pesanteur sur *l'unique tranche* M_1 se transportant successivement *d'un bout à l'autre* du segment considéré, c'est-à-dire de M_1 en M_{n+1} (¹). Or on sait que ce travail est le produit du poids $\varpi Q dt$ de ce système auxiliaire par l'abaissement de son centre de gravité, qui, de G_0 (fig. 3), vient en G_1. Mais l'épaisseur des tranches étant infiniment petite, le centre de gravité d'un tel prisme, qui se trouve au milieu de sa longueur, peut être confondu avec celui de la section elle-même, lequel a été déjà envisagé plus haut. Si donc z_0 et z_1 désignent les altitudes des centres de gravité des sections extrêmes au-dessus d'un plan de comparaison, l'abaissement subi par ce centre sera $z_0 - z_1$, et finalement le travail de la pesanteur aura pour valeur :

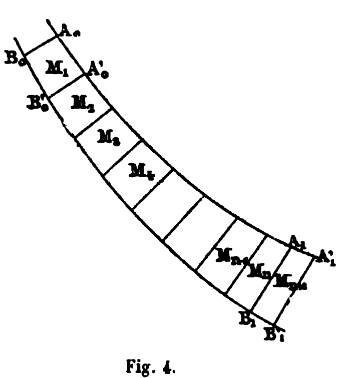


Fig. 4.

$$\varpi Q dt (z_0 - z_1).$$

26 — Nous sommes maintenant en état de poser l'équation des forces vives :

$$\frac{\varpi Q dt}{2g}(v_1^2 - v_0^2) = Q dt (p_0 - p_1) + \varpi Q dt (z_0 - z_1).$$

(¹) On remarquera cette méthode de décomposition qui, jusqu'au point actuel, convient, non seulement à la pesanteur, mais pour des forces quelconques. Nous en verrons bientôt (n° 33) une seconde application, en ce qui concerne la force centrifuge.

Nous la transformerons *en ramenant, par un changement de signe, tous les travaux dans le premier membre, et divisant par le débit élémentaire en poids* $\varpi Q dt$ [1]. Elle devient par là :

$$(6) \qquad \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \frac{p_1 - p_0}{\varpi} + z_1 - z_0 = 0.$$

A cette première forme de l'équation de Bernoulli nous en joindrons une seconde, en isolant, dans chacun des deux membres, les termes relatifs à chacune des deux sections extrêmes. Il est facile de voir que l'on constitue ainsi deux valeurs distinctes d'une même expression algébrique. Cette fonction reste donc constante, puisque ses valeurs doivent rester les mêmes pour deux sections arbitraires. Nous pouvons, par suite, écrire :

$$(7) \qquad \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z = \text{const.}$$

Sous cette forme, le théorème de Bernoulli devient susceptible de l'énoncé suivant. *Dans le mouvement d'un filet liquide pesant, la hauteur due à la vitesse* [2], *la hauteur piézométrique et l'altitude* [3] *forment une somme constante en tous les points de la trajectoire.*

Élevons par la pensée jusqu'au vide, en chaque point G de ce filet (fig. 3), un tube manométrique GD, dans lequel le liquide prendra son niveau naturel N. Comme cette colonne supporte, en

[1] Il sera bon de se rappeler ce mode de transformation, car nous aurons à l'appliquer de même aux divers travaux qui s'introduiront successivement, comme des termes de correction, pour compléter la formule de Bernoulli, dans les cas plus complexes qui seront envisagés après celui-ci.

[2] La fonction $\frac{v^2}{2g}$, qui est habituellement connue sous ce nom, joue un grand rôle en hydraulique. Il en a été dressé des tables numériques, que l'on peut trouver dans le *Cours de mécanique appliqué de Bresse*, t. II, p. 455 à 459; et dans celui de M. Collignon, t. II, p. 585 à 587.

[3] On sous-entend ici, pour le cas où l'on se trouverait autorisé (n° 18) à invoquer cet énoncé avec une veine liquide de dimensions transversales finies, que ces diverses variables s'évaluent alors *sur le centre de gravité de la section*, comme il résulte, à cet égard, des diverses parties de la démonstration précédente.

son pied, la pression p, elle devra être égale (n° 8) à la hauteur piézométrique $\frac{p}{\varpi}$. Le lieu géométrique de ces *niveaux piézométriques* N porte le nom de *ligne piézométrique* du filet.

Élevons encore au-dessus de cette ligne piézométrique, en chacun de ses points N, la hauteur due $\frac{v^2}{2g}$ à la vitesse v du filet pour le point correspondant G. L'équation (7) nous montre que le lieu géométrique des sommets D de ces hauteurs sera une ligne renfermée dans un plan horizontal. On les appelle l'un et l'autre *ligne de charge* et *plan de charge*. La ligne de charge forme, comme on le voit, la projection horizontale, sur le plan de charge, de la ligne piézométrique aussi bien que du filet lui-même.

Dans ces conditions, Rankine [1] distingue, dans le trinôme (7) qui constitue la *charge constante au-dessus du plan de comparaison*, chacun de ses trois termes en particulier sous les dénominations suivantes : 1° la charge *actuelle* z, résultant de la situation géométrique qu'occupe l'élément liquide dans l'espace ; 2° la charge *de tension* $\frac{p}{\varpi}$, qui provient de son état de compression ; 3° la charge *dynamique* $\frac{v^2}{2g}$, due à son état de mouvement. Elles fournissent, quand on les multiplie par le poids, les trois formes de l'énergie que l'eau serait capable de céder à l'appareil qui, après l'avoir recueillie en G, l'abandonnerait sans vitesse et sans pression dans le plan de comparaison.

On donne encore une troisième forme au théorème de Bernoulli. A cet effet, nous appellerons *charge entre deux points* G_0 et G_1 la *différence des niveaux piézométriques* N_0 et N_1 relatifs à ces deux sections [2]. Or, si l'on écrit l'équation (6) de la manière suivante :

$$(8) \qquad \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \left(\frac{p_1}{\varpi} + z_1\right) - \left(\frac{p_0}{\varpi} + z_0\right),$$

[1] *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs.* Trad. par M. G. Richard, p. 104.

[2] Il faut bien se garder de confondre la *charge* entre G_0 et G_1 avec la *dénivellation* de ces points G_0 et G_1 eux-mêmes. Elle constitue la *chute* de la ligne piézométrique, et non celle du filet liquide.

on voit que le second membre exprime précisément cette quantité, d'où l'énoncé suivant : *Dans le mouvement d'un filet liquide pesant, l'accroissement de la hauteur due à la vitesse, d'un point à l'autre de la trajectoire, est égal à la charge entre ces deux points.*

27 — Nous pouvons signaler dès à présent d'importantes applications du théorème qui vient d'être établi.

Supposons, en premier lieu, la figure du canal complètement définie à l'avance, de telle sorte que, pour chaque valeur de z, on possède celle de ω. Dès lors, si l'on adjoint à la formule de Bernoulli l'équation de continuité (éq. 5), on possédera deux relations pour déterminer p et v en fonction de z. De cette manière, le problème se trouvera complètement résolu.

Il donne lieu, dans ces conditions, à une remarque essentielle. Il est clair, en effet, que la pression est une quantité nécessairement positive, qui peut tendre vers zéro, mais non descendre au-dessous. La seule interprétation possible d'un semblable résultat analytique serait celle d'une *distension* des molécules, à laquelle la constitution des liquides n'est pas en état de résister. La continuité se trouverait dès lors détruite, tandis que l'équation de continuité (éq. 5) a été expressément invoquée pour ce calcul.

Il y aura donc lieu, après avoir déduit de l'élimination la valeur algébrique de p, d'exprimer que cette fonction doit rester positive, ce qui imposera aux éléments de la question certaines limites qu'ils ne devront pas franchir. Si l'on excédait les bornes ainsi déterminées, on verrait nécessairement le phénomène se transformer, puisqu'il deviendrait impossible sous sa forme primitive [1]. Au lieu de suivre *à plein tuyau* tous les renflements que l'on aurait voulu lui imposer *a priori*, d'après la constitution du tube, le liquide abandonnerait les parois, le tuyau se dégorgerait, et l'eau ne sortirait plus *à gueule-bée*. Il s'établirait alors dans les intervalles, sous le nom de *remous*, des masses tournoyantes, soustraites au mouvement de transport général, et appelées à jouer un rôle considérable qui sera analysé plus loin (nos 51 et 60).

[1] Nous rencontrerons plus loin (nos 64, 65) des exemples de semblables circonstances.

28 — On peut indiquer une seconde application générale des équations de continuité et de Bernoulli. Elle est relative au cas pour lequel, les variations de la section cessant d'être connues à l'avance, la pression peut, en revanche, être déterminée directement au moyen des quatre règles qui ont été énoncées à cet égard (nos 20 à 23).

Les deux relations permettront alors de calculer v et ω. On ne rencontrera plus, par conséquent, la même limitation que dans le cas précédent. Le phénomène considéré pourra toujours se réaliser, la veine se gonflant et se resserrant d'elle-même, suivant les obligations que lui créent les circonstances, puisque la section ω, au lieu d'être imposée *a priori*, devient un résultat du calcul.

§ 2

VISCOSITÉ

29 — Prenons, sur le filet liquide, un point O comme origine à laquelle nous rapporterons les différents points de la trajectoire au moyen de leurs *distances en arc* s. Envisageons un tronçon M_0M_1 défini par les coordonnées s_0, s_1 de ses extrémités, et divisons-le en une infinité d'éléments ds. Sur chacun de ces derniers, tel que MM', nous aurons à évaluer la somme des travaux de toutes les forces qui ont été laissées de côté dans le paragraphe précédent. Le déplacement général que subissent les points de cette masse liquide étant vdt, le travail total qui la concerne sera le produit de ce chemin par la somme de toutes les composantes tangentielles. Cette somme sera naturellement infiniment petite, comme le tronçon lui-même. Elle pourra donc être mise sous la forme Rds, en introduisant un facteur R convenablement choisi. Ce coefficient étant, d'après sa définition même, le rapport de l'ensemble des forces tangentielles développées sur les divers points matériels d'un tronçon élémentaire à la longueur de ce dernier, porte le nom de *résistance par unité de longueur*. Sa valeur varie, en général, d'un point à l'autre du filet, et elle reste, pour le moment, inconnue.

D'après cela, le travail de la viscosité sur le tronçon élémentaire MM' s'exprimera par :

$$- R ds . v dt.$$

Nous pourrons, en éliminant la vitesse à l'aide de l'équation de continuité (éq. 5), le mettre sous la forme :

$$- R ds . \frac{Q}{\omega} dt.$$

Le travail total, relatif au segment fini M_0M_1, s'obtiendra en intégrant cette expression entre les limites s_0 et s_1. Dans cette sommation, qui est faite par rapport à s, le temps dt sort du signe d'intégration, ainsi que la constante Q, et il vient définitivement :

$$- Q dt \int_{s_0}^{s_1} \frac{R}{\omega} ds.$$

30 — Tel est le terme de correction que nous devons introduire dans le second membre de l'équation des forces vives. Or la formule de Bernoulli s'en est déduite sous sa forme (6), en changeant le signe des travaux et les divisant par le débit en poids $\varpi Q dt$ (page 25, note 1). Elle deviendra donc, dans ces nouvelles conditions :

$$(9) \qquad \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \frac{p_1 - p_0}{\varpi} + z_1 - z_0 + \frac{1}{\varpi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{R}{\omega} ds = 0.$$

Elle se met également sous la forme :

$$(10) \qquad \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z + \frac{1}{\varpi} \int \frac{R}{\omega} ds = \text{const.},$$

par la substitution d'une intégrale indéfinie à l'intégrale définie.

Nous pourrons enfin écrire, au moyen d'une dernière modification :

$$(11)\qquad \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \left[\left(\frac{p_0}{\varpi} + z_0\right) - \left(\frac{p_1}{\varpi} + z_1\right)\right] - \frac{1}{\varpi}\int_{s_0}^{s_1} \frac{R}{\omega}\, ds,$$

et le théorème de Bernoulli, ainsi complété, s'énoncera en disant que *dans le mouvement d'un fluide pesant soumis à des forces de viscosité, l'accroissement de la hauteur due à la vitesse est égale à la charge, sauf une* PERTE DE CHARGE [1] *qui a pour expression :*

$$(12)\qquad \zeta = \frac{1}{\varpi}\int_{s_0}^{s_1} \frac{R}{\omega}\, ds.$$

On ne doit voir, du reste, pour le moment, dans cette formule qu'un résultat transitoire, puisque la fonction R reste provisoirement inconnue. Elle n'en sera pas moins très utile, et nous indiquerons plus tard ce que l'on est parvenu à connaître au sujet de la résistance R par unité de longueur.

[1] Il en résulte que la *ligne de charge effective*, c'est-à-dire le lieu des sommets de la colonne :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{v^2}{2g},$$

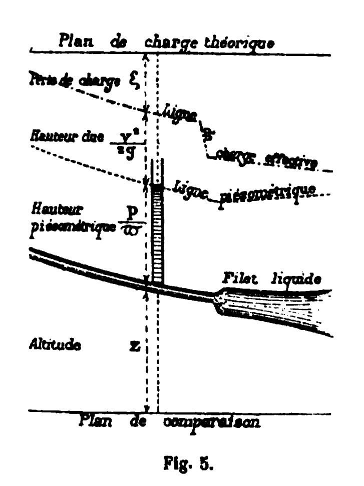


Fig. 5.

que nous avons élevée au-dessus du plan de comparaison (n° 26), va en descendant successivement (fig. 5) à partir du *plan de charge théorique* qui serait mené horizontalement par le sommet de la colonne initiale :

$$z_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Cet abaissement progressif :

$$\zeta = \frac{1}{\varpi}\int \frac{R}{\omega}\, ds,$$

qui forme une *perte continue de charge*, se complique en outre de *pertes brusques de charge* que nous rencontrerons en diverses occasions (n°s 62, 70, 111), et qui donnent lieu alors, non plus à une allure progressivement descendante, mais à des *décrochements* subits de la ligne de charge.

§ 3

MOUVEMENT RELATIF

21 — Il sera intéressant, pour étudier le fonctionnement de l'eau à l'intérieur d'un récepteur hydraulique, d'envisager le mouvement relatif du liquide, qui résulte du mouvement d'entraînement attribué au mécanisme. Il y a donc lieu de transformer encore une fois la formule de Bernoulli, pour l'adapter à ce nouveau point de vue.

On sait d'une manière générale que tous les théorèmes de la mécanique sont directement applicables au mouvement relatif, pourvu que l'on adjoigne aux forces réelles deux forces fictives, à savoir : 1° la force d'inertie du mouvement d'entraînement ; 2° la force centrifuge composée. Mais, lorsqu'il s'agit en particulier du théorème des forces vives, il s'opère une importante simplification par la disparition spontanée de cette dernière. Elle est, en effet, constamment normale à la trajectoire relative et n'effectue, par suite, aucun travail. Il restera donc simplement, pour former le terme de correction de l'équation (9), à évaluer le travail de la force d'inertie d'entraînement, à le changer de signe [1], et à le diviser par le débit en poids $\varpi Q dt$ (page 25, note 1).

Pratiquement, cette question ne présente d'intérêt que pour les récepteurs animés d'une rotation uniforme [2]. Ces appareils tournent ordinairement autour d'axes horizontaux ou verticaux, et portent, suivant ces cas, les noms de *roues* ou de *turbines*. Ce n'est que dans des cas tout à fait exceptionnels que l'on en a disposé autour

[1] Ce qui revient, si l'on veut, à calculer directement le travail de la force *totale* du mouvement d'entraînement.

[2] Dans la réalité, cette rotation est, non pas uniforme, mais simplement périodique ; la durée de la période étant égale au temps nécessaire pour le passage d'une *aube* succédant à la précédente. Ces appendices sont toujours, en effet, répartis symétriquement sur la circonférence du récepteur. Mais la différence qui sépare ce régime de l'uniformité est bien peu sensible, en raison de l'importance du moment d'inertie du système tournant, qui fait fonction de volant ; et l'on en fait toujours abstraction.

d'axes inclinés. Mais il ne nous sera pas plus difficile d'aborder ici le problème avec ce degré de complète généralité.

32 — La force d'inertie du mouvement d'entraînement devient, dans ces conditions, la *force centrifuge*. Elle est dirigée suivant le rayon de rotation CM (fig. 6), en s'éloignant du centre C, et a pour valeur $m\varepsilon^2 r$, si m désigne la masse élémentaire considérée, r son rayon, et ε la vitesse angulaire. Représentons par MM' l'arc de trajectoire relative. Le travail étant le produit de l'intensité de la force par la projection MK du chemin parcouru sur sa direction, aura pour valeur $m\varepsilon^2 r.\mathrm{MK}$. Nous obtiendrons la projection K du point M' en coupant la droite CM par un cylindre de révolution décrit autour de l'axe et passant par le point M'. Son rayon CK sera donc celui $r + dr$ du point M', et, par conséquent, MK aura pour valeur dr.

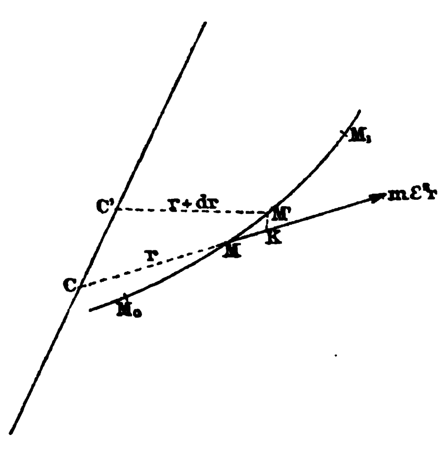


Fig. 6.

Le travail élémentaire de la force centrifuge étant ainsi devenu :

$$m\varepsilon^2 r dr,$$

le travail fini, développé le long d'un parcours M_0M_1, aura pour valeur :

$$\int_{r_0}^{r_1} m\varepsilon^2 r dr = \frac{m\varepsilon^2 (r_1^2 - r_0^2)}{2}.$$

Or εr représente la vitesse d'entraînement, que nous conviendrons de représenter par u, en réservant la lettre v pour la vitesse absolue, et employant w pour désigner la vitesse relative. Il vient donc fina-

lement, pour l'expression du travail de la force centrifuge accompli par la masse m sur un parcours quelconque M_0M_1 :

$$\frac{m(u_1^2 - u_0^2)}{2}.$$

33 — Si maintenant nous envisageons le tronçon $A_0B_0A_1B_1$ (fig. 4) dans son transport en $A_0'B_0'A_1'B_1'$, nous avons vu (p. 24, note 1) que le travail exercé sur cette masse totale, pendant son déplacement infiniment petit, peut s'évaluer à l'aide de la seule masse élémentaire $A_0B_0A_0'B_0'$, à laquelle on imposerait par la pensée le trajet total qui la sépare de la situation $A_1B_1A_1'B_1'$. Ce travail sera donc fourni par la dernière expression, dans laquelle m représenterait la masse de ce tronçon élémentaire $A_0B_0A_0'B_0'$.

Mais nous devons, pour passer de l'équation des forces vives à celle de Bernoulli (p. 25, note 1), diviser ce travail par le débit en poids, qui a pour valeur mg, et changer le signe du résultat. Le terme de correction qu'il faut adjoindre au premier membre de la relation (9) sera par conséquent :

$$-\frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}.$$

La formule de Bernoulli devient dès lors, en marquant, ainsi que nous en sommes convenus, par w la vitesse relative :

$$(13)\quad \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g} - \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g} + \frac{p_1 - p_0}{\varpi} + z_1 - z_0 + \frac{1}{\varpi}\int_{s_0}^{s} \frac{R}{\omega} ds = 0,$$

ou encore :

$$(14)\quad \frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z + \frac{1}{\varpi}\int \frac{R}{\omega}\, ds = \text{const.}$$

34 — Il est bon de signaler un cas très étendu dans lequel le théorème de Bernoulli éprouve une simplification importante, car

il s'applique alors dans le mouvement relatif exactement comme dans le mouvement absolu. Ce cas est celui d'*une trajectoire quelconque dont les deux extrémités sont seulement assujetties à la condition de se trouver à la même distance de l'axe.* On a, en effet, alors $u_1 = u_0$, et le terme de correction s'évanouit de lui-même.

Cette circonstance se présentera notamment pour *un tronçon de longueur quelconque d'une trajectoire tracée arbitrairement sur un cylindre de révolution,* ce qui est le cas de certains récepteurs hydrauliques.

§ 4

SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE TOURNANT

35 — Imaginons un liquide dépourvu de viscosité, qui reste en repos relatif par rapport à un vase animé d'une rotation uniforme. Les conditions d'équilibre devront, pour cela, se trouver vérifiées entre les forces réelles, la force d'inertie d'entraînement et la force centrifuge composée. Mais cette dernière disparaît ici comme renfermant en facteur, dans son expression générale, la vitesse relative, qui est supposée nulle dans le cas actuel. Il ne restera donc en présence que les forces réelles et les forces centrifuges.

Leur équilibre s'exprimera en écrivant que, pour un mouvement virtuel quelconque, la somme de leurs travaux virtuels est nulle. Cette somme n'est autre, d'ailleurs, que la différentielle de la somme de travaux que nous venons d'évaluer pour une trajectoire absolument arbitraire. L'intégrale de cette relation d'équilibre ne différera donc pas de l'équation (14), dans laquelle on aurait supprimé, outre le terme relatif à la viscosité, d'après l'hypothèse, celui $\frac{w^2}{2g}$ qui provient de l'évaluation des forces vives, étrangère à celle des travaux virtuels qui nous occupe exclusivement en ce moment. En un mot, elle se réduit à :

$$\frac{p}{\varpi} + z - \frac{u^2}{2g} = \text{const.}$$

On peut, dans cette masse liquide en repos relatif, grouper par la pensée les points pour lesquels la pression conserve la même valeur. On constituera ainsi une surface, et, si l'on vient à attribuer successivement plusieurs valeurs déterminées à la pression, on obtiendra une famille de surfaces emboîtées les unes dans les autres. On les appelle *surfaces de niveau*, attendu que chacune d'elles peut jouer au besoin le rôle de *surface libre* de ce bain, si on la débarrasse de la masse liquide qui la surmonte, en remplaçant celle-ci par une atmosphère ambiante de tension constante.

L'équation générale de cette famille de surfaces s'obtiendra donc en attribuant à p, dans la dernière formule, une valeur invariable, que l'on peut dès lors réunir au second membre. Elle se réduit, par conséquent, à cette forme très simple:

$$z - \frac{u^2}{2g} = \text{const.}$$

36 — Pour reconnaître la forme des surfaces qu'elle représente, nous envisagerons à la fois deux systèmes de coordonnées rectangulaires (fig. 7). Le premier xyz a pour axe des z la verticale, pour axe des x l'horizontale comprise dans le plan vertical de l'axe de rotation, et pour axe des y une perpendiculaire à ce plan.

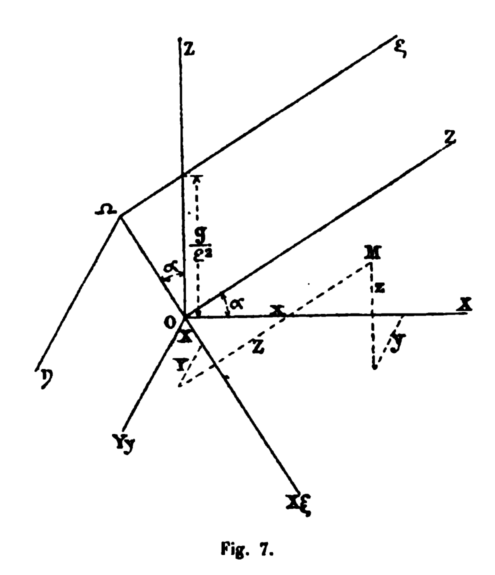


Fig. 7.

Le second système XYZ a pour axe des Z l'axe de rotation lui-même, pour axe des X la perpendiculaire à ce dernier, menée dans le plan vertical qui le projette, et pour axe

des Y la perpendiculaire à ce plan, qui ne diffère pas d'ailleurs de Oy.

Si α désigne l'inclinaison de l'axe de rotation sur l'horizon, il viendra, en projetant sur la verticale les deux contours xyz et XYZ qui joignent l'origine O à un point quelconque M :

$$z = Z \sin \alpha - X \cos \alpha.$$

On aura en même temps :

$$u^2 = \varepsilon^2 r^2 = \varepsilon^2 (X^2 + Y^2).$$

L'équation des surfaces de niveau deviendra donc :

$$\frac{\varepsilon^2}{2g}(X^2 + Y^2) + X \cos \alpha - Z \sin \alpha = \text{const.}$$

Nous pouvons encore la mettre sous la forme :

$$\left(X + \frac{g \cos \alpha}{\varepsilon^2}\right)^2 + Y^2 = \frac{2g \sin \alpha}{\varepsilon^2} Z + \text{const.}$$

Si nous changeons encore une fois de coordonnées, en relevant suivant la verticale le système XYZ d'une hauteur égale à $\frac{g}{\varepsilon^2}$, le nouveau système $\xi\eta\zeta$ se trouvera relié au précédent par les formules de transformation :

$$\xi = X + \frac{g \cos \alpha}{\varepsilon^2}, \qquad \eta = Y, \qquad \zeta = Z,$$

et l'équation des surfaces de niveau deviendra définitivement :

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2g \sin \alpha}{\varepsilon^2} \zeta + \text{const.}$$

En coupant par le plan $\xi =$ *const.*, on obtient l'équation d'un

cercle qui a son centre sur l'axe $O\zeta$. La surface est donc de révolution autour de cette droite. Pour $\eta = 0$, il vient :

$$\zeta^2 = 2\,\frac{g \sin \alpha}{\varepsilon^2}\,\zeta + \text{const.}$$

c'est-à-dire une parabole qui admet cette même ligne comme axe de symétrie, et a pour paramètre $\frac{g \sin \alpha}{\varepsilon^2}$. *Les surfaces de niveau sont donc des paraboloïdes de révolution, tous égaux entre eux, ayant pour paramètre $\frac{g \sin \alpha}{\varepsilon^2}$, et pour axe commun la droite que l'on obtient en relevant verticalement, d'une hauteur $\frac{g}{\varepsilon^2}$, l'axe de rotation.*

37 — Nous nous arrêterons, en particulier, sur les deux cas qui intéressent plus directement la pratique, et pour lesquels l'axe est vertical ou horizontal.

Avec le premier de ces deux dispositifs, le relèvement de l'axe n'exerce plus aucune influence, et comme alors $\alpha = 90°$, le paramètre des paraboloïdes devient simplement $\frac{g}{\varepsilon^2}$.

Le second cas donne lieu, au contraire, à une modification profonde. On a, en effet, $\alpha = 0$, et le paramètre du paraboloïde s'annule. Mais si, pour faire disparaître cette difficulté, nous remontons directement à l'équation de la surface, elle se réduit alors à :

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$$

ζ ayant disparu, cette formule représente des cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation. Ils continuent du reste à être de révolution autour d'une droite que l'on obtient en relevant cet axe d'une hauteur égale à $\frac{g}{\varepsilon^2}$ (¹).

Il existe toutefois, entre ces deux cas, une différence qu'il importe

(¹) La simplicité de ce résultat et l'importance qu'il présente pour la théorie des récepteurs hydrauliques (nº 157) méritent qu'on l'établisse directement, sans faire dépendre

de signaler en passant. Le premier assigne à l'eau une forme *permanente*, car le paraboloïde tourne autour de son propre axe de figure, et ne présente d'après cela aucune cause de déformation. La seconde hypothèse, au contraire [1], ne nous fournit qu'une forme *instantanée*. En effet, le profil du cylindre est alors un cercle que l'on décrit du point fixe C comme centre, de manière à le faire passer par la molécule superficielle considérée. Or celle-ci s'abaisse, en raison de son mouvement de rotation qui s'effectue autour d'un point O distinct du précédent. Le cercle se déforme par suite à chaque instant. Il ne constitue plus une figure d'équilibre proprement dit, mais seulement un lieu géométrique de points animés d'une vitesse relative nulle, ou de déplacements relatifs infiniment petits du second ordre.

sa démonstration de celle du cas général. Poncelet a indiqué, à cet égard, la démonstration suivante.

Il est d'abord évident que, pour un axe de rotation horizontal, la surface libre ne peut être qu'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à cette direction, de telle sorte qu'il suffit d'en déterminer la section droite. Cette courbe devra être, en chacun de ses points M (fig. 8), normale à la résultante N des forces qui sollicitent la molécule de masse m placée en ce point, à savoir son poids $MA = mg$, auquel nous adjoignons (n° 35) la force centrifuge $MB = m\epsilon^2 r$. Si, en effet, cette résultante était dirigée obliquement à la surface de l'eau, elle se décomposerait à son tour en une force normale, détruite par la réaction du liquide, et une composante tangentielle qui déterminerait le glissement de cette molécule. Nous aurons d'ailleurs, dans les triangles semblables MNB, MCO :

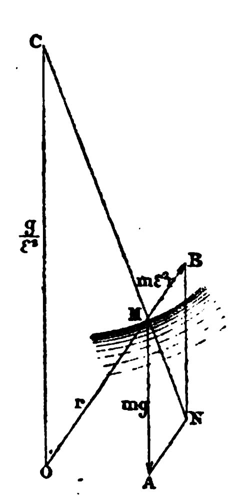


Fig. 8.

$$\frac{OC}{OM} = \frac{NB}{MB},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{OC}{r} = \frac{mg}{m\epsilon^2 r},$$

ou enfin :

$$OC = \frac{g}{\epsilon^2},$$

valeur indépendante du choix du point M. On voit ainsi que toutes les normales de la courbe inconnue rencontrent la verticale du centre de rotation O en un même point C, situé au-dessus de ce dernier à la hauteur $\frac{g}{\epsilon^2}$. En un mot, ce profil est un cercle décrit autour du point C.

[1] Ainsi, du reste, que le cas général lui-même d'un axe incliné.

CHAPITRE III

ORIFICES

—

§ 1

ORIFICES EN MINCE PAROI

28 — *Description de l'écoulement.* — Après avoir établi les généralités renfermées dans les deux chapitres précédents, nous avons maintenant à faire usage des moyens d'action qui s'y trouvent rassemblés, pour aborder l'étude effective des phénomènes spéciaux qui intéressent la pratique de l'ingénieur hydraulicien.

Nous distinguerons parmi eux, d'une part les *longs parcours*, tels que ceux qui s'accomplissent dans les tuyaux de conduite (chap. V), ou les cours d'eau (chap. VI), le long desquels la puissance motrice s'use lentement en surmontant les résistances continues ; et, d'autre part, les *points singuliers* qui présentent, sur un court espace, quelque circonstance spéciale de l'écoulement.

Parmi ces derniers, nous envisagerons successivement les *orifices* (chap. III), qui donnent librement issue à une veine liquide ; et les *changements brusques* (chap. IV), qui deviennent l'occasion de phénomènes très complexes.

Pour l'étude des premiers, nous distinguerons encore les *grands* et les *petits* orifices, suivant que les dimensions du débouché sont ou non négligeables devant la charge d'eau qui détermine l'écoulement.

Dans chacune de ces catégories, enfin, nous examinerons successivement l'*orifice en mince paroi*, pour lequel la cloison qui sé-

pare le liquide de l'extérieur n'a qu'une épaisseur inappréciable, et les *orifices munis d'appendices*, avec lesquels l'écoulement subit, au contraire, l'influence de la forme que présente le conduit pratiqué à travers une épaisseur sensible.

39 — Nous commencerons donc par l'étude de l'écoulement permanent [1] qui s'opère à travers un petit orifice en mince paroi; et, pour en réduire les circonstances au maximum de simplicité, nous supposerons d'abord ce débouché de forme circulaire et pratiqué dans le fond horizontal d'un vase de très grandes dimensions. On approche autant que possible des conditions théoriques, en amincissant la paroi sur les bords en forme de biseau, de manière que le liquide ne se trouve en contact qu'avec une épaisseur absolument négligeable (fig. 10).

Ce serait une grande erreur que de s'imaginer que la veine se

[1] On réalise la permanence du mouvement en donnant de très grandes dimensions à la surface libre, ou, pour plus de précision, en employant le vase de Mariotte, le siphon flottant, ou le flotteur de de Prony (fig. 9). Avec cet ingénieux appareil, le

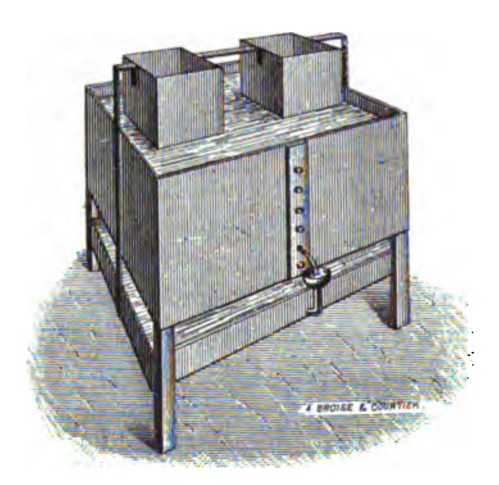


Fig. 9. Flotteur de de Prony.

liquide est reçu dans la cuvette inférieure du flotteur. Le poids de ce dernier, ainsi augmenté, exige, d'après le principe d'Archimède, un déplacement plus grand. Il s'enfonce donc, dans le bassin supérieur, d'un volume précisément égal à celui qui a disparu, et y maintient, par conséquent, la constance rigoureuse du niveau.

forme, dans ces circonstances, par l'abaissement direct du cylindre liquide que l'on élèverait par la pensée normalement à la paroi au-dessus de l'ouverture, et sans que les masses environnantes participent à l'écoulement. Bien au contraire, une expérience de Lajerhjelm (¹) a montré que la vitesse est très sensible-

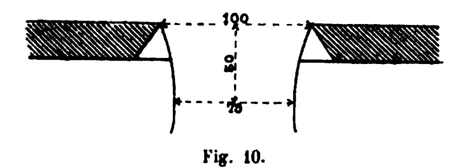


Fig. 10.

ment nulle au centre de l'orifice, comme si cette partie se trouvait maintenue en suspension par la concentration des filets périphériques, qui se butent ou se calent mutuellement en convergeant vers l'axe. On comprend d'ailleurs facilement qu'il serait impossible au cylindre superposé à l'orifice de descendre seul, sans éprouver des frottements de la part de la gaîne liquide qui l'enveloppe immédiatement, si on la suppose immobile. Il tendrait donc, par une réaction égale à l'action, à l'entraîner avec lui. Celle-ci, agissant ensuite de proche en proche sur les parties avoisinantes, déterminerait également leur mise en mouvement, qui s'étendrait ainsi nécessairement à toute la masse de l'eau (²).

Il est clair que les filets extrêmes qui glissent directement sur le fond plat, ne sauraient sortir brusquement sous un angle droit, ce qui exigerait pour leur trajectoire un rayon de courbure nul et, par suite, une force centripète infinie $\frac{mv^2}{\rho}$. Ils devront donc prendre une forme curviligne, en se rapprochant progressivement les uns des autres d'une manière convergente, et finissant, à une certaine distance du plan de sortie, par atteindre le parallélisme, pour tra-

(¹) On constate, en effet, en disposant verticalement un tube ouvert à son extrémité, que l'on abaisse près du centre de l'orifice, qu'il ne s'y opère pas de dénivellation sensible du liquide, ce qui indique l'absence de la succion que devrait produire la vitesse de cette région centrale, si elle était appréciable (*Mémoires présentés à l'Académie des sciences par divers savants*, t. III, p. 401).

(²) On le constate en mettant en suspension de fines poussières, dont le mouvement met en évidence la formation des filets liquides.

verser tous ensemble normalement une *section contractée*. L'observation montre que celle-ci se trouve située au-dessous de l'orifice à une distance égale au rayon de ce dernier (fig. 10), et que son diamètre (¹) représente la fraction 0,7874 de celui de l'ouverture (²). Le rapport des aires en sera donc le carré 0,61999876 ou simplement 0,62. On le représente ordinairement par m, et l'on écrit :

$$(15) \qquad \omega = m\Omega,$$

en appelant Ω la section de l'orifice et ω celle de la contraction.

A la section contractée succède, sur une faible longueur, une partie cylindrique qui présente une limpidité parfaite et l'aspect du plus beau cristal. Au delà, l'écoulement se trouble, et sa forme générale, cessant d'être rectiligne, présente des alternances de nœuds et de ventres (fig. 11). Un grossissement optique suffisant révèle alors que la constitution de la veine se trouve profondément altérée. Au lieu d'une masse continue, elle ne pré-

Fig. 11.

(¹) On mesure ce diamètre en entourant la veine d'une ceinture de liège, à travers laquelle on pique radialement une série d'aiguilles fines, que l'on approche successivement du liquide jusqu'à ce qu'elles en écorchent la surface. On obtient ainsi la forme rigoureuse de la section contractée.

(²) Les valeurs suivantes du diamètre de la contraction ont été données par divers expérimentateurs :

Bossut	0,817 à 0,812
Borda	0,804
Eytelwein	0,800
Venturi	0,798
Michelotti père	0,792
Poleny	0,790
Michelotti fils	0,790 à 0,785
Brunacci	0,780

(Daubuisson. *Hydraulique*, p. 21. — Michelotti. *Sperimenti idraulici*, Turin, 1767. — Michelotti. Mémoire physico-mathématique concernant les résultats d'expériences hydrauliques. *Académie des sciences de Turin*, 1784-1785. — Léonard de Vinci, dans le recueil intitulé : *Raccolta d'autori italiani che trattano del moto delle acque*. Bologne. — Mariotte. *Traité du mouvement des eaux*. — Navier. *Additions à l'Architecture hydraulique de Bélidor*).

sente plus qu'une multitude de particules vibrantes, qui oscillent entre une forme allongée dans le sens vertical et un profil aplati suivant la direction horizontale. Ces apparences s'accusent d'une manière encore plus marquée par l'action de circonstances capables de favoriser l'état vibratoire. Savart a vu, en effet [1], sous l'influence d'un son musical intense, les nœuds et les ventres s'exagérer d'une manière sensible.

Après quelques alternatives d'épanouissement et de rétrécissement, la veine achève de se disloquer, et elle se désagrège en gouttelettes isolées. L'influence de la pesanteur contribue sans doute à la production de ce phénomène. En effet, lorsqu'une molécule passe dans la contraction avec la vitesse v, elle s'abaisse, en un temps t, de la quantité :

$$h = vt + \frac{1}{2}gt^2.$$

Si un second point matériel a traversé cette section au bout d'un temps θ après le premier passage, il se trouvera, pour l'instant considéré, c'est-à-dire après une durée $t - \theta$, à la distance :

$$h' = v(t-\theta) + \frac{1}{2}g(t-\theta)^2.$$

L'intervalle des deux molécules :

$$h - h' = \left(v - \frac{g\theta}{2} + gt\right)\theta,$$

croît donc au delà de toutes limites avec le temps t. Aussi voit-on, dans les liquides visqueux et filants, la section de la veine se réduire presque indéfiniment, par suite de cette sorte d'étirage que lui imprime la gravité. Mais, avec les milieux plus fluides, tels que l'eau, une constitution aussi frêle du filet liquide est bientôt détruite par l'influence de l'état vibratoire. Toutefois la pesanteur ne sau-

[1] Savart. De la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi (*Annales de physique et de chimie*, 2e série, t. LIII, p. 357).

rait être la seule cause à invoquer pour la rupture de la veine, car on observe également cet effet dans les jets ascendants. La résistance de l'air y contribue sans doute de son côté, et l'on voit certaines cascades très élevées se résoudre complètement en un brouillard, dont les particules ne se rejoignent que sur le sol pour y reformer un cours d'eau.

Ajoutons à cette description que, si l'orifice cesse d'être circulaire, l'écoulement présente une particularité remarquable connue sous le nom d'*inversion* ou *renversement de la veine* [1]. En raison d'une inégalité dans l'énergie des filets plus ou moins écartés du centre, analogue à celle qui produit le phénomène de Lajerhjelm, la section, au lieu de rester, à diverses hauteurs, semblable à celle du débouché, se déforme progressivement. Les parties saillantes finissent par se trouver en regard des rayons minima de l'orifice, et réciproquement. Plus loin, ce renversement se continuant, ramène les maxima d'écartement en face de ceux de l'ouverture, et ainsi de suite alternativement.

Les figures 12 à 14 montrent, par exemple, les effets produits par

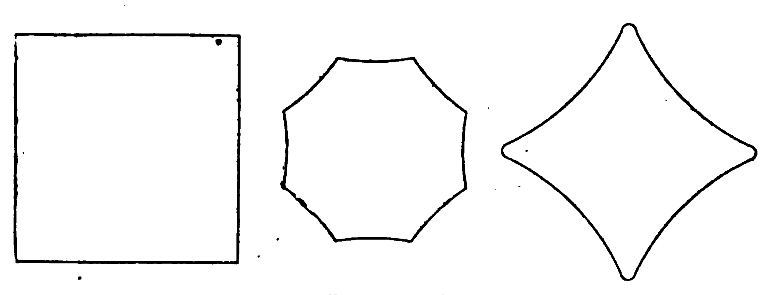


Fig. 12, 13, 14.

un orifice carré [2]. Les diagrammes 15 à 19 correspondent de même à un orifice rectangulaire de 0^m,60 de hauteur sur 0^m,02 de largeur. Ils sont relevés respectivement à 0^m,10; 0^m,30; 0^m,70; 1^m,10 de cet orifice.

(1) Bidone a fait de nombreuses expériences sur ce sujet (*Expériences sur la forme et la direction des veines et courants d'eau lancés par diverses ouvertures*, Turin, 1829).

(2) Poncelet et Lesbros. *Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement des eaux à travers les orifices rectangulaires*, 1832.

Il va sans dire que le coefficient de contraction 0,62 cesse d'être applicable en dehors de la veine circulaire, et doit, pour chaque forme d'orifice, être remplacé par une valeur correspondante que l'expérience directe peut seule faire connaître (n° 46).

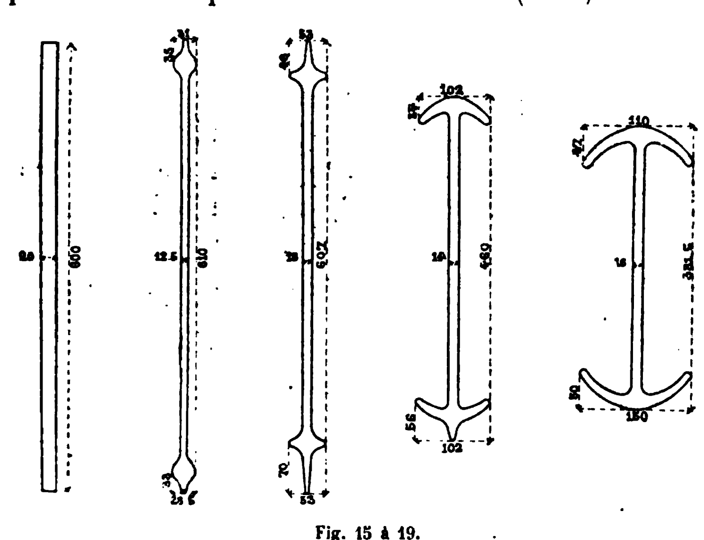


Fig. 15 à 19.

La description détaillée que nous venons de présenter pour *le plus simple* des modes d'écoulement que l'on puisse envisager dans l'hydraulique, est destinée à donner une idée exacte du degré de complication que présente cet ordre de faits. On peut se figurer dès lors ce que devraient être les formules rigoureuses capables de recéler, dans leur expression analytique, les moindres circonstances de semblables phénomènes. Cet aperçu nous dicte donc notre ligne de conduite, et l'on voit que l'ingénieur doit borner son ambition à dégager, à l'aide de méthodes simples, les résultats les plus essentiels pour ses recherches. On en peut, dans la question qui nous occupe, signaler deux principaux, à savoir : la vitesse avec laquelle le liquide traverse la section contractée, et le débit de l'écoulement. La première valeur nous sera fournie par le théorème de Bernoulli, la seconde par l'équation de continuité.

40 — *Vitesse.* — Remontons par la pensée le cours d'un filet infinitésimal, à partir de l'élément de la section contractée qui lui

sert de base, jusqu'à une région M_0 (fig. 20), pour laquelle la vaste étendue du bassin permette de négliger le carré de la vitesse v_0. Les vitesses sont, en effet, d'après l'équation de continuité, de l'ordre de l'inverse du carré des dimensions de la section, et leurs propres carrés seront de l'ordre des quatrièmes puissances de ces dernières. Appelons α la profondeur de ce point M_0 au-dessous de la surface libre, et β son altitude au-dessus de la section contractée, que nous prendrons pour plan de comparaison, de telle sorte que l'on ait :

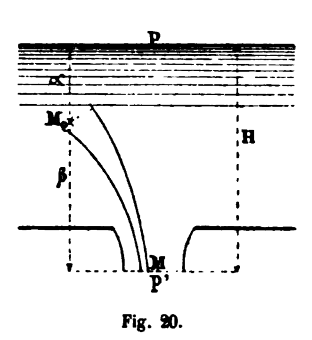
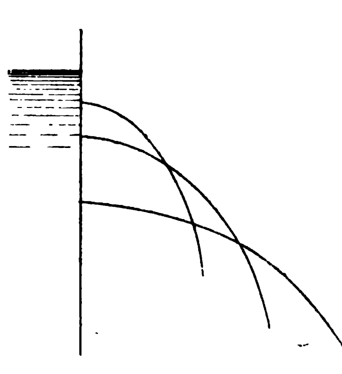


Fig. 20.

$$\alpha + \beta = H,$$

si H désigne la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du plan de la contraction. Ajoutons toutefois que, dans un but de simplification, et bien que cette approximation ne soit en rien nécessaire, l'on confond le plus habituellement H avec la profondeur du vase, qui n'en diffère que d'une quantité égale au rayon de l'orifice (n° 39).

Nous supposerons qu'une atmosphère de pression p surmonte la surface du bain, et que la veine liquide s'ouvre un passage à travers un milieu différent, de pression p'. Si l'on admet, comme nous l'avons fait ci-dessus (n° 39), que, dans la section contractée, les particules tombent simplement sous l'action de la pesanteur [1], nous


Fig. 21.

[1] Il en est de même pour une paroi inclinée, si les filets décrivent individuellement les paraboles normales à cette paroi qui résultent de la théorie du mouvement des graves. C'est ce que l'on peut admettre, mais à la condition que les dimensions de la veine restent négligeables vis-à-vis de la charge, comme nous le supposons dans cette théorie spécialement consacrée aux petits orifices. Dans le cas contraire, les paraboles du sommet sont peu tendues (fig. 21), celles de la

pourrons appliquer la première règle relative à la détermination des pressions (n° 20). Celle-ci devant dès lors être constante dans toute l'étendue de la section sera, en M, égale à la tension ambiante p'. Nous appliquerons de même, en M_0, la troisième règle (n° 22), en raison de la lenteur des mouvements de cette région. La pression étant, d'après cela, soumise au régime hydrostatique, aura pour valeur en ce point $p + \varpi\alpha$ (éq. 1, page 8).

Si donc nous formons, pour chacun de ces deux points, l'expression du trinôme de Bernoulli, elle sera, pour le point M :

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p'}{\varpi} + \text{zéro},$$

et, en M_0 :

$$\text{zéro} + \frac{p + \varpi\alpha}{\varpi} + \beta.$$

Il vient donc :

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p - p'}{\varpi} + \alpha + \beta,$$

et, par suite :

$$(16) \qquad v = \sqrt{2g\left(\mathrm{H} + \frac{p - p'}{\varpi}\right)}.$$

41 — Dans le cas spécial, le plus fréquent dans la pratique, pour lequel la pression atmosphérique se trouve la même dans les deux enceintes, l'équation se réduit et devient simplement :

$$(17) \qquad v = \sqrt{2g\mathrm{H}}.$$

Elle est alors connue sous le nom de *formule de Torricelli* [1].

Cette relation a été contrôlée expérimentalement par de nombreux

partie inférieure sont plus ouvertes. Elles se coupent géométriquement dans le voisinage de l'orifice, et ne peuvent plus, par conséquent, servir de trajectoires effectives aux filets liquides. Ceux-ci se gêneront donc mutuellement pour pouvoir cheminer côte à côte, ce qui renverse les conditions nécessaires à l'application de la règle n° 20.

[1] Torricelli, *De motu gravium naturaliter accelerato, anno* 1643.

hydrauliciens [1]. On peut, entre autres modes de vérification, pratiquer un orifice à travers une paroi mouillée par-dessous, de manière à déterminer un jet ascendant. On reconnait ainsi que le liquide qui, en raison de sa vitesse v, doit, d'après la théorie du mouvement des graves, remonter à la hauteur $\frac{v^2}{2g}$, c'est-à-dire H (éq. 17), s'élève en réalité à très peu près à ce niveau; la faible différence qui l'en sépare s'expliquant facilement par les résistances passives, dont nous avons fait abstraction.

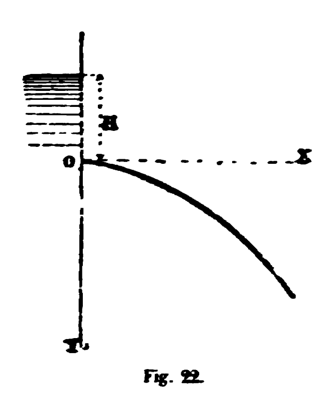


Fig. 22.

On a également employé un autre mode de contrôle, en pratiquant l'orifice dans une paroi verticale. On constate alors que le jet s'échappe suivant une parabole exactement conforme au tracé qu'il est facile d'obtenir *a priori*, d'après la formule de Torricelli. On doit avoir, en effet, pour le mouvement de chacun des points matériels (fig. 22) :

$$x = vt = t\sqrt{2gH}, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2,$$

d'où, en éliminant le temps :

$$x^2 = 4Hy.$$

On voit, par cette équation, que la parabole a son sommet à l'orifice, et admet pour directrice le profil du niveau libre de l'eau.

42 — *Dépense.* — Quant au débit, nous l'obtiendrons (éq. 5), en multipliant la vitesse v (éq. 16) par la section contractée ω (éq. 15), ce qui donne, pour le cas général :

[1] Mariotte, Michelotti, Bossut, Castel et Daubuisson, Poncelet et Lesbros, etc. (Daubuisson, *Traité d'hydraulique*, 1840, p. 11). — Vauthier (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CII, p. 165).

(18) $$Q = m\Omega\sqrt{2g\left(H + \frac{p - p'}{\varpi}\right)},$$

et, avec la formule de Torricelli [1] :

(19) $$Q = m\Omega\sqrt{2gH}.$$

[1] Navier a essayé de déterminer le *coefficient de dépense m* au moyen d'un raisonnement qui constitue beaucoup plutôt un aperçu intuitif qu'une déduction rigoureuse, mais qui conduit, à l'aide d'hypothèses assez simples, à une valeur voisine de la vérité.

Il admet, d'une part, que tous les filets traversent le plan de l'orifice (et non plus celui de la contraction) avec une égale vitesse qu'il confond avec v; en second lieu, qu'ils se répartissent, entre eux, la surface Ω de cette ouverture proportionnellement aux angles qui les séparent les uns des autres (fig. 23), depuis le filet central rectiligne et normal à la paroi, jusqu'à ceux qui sont tangentiels à cette dernière sur les bords de l'orifice. Dans ces conditions, les deux cônes de filets qui forment avec l'axe les angles α et $\alpha + d\alpha$, découpent sur le fond du vase une couronne circulaire a telle que l'on ait la proportion :

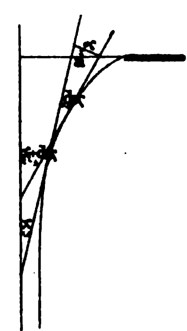


Fig. 23.

$$\frac{a}{\Omega} = \frac{d\alpha}{\frac{\pi}{2}}.$$

D'autre part, la section droite de cette veine annulaire a pour valeur $a \cos \alpha$, c'est-à-dire :

$$\frac{2\Omega}{\pi} \cos \alpha d\alpha.$$

Son débit élémentaire s'obtiendra donc en multipliant par v cette section droite; et la dépense totale, en intégrant cette expression entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$. Il vient ainsi en définitive :

$$Q = \frac{2\Omega v}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi}\Omega v,$$

ce qui donne, pour le coefficient de dépense :

$$m = \frac{2}{\pi} = 0,637$$

valeur peu différente de celle 0,620 qui a été fournie par l'expérience directe. L'erreur relative qui les sépare est seulement :

$$\frac{0,637 - 0,620}{0,620} = 0,0274.$$

M. Boussinesq, en critiquant, avec juste raison, les hypothèses de Navier, a démontré

La formule (18) permet d'établir un principe très important, en ce qui concerne l'aménagement des eaux thermales. Si nous désignons, en effet, par Q le débit de la source à son point d'émergence hors de la roche, $H + \frac{p}{\varpi}$ représentera la charge motrice qui, par un mécanisme intérieur inconnu dans ses détails, agit sur le liquide pour le faire sourdre au dehors. Quant au terme $\frac{p'}{\varpi}$, il comprend, outre la pression atmosphérique, la hauteur d'eau qu'on laisse parfois peser sur le griffon, afin de profiter de la force ascensionnelle de l'eau dans un puits, de manière à établir plus ou moins haut les appareils destinés à l'utiliser. On a donc tout intérêt, au point de vue de l'augmentation du débit, à diminuer, ou même à supprimer au besoin cette colonne liquide, et à capter directement les eaux aussi bas que possible, en perçant une galerie à un niveau inférieur, en disposant un siphon pour franchir un contre-haut [1], ou en employant des machines élévatoires. Ce n'est que dans le cas de surabondance de l'eau, ou de difficultés d'exécution trop grandes, qu'il convient de se départir de ce principe, et de profiter de la

que la vitesse, dans tous les points de l'intérieur du vase, est représentée en grandeur et direction par l'attraction qui serait due à une couche mince de matière occupant la surface de l'orifice, et qui aurait, en chaque point, une densité proportionnelle à la composante normale de la vitesse qui se produit effectivement en cet endroit. Il en déduit, pour le coefficient de dépense de l'orifice circulaire, un développement en série dont le premier terme fournit comme approximation la valeur 0,6566 (Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Recueil des mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, t. XXIII. — De Saint-Venant. Des mouvements que prennent les diverses parties d'une masse liquide dans l'intérieur d'un vase d'où elle s'écoule par un orifice. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XCIX, p. 904, 1004, 1159. — De Saint-Venant et Flamant. Des vitesses que prennent dans l'intérieur d'un vase les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur. *Ibidem*, t. XCVII, p. 1027 et 1105).

On peut encore consulter, pour cette question, le mémoire de Th. D'Estocquois sur le coefficient de contraction de la veine liquide (*Mémoires de la Société d'émulation du Doubs*, 8 mars 1862), ainsi que le travail inséré par M. Collignon dans les *Annales des Ponts et chaussées* de 1885 (p. 295), lequel, bien qu'approximatif, fournit d'ingénieux aperçus sur le régime des dépressions produites par l'écoulement aux environs de l'orifice, et sa relation avec la contraction.

(1) Cet artifice peut être entravé par des dégagements gazeux, provoqués par la dépression qui se produit au sommet du siphon. On y a, dans certains cas, remédié à l'aide de moyens ingénieux (Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 246. — Haton de la Goupillière. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. III, p. 277).

force ascensionnelle des eaux, au détriment de leur débit, pour relever le point d'émergence au point de vue des facilités de l'aménagement, et diminuer la hauteur du fonctionnement des pompes.

§ 2

ORIFICES MUNIS D'APPENDICES

43 — *Orifice parfaitement évasé.* — Si l'on adapte à la paroi plane certains appendices, très courts d'ailleurs (sans quoi l'on rentrerait dans la théorie des longs parcours, et il deviendrait nécessaire de tenir compte des effets du frottement), on influencera de diverses manières l'écoulement, et le résultat le plus immédiat sera de modifier la valeur du coefficient de dépense. Cet élément essentiel peut donc, dans certaines limites, varier au gré du constructeur. Sans posséder la loi complète de ces variations, la théorie peut du moins en déterminer, avec rigueur, les deux limites.

La valeur du maximum s'obtient facilement de la manière suivante. Imaginons qu'après avoir établi un orifice AA′ à travers une paroi mince ABA′B′ (fig. 24), et relevé rigoureusement, jusqu'à la section contractée, le profil de la veine liquide qui s'en échappe, on attribue précisément cette forme à une gaine métallique que l'on adapte à cette ouverture. La veine, qui n'en sera nullement gênée, sortira *à gueule-bée* par filets parallèles à travers le débouché de ce pavillon, que nous continuerons à représenter par Ω. La section effective ω de la veine, animée dans toute son étendue de la vitesse v, ne différant plus dès lors de Ω, il faudra, dans la formule (15), supposer :

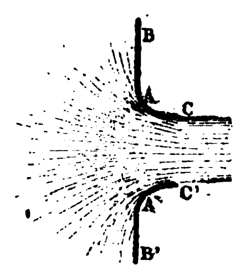


Fig. 24.

$$m = 1.$$

Tel est donc le maximum du coefficient de dépense, correspondant

au minimum de l'effet de contraction à partir du débouché, et au dispositif qui porte le nom d'*orifice parfaitement évasé*. Ajoutons que, dans l'application, cette forme idéale n'est pas rigoureusement indispensable, et que le profil théorique, pourvu qu'il conserve une parfaite continuité, peut être modifié dans une certaine mesure sans que le résultat en soit notablement altéré.

44 — *Ajutage rentrant de Borda* ([1]). — Si le maximum du coefficient de dépense s'obtient à l'aide de la disposition qui est de nature à gêner le moins l'écoulement des filets, en épousant exactement la forme spontanée de la veine libre, le minimum correspondra au cas où l'on arriverait à contrarier, au contraire, aussi complètement que possible leur sortie. Or la cause de la contraction, dans le cas simple de la mince paroi, consiste en ce que le métal, au lieu d'accompagner les trajectoires jusqu'à leur direction finale, comme avec l'orifice parfaitement évasé, s'arrête sur une direction perpendiculaire, en laissant, à partir de là, au liquide le soin de se dévier de lui même, de manière à regagner la direction normale. L'entrave la plus caractérisée que l'on puisse apporter à l'écoulement s'obtiendra donc à l'aide de l'*ajutage rentrant* (fig. 25), qui guide les filets adjacents au métal, non plus jusqu'à la perpendiculaire à la direction finale de l'écoulement, mais dans le sens diamétralement opposé, en les obligeant ainsi à se retourner, par le phénomène de la contraction, non plus seulement d'un, mais de deux angles droits ([2]).

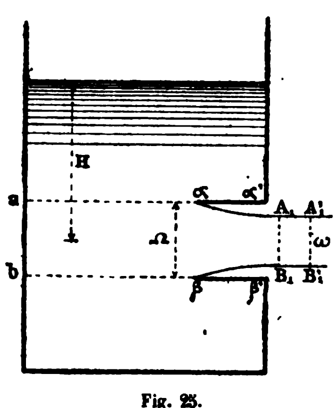


Fig. 25.
Ajutage rentrant de Borda.

Pour déterminer le coefficient de contraction relatif à ce cas spé-

([1]) Borda. *Mémoires de l'Académie des sciences*. 1766.

([2]) Il reste entendu d'ailleurs que la longueur de ce bout de tuyau est assez courte pour que la veine liquide en reste complètement détachée. Si elle arrivait à en baigner les parois, le phénomène serait entièrement modifié, et rentrerait dans les conditions du chapitre V.

cial, nous appliquerons le théorème des projections des quantités de mouvement à l'ensemble du liquide qui se trouve compris entre le plan A_1B_1 de la contraction et une région A_0B_0 suffisamment reculée en amont pour que la vitesse y soit négligeable. Ce système matériel $A_0B_0A_1B_1$ vient, dans un temps infiniment petit dt, en $A'_0B'_0A'_1B'_1$. Dans la différence des sommes de projections de quantités de mouvement, qui constitue le premier membre de l'équation, la partie commune $A'_0B'_0A_1B_1$ disparaît d'elle-même, en raison de la permanence. Il ne reste donc que les deux tranches extrêmes d'amont et d'aval, et, comme la vitesse de la première a été supposée négligeable, ce premier membre se réduit à la quantité de mouvement de la tranche $A_1B_1A'_1B'_1$, laquelle figurera en vraie grandeur, si nous adoptons comme axe de projection celui de l'ajutage. La masse de cette tranche ayant pour valeur $\frac{\varpi\omega v\,dt}{g}$, la quantité de mouvement sera $\frac{\varpi\omega v^2 dt}{g}$. Nous pouvons d'ailleurs invoquer, pour le cas actuel, l'équation de Torricelli (éq. 17), car rien n'est ici changé dans les conditions du raisonnement qui nous a servi à l'établir. Le premier membre de l'équation deviendra ainsi :

$$2\varpi\omega H dt.$$

Quant au second, il comprend la somme des produits par le temps dt des projections des forces *extérieures* seules, à savoir la pesanteur et les pressions qui s'exercent sur toute la périphérie de la masse liquide. La gravité s'annule en projection sur un axe horizontal [1]. En ce qui concerne les pressions, elles disparaissent, pour la même raison, le long des parois $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ de l'ajutage, puisque ces forces, normales au cylindre, sont projetées sur l'axe de ce dernier. Partout ailleurs, nous pouvons admettre, au contact du métal, le régime hydrostatique, en raison de la lenteur des mouvements qui s'y produisent (n° 22) ; hypothèse qui n'eût pas été admis-

[1] Nous adoptons cette disposition, pour plus de simplicité dans le raisonnement. M. Collignon a étendu la démonstration au cas d'une inclinaison quelconque de la paroi (Collignon. *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, t. II, p. 105).

sible dans le cas de l'orifice en mince paroi, car alors l'écoulement se précipite, au contraire, vers les bords de cette ouverture, tandis que l'adjonction de l'ajutage rentrant a pour effet de rejeter cette accélération dans le sein de la masse, vers la région $\alpha\beta$, en laissant toute la paroi verticale au contact d'un liquide presque stagnant.

Or, dans le régime hydrostatique, la pression atmosphérique exercée sur la surface libre s'ajoute linéairement (éq. 1) à celle qui résulte d'une manière immédiate du poids du liquide. On peut donc envisager distinctement ces deux parties. En ce qui concerne la première, elle se développe, d'un côté, directement sur la surface libre $\alpha A_1 \beta B_1$, en second lieu sur la section contractée $A_1 B_1$ (n° 20), et enfin de la part de la surface métallique qui est baignée par l'eau, et qui oppose une réaction égale à l'action imprimée par cette dernière. La pression atmosphérique s'exerce donc sur toute l'étendue de la surface fermée qui comprend la masse liquide. Or nous avons vu (n° 12) que la somme des projections sur un axe des efforts supportés, en raison d'une tension constante, par une surface fermée quelconque, est identiquement nulle. Cette première influence se trouve par suite ici hors de cause, et nous pouvons continuer à raisonner comme si le phénomène se passait dans le vide.

La pression se réduit dès lors à ϖh, sur toute l'étendue de la zone métallique située à la profondeur variable h. Or si l'on mène, parallèlement à l'axe de l'ajutage, un cylindre de section élémentaire quelconque ω, il traversera nécessairement deux fois la paroi, sauf dans le cas où il se trouverait compris à l'intérieur de cet ajutage. Les deux éléments ω' et ω'' ainsi découpés ayant la même projection ω sur un plan perpendiculaire à l'axe, et subissant des pressions égales ϖh, fourniront, dans la somme algébrique des projections, deux termes égaux et de signes contraires (n° 11), qui se détruiront identiquement.

Il ne restera donc en définitive que l'effet des réactions de la calotte courbe ab, qui serait découpée dans la paroi opposée à l'ajutage par le prolongement idéal de ce dernier. Pour chacune de ses zones horizontales de profondeur h et de hauteur dh, le résultat sera (n° 11) égal à la pression que subirait sa projection sur le

plan de section droite. L'effet total est donc finalement (n° 10) le produit de la section Ω de cet orifice par la pression ϖH qui s'exerce en son centre de gravité.

En résumé, l'on voit que le second membre de l'équation se réduit à :

$$\varpi\Omega H dt.$$

Si maintenant nous posons cette égalité, en supprimant dans ses deux membres le facteur commun $\varpi H dt$, elle devient :

$$\Omega = 2\omega,$$

ce qui montre que le coefficient de contraction, avec l'ajutage rentrant de Borda, est exactement égal à $\frac{1}{2}$.

§ 3

GRANDS ORIFICES EN MINCE PAROI

45 — *Orifices quelconques.* — Supposons maintenant que les

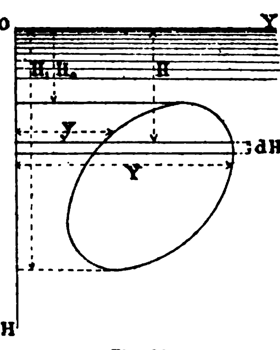


Fig. 26.

dimensions d'un orifice en mince paroi deviennent comparables à la charge. Si nous rapportons son périmètre à deux axes rectan-

gulaires, dont l'un sera fourni par le niveau de l'eau (fig. 26), ce profil devra être défini par deux équations :

$$y = f(\mathrm{H}), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{H}),$$

représentant les branches de courbe qui le constituent à droite et à gauche. Il pourra arriver en particulier, comme cela se présente, par exemple, pour les courbes du second degré, que les fonctions f et F dérivent de la résolution algébrique d'une équation unique; mais cette circonstance reste sans intérêt, et généralement ces expressions devront être considérées comme indépendantes.

Cet ordre de questions se traite au moyen d'une hypothèse, assez plausible, à la vérité, mais dont cependant la valeur doctrinale ne saurait ressortir que de la comparaison effectuée *a posteriori* entre les résultats théoriques et des observations directes. Ce *postulatum* consiste en ce que chaque élément infinitésimal de l'aire de l'orifice débite comme s'il était pratiqué isolément au milieu d'une paroi solide. La méthode consistera dès lors à diviser, par la pensée, cette aire en un réseau d'orifices élémentaires, en appliquant à chacun d'eux les résultats de la théorie précédente, et intégrant ensuite la formule ainsi obtenue.

Nous n'aurons pas besoin, du reste, de pousser la subdivision de la surface jusqu'au second ordre d'infiniment petits. Il suffira, pour pouvoir appliquer le principe, d'envisager des zones infinitésimales formées par des horizontales espacées de la hauteur $d\mathrm{H}$. Chacune d'elles a pour largeur $\mathrm{Y}-y$, et pour surface $(\mathrm{Y}-y)\,d\mathrm{H}$. Si donc μ désigne le coefficient de contraction relatif à cet élément, on aura pour le débit correspondant (éq. 18, p. 49) :

$$d\mathrm{Q} = \mu\left[\mathrm{F}(\mathrm{H}) - f(\mathrm{H})\right]\sqrt{2g\mathrm{H}}\,d\mathrm{H},$$

d'où, en intégrant :

$$\mathrm{Q} = m\sqrt{2g}\int_{\mathrm{H}_0}^{\mathrm{H}_1}\left[\mathrm{F}(\mathrm{H}) - f(\mathrm{H})\right]\sqrt{\mathrm{H}}\,d\mathrm{H}.$$

Pour obtenir cette formule, comme nous ignorons la variation théorique du coefficient μ d'un élément à l'autre, nous concevons une moyenne m telle, qu'en attribuant uniformément à μ cette valeur dans les limites de l'intégration, le résultat ne soit pas changé. Nous sommes dès lors autorisés à faire sortir ce facteur du signe d'intégration. Il est bien vrai que cette moyenne ne nous est pas connue, mais μ ne l'était pas davantage, et nous savons, dès le début de ces recherches, que la détermination du coefficient de dépense dans chaque cas, ne peut être demandée qu'à l'expérimentation directe.

Quant aux limites H_0 et H_1, elles correspondent aux points le plus haut et le plus bas du profil, c'est-à-dire à ceux pour lesquels se rejoignent les deux branches de la courbe. Ces quantités seront donc fournies par les racines de l'équation déterminée :

$$F(H) = f(H).$$

46 — *Vannes.* — Prenons comme exemple les *vannes* de distribution d'eau dans les usines (fig. 72, 73). Elles ont toujours la

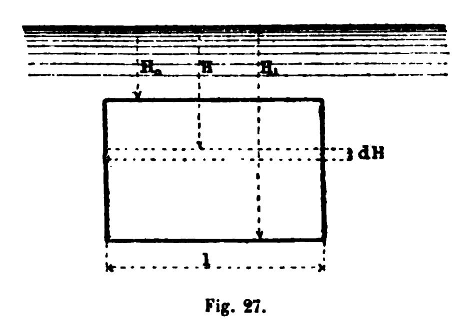


Fig. 27.

forme d'un rectangle dont deux côtés sont horizontaux (fig. 27). La largeur $F(H) - f(H)$ restera, dans ce cas, constante, et nous la désignerons par l. Il viendra ainsi :

$$Q = ml\sqrt{2g}\int_{H_0}^{H_1}\sqrt{H}\,dH,$$

c'est-à-dire :

$$(20) \qquad Q = \frac{2}{3} ml\sqrt{2g}\,(H_1^{\frac{3}{2}} - H_0^{\frac{3}{2}}).$$

La détermination directe du coefficient *m* relatif aux orifices rectangulaires a été effectuée par Poncelet et Lesbros (¹), au moyen de très nombreuses expériences dont nous extrayons, comme exemple, les tableaux suivants. La valeur de ce facteur peut descendre à 0,57 et s'élever à 0,75.

CHARGE SUR LE SOMMET — Mètres	COEFFICIENTS DE DÉPENSE POUR DES ORIFICES RECTANGULAIRES DE $0^m,20$ DE LARGEUR ET DE HAUTEUR *h*					
	$h = 0^m,20$	$h = 0^m,10$	$h = 0^m,05$	$h = 0^m,03$	$h = 0^m,02$	$h = 0^m,01$
0,02	0,572	0,596	0,616	0,639	0,660	0,695
0,03	0,578	0,600	0,620	0,641	0,659	0,689
0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,659	0,684
0,06	0,587	0,607	0,626	0,639	0,657	0,677
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,655	0,667
0,20	0,598	0,615	0,631	0,634	0,649	0,655
0,30	0,600	0,616	0,630	0,632	0,645	0,650
0,40	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,646
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,641
1,00	0,605	0,615	0,625	0,627	0,632	0,629
1,50	0,602	0,611	0,619	0,621	0,620	0,617
2,00	0,601	0,607	0,613	0,615	0,613	0,613
3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,608	0,609

Si, au lieu d'employer une ouverture pratiquée en mince paroi, on arrive à supprimer la contraction sur une partie du périmètre, les résultats se modifient. Le tableau suivant, dont la première colonne reproduit une partie de la quatrième colonne de celui qui précède, permet de se rendre compte de cette influence.

(¹) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, t. XIII.

CHARGE SUR LE SOMMET — Mètres	COEFFICIENTS DE DÉPENSE POUR DES ORIFICES RECTANGULAIRES DE $0^m,20$ DE LARGEUR ET DE $0^m,05$ DE HAUTEUR			
	Complètement isolés des parois latérales et du fond du réservoir	CONTRACTION supprimée sur le côté inférieur	CONTRACTION supprimée sur les deux bords latéraux	CONTRACTION supprimée sur les trois côtés mouillés
0,06	0,626	0,667	0,648	0,699
0,10	0,630	0,669	0,645	0,696
0,20	0,631	0,670	0,642	0,693
0,30	0,630	0,670	0,642	0,691
0,40	0,629	0,669	0,641	0,690
0,60	0,627	0,668	0,639	0,688
1,00	0,625	0,666	0,634	0,685
1,50	0,619	0,665	0,627	0,681
2,00	0,613	0,664	0,621	0,680
3,00	0,606	0,662	0,614	0,678

47 — ***Règle du centre de gravité.*** — La formule (20) permet d'établir cette règle approximative. ***Le débit d'un grand orifice rectangulaire peut*** SENSIBLEMENT ***s'obtenir de la même manière que pour les petits orifices*** (éq. 19), ***en employant la vitesse qui se développe en son centre.*** En effet, l'expression ainsi formée aura pour valeur :

$$Q' = ml(H_1 - H_0)\sqrt{2g\frac{H_1 + H_0}{2}},$$

et le rapport des deux fonctions devient :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_0^{\frac{3}{2}}}{(H_1 - H_0)\sqrt{H_1 + H_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\left(\frac{H_1}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\left(\frac{H_1}{H_0} - 1\right)\sqrt{\frac{H_1}{H_0} + 1}}.$$

Si nous représentons par $2x$ celui de la hauteur $H_1 - H_0$ du

rectangle à la profondeur $\frac{H_1 + H_0}{2}$ de son centre, il viendra :

$$x = \frac{H_1 - H_0}{H_1 + H_0},$$

d'où :

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

On aura donc, en substituant cette valeur et multipliant les deux termes de la fraction par $(1 - x)^{\frac{3}{2}}$:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{(1 + x)^{\frac{3}{2}} - (1 - x)^{\frac{3}{2}}}{3x}.$$

La valeur de x étant inférieure à l'unité, nous pouvons développer ces fonctions par la série du *binôme de Newton*. Les termes de puissances paires disparaîtront dans la soustraction, et les autres se trouveront doublés, en conservant leurs signes propres. Ces signes seront d'ailleurs ceux des coefficients numériques, lesquels renferment les produits :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{3}{2} - 3\right) \ldots\ldots$$

Les facteurs s'y trouvent en nombre impair dans les puissances impaires, les seules qui subsistent. Il s'y introduit donc un nombre impair de facteurs négatifs, car tous le sont à l'exception des deux premiers. Il s'ensuit que tous les termes qui nous restent sont négatifs, sauf le premier. Tous renferment un facteur x, qui disparaît aux deux termes de la fraction. Le premier terme du développement se réduit ainsi à une constante, et, tous les autres étant négatifs, l'expression est visiblement décroissante. On reconnaît par là que, si la profondeur augmente, x diminuant, $\frac{Q}{Q'}$ va en

croissant. La moindre valeur que puisse acquérir ce rapport correspond, par suite, à la charge nulle H_0, hypothèse qui donne dans la formule précédente :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,9428.$$

On voit que ce nombre est déjà très rapproché de l'unité. Mais il faut remarquer en outre que cette valeur est, non seulement la plus défavorable de toutes, mais en outre tout à fait inadmissible, attendu que les vannes ne sont jamais à fleur d'eau; et que, si on les y amenait par la pensée, le régime se modifierait de fond en comble. On passerait alors à un problème différent, celui du *déversoir de superficie* (n° 52). On ne rencontrera sans doute que bien rarement une immersion moindre que celle pour laquelle la charge sur le sommet serait égale à la hauteur du rectangle. Il vient, dans ces conditions, $x = \frac{1}{3}$, et, par conséquent :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{(8 - 2\sqrt{2})\sqrt{3}}{9} = 0,9952.$$

On peut donc affirmer que l'erreur sera, dans la pratique, absolument inappréciable.

48 — Cette proposition peut dès lors s'étendre à un orifice de forme quelconque, *pourvu qu'elle admette un axe de symétrie horizontal*, condition ordinairement remplie dans les applications. *L'on obtiendra le débit d'un pareil orifice en multipliant sa surface par le coefficient de dépense et par la vitesse qui se développe aux divers points de cet axe.*

On peut, en effet, décomposer cette aire en rectangles élémentaires au moyen de perpendiculaires à l'axe de symétrie. Pour chacun d'eux, d'après ce qui précède, le débit élémentaire s'obtiendra, sauf le coefficient de dépense, en multipliant sa surface par la vitesse développée en son centre, laquelle est la même pour tous.

Cette règle si simple nous dispense d'effectuer des intégrations

pour chaque forme géométrique en particulier. La démonstration précédente ne présente, en effet, qu'un seul point faible, en ce que nous avons fait abstraction des variations que peut présenter, d'un rectangle à l'autre, le coefficient de dépense. Mais la méthode générale étant, de son côté, sujette à la même difficulté, que nous avons tournée par la considération d'une moyenne, n'aurait pas plus de valeur, sous ce rapport, au point de vue de la rigueur.

§ 4

GRANDS ORIFICES MUNIS D'APPENDICES

49 — *Canal de fuite.* — Lorsque certains appendices modifient le mouvement de la veine au delà de son passage à travers l'orifice, le débit qui s'y établit ne reste naturellement pas le même, et il y a lieu de passer en revue, à cet égard, les principaux dispositifs que nous présentent les usines hydrauliques.

On appelle *canal de fuite* un coursier plan et horizontal, sauf une légère pente qui est destinée à y entretenir une vitesse uniforme, et dont la détermination appartiendra à la théorie des canaux (chap. VI). Ce bief se raccorde avec le côté inférieur d'un orifice rectangulaire, dont le bord supérieur est réglé par une *vanne de fond*, que nous supposerons, pour fixer les idées, parfaitement évasée (fig. 28). Le régime des pressions est alors celui de l'hydrostatique pour la section M qui succède à l'orifice, puisque le mouvement reste uniforme dans cette partie (n° 21). On peut l'admettre également à l'égard d'une région M_0, suffisamment reculée à l'intérieur

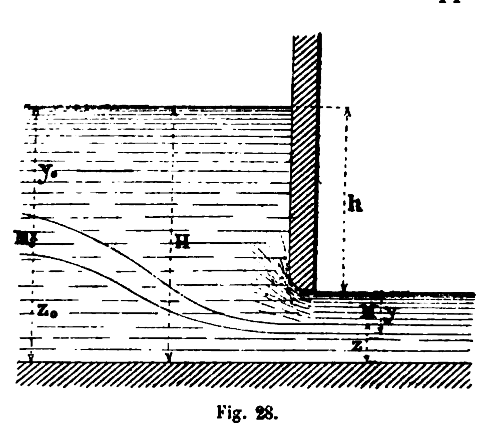


Fig. 28.

du *bief de retenue* pour que les vitesses y soient négligeables (n° 22). Si, au contraire, il règne dans le *canal d'amenée* une vitesse d'écoulement v_0, celui-ci sera généralement prismatique, avec une pente capable d'entretenir cette vitesse constante v_0. On pourra donc, dans ce cas, invoquer, en amont, le même argument qu'en aval.

En nous plaçant, pour plus de généralité, dans ce dernier cas, nous déduirons de l'équation de Bernoulli (éq. 7), si p_a désigne la pression atmosphérique :

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_a + \varpi y}{\varpi} + z = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a + \varpi y_0}{\varpi} + z_0.$$

Si donc on représente par h la charge sur le bord supérieur de l'orifice, qui est parfois appelé *tête d'eau*, l'on pourra écrire simplement :

$$(21) \qquad v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Cette relation est bien propre à montrer à quel point une modification des abords de l'orifice, simple en apparence, peut troubler profondément les conditions de l'écoulement. Nous voyons, en effet, que la vitesse est devenue constante et indépendante de la profondeur du filet élémentaire considéré. Dans l'écoulement libre à travers les grands orifices, au contraire, nous avons admis (n° 45) qu'elle était proportionnelle à la racine carrée de cette charge. Inversement, la pression qui était, pour la veine libre, constante et égale à celle de l'atmosphère (n° 40), se trouve maintenant soumise au régime hydrostatique, et croît en raison de la profondeur au-dessous du plan d'eau inférieur ([1]). En définitive, parmi ces deux éléments, celui qui était constant est devenu variable, et réciproquement.

([1]) Ce principe a été ingénieusement utilisé en 1828 par Sartoris, en vue de maintenir le niveau d'un cours d'eau à une hauteur sensiblement constante malgré les crues. Le *bateau-vanne* employé à cet effet (fig. 29) est pris entre deux bajoyers verticaux, dont l'un se trouve représenté en élévation suivant ABCD. Le flotteur, figuré en coupe en EFGH, est installé en travers du courant, et maintenu par deux saillies des bajoyers dont l'une se voit en IJBD. Le coursier GJKDL présente une saillie JK, sur le seuil de laquelle

50 — Puisque tous les points de la section sont animés de la même vitesse, nous nous trouvons rigoureusement dans les condi-

le liquide s'écoule en lame, à travers le débouché HK qui règne au-dessous de la quille. L'eau se trouve ainsi tendue à un certain niveau MN. Dans ces conditions, les choses se passent de la manière suivante.

Suivant la section HK de ce bief de fuite, les pressions se distribuent d'après le régime hydrostatique, et, en H, s'exerce directement la pression atmosphérique. De plus, la vitesse est constante dans toute l'étendue de cette section, et due à la hauteur NG. Mais, en amont de cet étranglement, en OP, la vitesse moyenne reste nécessairement moindre, d'après l'équation de continuité, et réduite dans le rapport de HK à OP. La

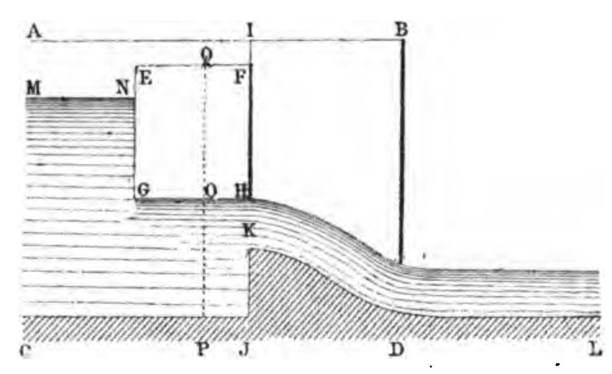


Fig. 29. — Bateau-vanne.

pression sera donc supérieure, en raison du théorème de Bernoulli (éq. 7). On obtient ainsi, sous la quille, une pression supérieure à la pression atmosphérique, c'est-à-dire à celle qui s'exerce sur le bateau. En un mot, celui-ci subit une *sous-pression résultante*. On peut, par suite, demander à cette force d'équilibrer le poids du flotteur, avec le concours du frottement développé contre la paroi IK. Telle est l'explication de sa suspension malgré la pesanteur; et l'on ne saurait l'emprunter, comme à l'ordinaire, au principe d'Archimède, dont la démonstration suppose l'existence d'une ceinture liquide continue sur la totalité du pourtour des sections horizontales.

Il faut, à la vérité, pour que cet équilibre puisse avoir lieu, attribuer au poids la valeur précisément nécessaire; mais il est facile de la régler en vue de ce résultat. On dispose, à cet effet, deux systèmes de robinets sur les faces EG et FH. Si le flotteur est trop léger, on admet à l'intérieur une certaine quantité d'eau à l'aide des premiers. S'il devient trop lourd, on en évacue au moyen des seconds. Ce poids une fois réglé, si le niveau MN vient à s'élever spontanément, par suite d'une crue du cours d'eau, la vitesse s'accroît avec la charge NG, et, avec elle, la sous-pression qui en est fonction. Le poids du bateau n'ayant pas changé, celui-ci s'élève et accroît d'autant le débouché, ce qui facilite le dégorgement du bief et l'abaissement du niveau. L'inverse se produira si le bief tend à baisser de lui-même. On trouve donc, dans ce dispositif, un mode de réglage automatique du plan d'eau.

On peut d'ailleurs déterminer volontairement, à un moment donné, des élévations ou abaissements arbitraires, en faisant jouer, dans le sens et la mesure convenables, l'un ou l'autre des systèmes de robinets, de manière à modifier le poids du bateau-vanne.

tions du parallélisme des tranches (n° 18), et nous pouvons appliquer directement à cette veine l'équation de continuité. Sa hauteur étant $H - h$ et sa largeur l, nous obtenons ainsi l'expression du débit :

$$(22) \qquad Q = ml(H - h)\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Poncelet et Lesbros, dans le travail déjà cité (n° 46), ont étudié la variation du coefficient de dépense m qui doit être employé pour l'application de cette formule. Nous dresserons, à l'aide des résultats obtenus par ces expérimentateurs, le tableau suivant :

CHARGE SUR LE SOMMET — Mètres	COEFFICIENTS DE DÉPENSE POUR DES ORIFICES RECTANGULAIRES DE 0,m20 DE LARGEUR ET DE 0,m05 DE HAUTEUR PROLONGÉS EN DEHORS PAR UN CANAL RECTANGULAIRE HORIZONTAL ET DÉCOUVERT DE MÊME LARGEUR QUE L'ORIFICE :			
	Complètement isolés des parois latérales et du fond du réservoir	CONTRACTION supprimée sur le côté inférieur	CONTRACTION supprimée sur les deux bords latéraux	CONTRACTION supprimée sur les trois côtés mouillés
0,06	0,594	0,583	0,611	0,595
0,10	0,624	0,605	0,628	0,621
0,20	0,631	0,617	0,637	0,637
0,30	0,629	0,622	0,636	0,643
0,40	0,626	0,625	0,635	0,646
0,60	0,625	0,627	0,635	0,648
1,00	0,624	0,628	0,635	0,649
1,50	0,619	0,627	0,634	0,647
2,00	0,613	0,623	0,634	0,644
3,00	0,606	0,618	0,632	0,639

51 — *Orifice noyé.* — Si un orifice rectangulaire débouche dans le sein d'une masse d'eau stagnante (fig. 30), la veine s'y fraye un passage, en déterminant, par le frôlement qu'elle exerce sur les parties adjacentes, un entraînement nécessairement comblé par le retour en arrière d'un volume équivalent. De là, un régime

tournoyant et relativement lent, qui porte le nom de *remous* [1]. On peut encore, dans le cas actuel, admettre, pour les pressions, le régime hydrostatique, mais d'après des motifs distincts dans les diverses portions de la masse liquide : pour la partie animée d'un mouvement rectiligne et uniforme, en vertu du théorème 21 ; et, dans les remous, en raison de leur lenteur (n° 22). Dès lors, tous les raisonnements qui ont été employés pour établir la théorie du canal de fuite, subsistent dans le cas actuel, et nous fournissent encore la formule (21) :

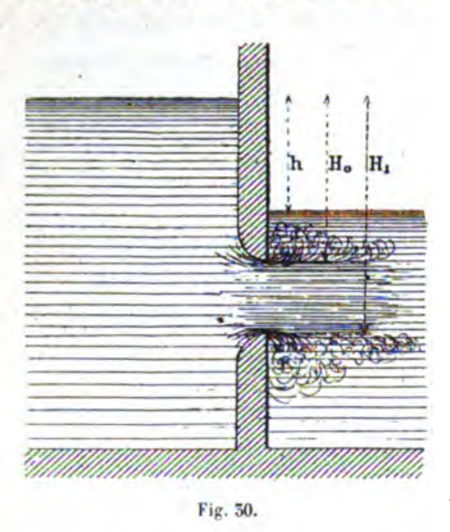


Fig. 30.

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Quant à la dépense, elle s'effectue maintenant sur une hauteur $H_1 - H_0$ indépendante de h, et la relation (22) se trouve remplacée par la suivante :

$$Q = ml(H_1 - H_0)\sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

dont la précédente (22) devient un cas particulier, pour $H_0 = h$.

52 — *Déversoir de superficie.* — Lorsque l'on *tend les eaux* derrière un barrage (fig. 51), elles s'échappent en cascade par-des-

[1] Ce phénomène est d'une importance capitale, et nous le rencontrerons dans un grand nombre de circonstances diverses (Léonard de Vinci. *Del moto e misura dell' acqua*, fig. 71. — Newton. *Principes*, livre II, sect. 9. — Poncelet. *Introduction à la mécanique industrielle*, 1841, p. 527. — De Caligny. Expériences sur les tourbillons, etc. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1850. — De Caligny. Expériences sur les tourbillons et les ondes résultant d'un barrage noyé. *Journal de l'Institut*, t. XIII, p. 403 ; t. XIV, p. 287. — Vauthier. *Annales des Ponts et chaussées*, 1850).

sus le seuil [1]. L'écoulement sur cette partie plane donnant lieu aux mêmes considérations que dans les deux cas précédents, on aura encore pour la vitesse qui s'y développe (éq. 21) :

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

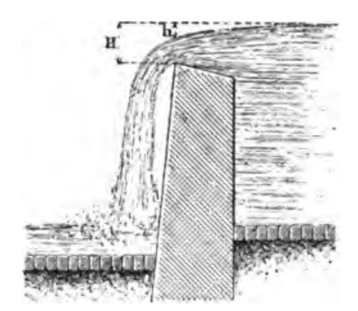


Fig. 31.
Déversoir de superficie.

Dans cette formule, h désigne la dénivellation qui prend naissance sur le seuil entre ce point et les régions éloignées en amont, afin de créer la charge nécessaire à la production de l'écoulement, en raison du théorème de Bernoulli (éq. 8). Si H désigne en même temps la hauteur, au-dessus du seuil, de ce plan d'eau, asymptotique en théorie, mais avec lequel la surface libre se confond sensiblement à peu de distance, l'épaisseur de la *lame d'eau* sera $H - h$, et le *débit* Q_1 par unité de largeur, en faisant abstraction des effets de contraction latérale, aura pour valeur :

$$Q_1 = (H - h)\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Ces deux équations constituent des propriétés rigoureuses du mode d'écoulement qui nous occupe. Mais elles ne peuvent, dans leur état actuel, nous être d'aucun secours pour des applications effectives, puisque h reste une fonction inconnue de H. Jusqu'ici, il a été impossible d'en donner une détermination purement rationnelle.

J'indiquerai cependant la manière dont on a basé cette recherche sur un aperçu intuitif et détourné. On a admis gratuitement que la dénivellation devait se régler spontanément, de manière à correspondre au maximum d'écoulement. La formule à laquelle on se trouve ainsi conduit a été, en effet, vérifiée par l'expérience.

[1] M. P. Parize a observé de curieux effets de la part de l'air interposé entre la lame liquide et le déversoir (*Journal de physique*, février 1885).

Mais comme un pareil *postulatum* est par trop éloigné des conditions de l'évidence, on pourrait, inversement, accepter comme un résultat empirique, déduit directement de l'observation, la formule en question, et en conclure après coup, comme une propriété de ce mode d'écoulement rigoureusement établie par l'analyse, qu'il correspond au maximum de débit.

Quoi qu'il en soit à cet égard, si nous mettons sous la forme suivante l'expression de la dépense par unité de largeur :

$$Q_1 = \sqrt{2g}\,(H - h)\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}},$$

la fonction à rendre maximum devient le produit des puissances, d'exposant 1 et $\frac{1}{2}$, de deux facteurs $H - h$ et $h + \frac{v_0^2}{2g}$, dont la somme est indépendante de h. Nous devons donc poser à cet égard :

$$\frac{H - h}{1} = \frac{h + \frac{v_0^2}{2g}}{\frac{1}{2}}.$$

On déduit de là :

$$h = \frac{1}{3}\left(H - \frac{v_0^2}{g}\right).$$

Nous aurons, par suite, pour les valeurs correspondantes des deux facteurs en question :

$$H - h = \frac{2}{3}\left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right),$$

$$h + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{3}\left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right),$$

et, par conséquent ([1]) :

([1]) M. Neville, dans son *Traité d'hydraulique*, a donné une formule différente (J. M. Rankine. *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs*, traduit et annoté par M. Gustave Richard, p. 99).

$$(23) \qquad Q_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sqrt{g}\left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans le cas où il n'y a pas de vitesse v_0 dans le bief de retenue, il vient simplement :

$$Q_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} H\sqrt{2gH} = 0{,}385\, H\sqrt{2gH}.$$

Les expériences de Castel et Lesbros ([1]) ont mis en évidence, à cet égard, une certaine variation du coefficient de dépense, et indiqué la valeur moyenne 0,350.

Si le déversoir est en mince paroi, au lieu de présenter un seuil plan d'une étendue suffisante, la théorie précédente cesse d'être applicable. Le coefficient de dépense continue à présenter une certaine variabilité, et paraît, d'après les expériences de Poncelet et Lesbros, croître en sens contraire de la charge, depuis la valeur 0,385 jusqu'à 0,424. On comprend *a priori* qu'il soit alors plus grand que dans le cas précédent, puisque la charge doit se compter, pour l'orifice en mince paroi, sur le centre de la section (n° 47), et non plus sur son sommet, comme avec le canal de fuite (n° 49).

§ 5

ÉCOULEMENT VARIABLE

52 — Toutes les recherches qui nous ont occupés jusqu'à présent se rapportent au mouvement permanent. J'indiquerai ici la manière

([1]) *Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement*, 1832. — Bidone. *Expériences sur la dépense des déversoirs*, Turin, 1824. — Castel. Expériences sur les déversoirs (*Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse*, t. IV, 1837). — Clarinval. Note sur la dépense des déversoirs (*Annales des mines*, 5e série, t. XII, p. 517 et 841 ; t. XIV, p. 277). — Daubuisson traite, avec beaucoup de développements, cette importante question (*Hydraulique*, p. 76).

dont on peut étudier l'écoulement variable [1]. Nous nous fonderons, pour cela, sur un *postulatum* analogue à celui qui nous a permis (n° 45) de passer de la théorie des petits orifices à celle des grandes sections; hypothèse plausible *a priori*, pourvu que les variations ne soient pas trop brusques, mais dont la véritable valeur ne peut toutefois s'apprécier que par la comparaison des résultats avec l'observation directe [2]. On admet que les choses se passent dans le mouvement instantané, précisément suivant les lois qui présideraient au mouvement permanent correspondant aux conditions actuelles, si elles persistaient d'une manière constante, avant et après.

Si, par exemple, on demande la loi suivant laquelle une masse limitée de liquide, renfermée dans une capacité de forme quelconque, s'écoule à travers un orifice Ω pratiqué à travers le fond horizontal de ce vase, on admettra que la vitesse dans la section contractée est, à chaque instant, fournie par la formule de Torricelli (17) :

$$v = \sqrt{2gz},$$

en désignant par z la hauteur variable de la surface libre au-dessus du plan de la contraction.

Dans ces conditions, le débit élémentaire pendant un intervalle de temps dt aura pour valeur $m\Omega\sqrt{2gz}dt$. On peut, d'autre part, l'exprimer au moyen du produit de l'aire A de la surface libre actuelle, par la hauteur $-dz$ dont s'abaisse ce niveau, pour subvenir à la déperdition qui s'effectue à la partie inférieure. Nous pouvons donc poser l'équation différentielle :

$$-\,\mathrm{A}dz = m\Omega\sqrt{2gz}dt,$$

ou, en séparant les variables :

[1] Daniel Bernoulli. *Hydrodynamique*, 8e section. — Bossut. *Hydrodynamique*, chap. VII. — Daubuisson. *Hydraulique*, p. 116. — Résal. *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 284.

[2] Voy. page 79, note 1.

$$dt = -\frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\frac{A}{\sqrt{z}}dz,$$

et, en intégrant :

$$t = -\frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_{H}^{z}\frac{A}{\sqrt{z}}dz,$$

si H désigne la hauteur initiale du liquide à l'origine du temps. Quant à A, il représente une fonction de z, qui devra être connue d'après la définition de la forme du vase. On peut d'ailleurs, en intervertissant les limites de l'intégrale définie, faire disparaître le signe négatif, qui ne saurait être ici qu'une apparence, ce qui donne :

$$(24) \qquad t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_{z}^{H}\frac{A}{\sqrt{z}}dz = \frac{0,363}{\Omega}\int_{z}^{H}\frac{A}{\sqrt{z}}dz.$$

54 — Supposons par exemple un vase cylindrique. La section A devenant alors une constante, il vient simplement :

$$t = \frac{A}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_{z}^{H}\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

c'est-à-dire :

$$t = \frac{A}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{z}\right).$$

On en déduit, en multipliant par $\sqrt{2g}$:

$$\sqrt{2gz} = \sqrt{2gH} - \frac{m\Omega}{A}gt.$$

Cette équation montre que la vitesse d'écoulement diminue proportionnellement au temps. Cette loi de décroissance est à celle du mouvement ascendant des corps pesants dans le rapport des sections respectives de la contraction et du récipient.

Le temps T de la vidange complète s'obtiendra en faisant $z=0$. Il vient ainsi :

$$(25) \qquad T = \frac{A}{m\Omega}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 0{,}727\,\frac{A\sqrt{H}}{\Omega}.$$

On peut comparer cette durée à celle T' qui serait nécessaire pour faire passer à travers l'orifice un égal volume d'eau, en maintenant constante la charge H. Posons à cet effet (éq. 19) :

$$AH = m\Omega\sqrt{2gH}.T',$$

$$(26) \qquad T' = \frac{A}{m\Omega}\sqrt{\frac{H}{2g}} = 0{,}363\,\frac{A\sqrt{H}}{\Omega}.$$

De là ce résultat, vérifié par Mariotte [1] :

$$T = 2T'.$$

L'écoulement abandonné à lui-même procède deux fois plus lentement, pour vider un vase prismatique, que si l'on maintient constante la charge sur l'orifice.

55 — Comme exemple d'application à des sections variables, je considérerai un ellipsoïde rapporté à son sommet inférieur [2] :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\frac{z}{c} = 0.$$

Si α et β désignent les demi-axes de l'ellipse déterminée par un plan horizontal, il viendra pour l'aire de la surface libre :

$$A = \pi\alpha\beta.$$

(1) Brisse et André. *Cours de physique*, p. 301.
(2) Le cas de la sphère s'y trouve compris pour l'hypothèse $a = b = c = R$.

On aura, pour les déterminer, à supposer successivement :

$$y = 0, \qquad \alpha = \frac{a}{c}\sqrt{2cz - z^2};$$

$$x = 0, \qquad \beta = \frac{b}{c}\sqrt{2cz - z^2}.$$

Il vient, par suite :

$$A = \frac{\pi ab}{c^2}(2cz - z^2).$$

Le temps de la vidange complète d'une cuvette ellipsoïdale de hauteur H aura donc pour expression :

$$T = \frac{\pi ab}{m\Omega c^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{2cz - z^2}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{2\pi ab H^{\frac{3}{2}}(10c - 3H)}{15m\Omega c^2\sqrt{2g}}.$$

Pour la vidange du demi-ellipsoïde inférieur, on obtient, en faisant $H = c$:

$$T' = \frac{14\pi ab\sqrt{c}}{15m\Omega\sqrt{2g}} = 1{,}068\,\frac{ab\sqrt{c}}{\Omega},$$

et avec l'ellipsoïde entier, pour $H = 2c$:

$$T'' = \frac{16\pi ab\sqrt{c}}{15m\Omega\sqrt{g}} = 1{,}726\,\frac{ab\sqrt{c}}{\Omega}.$$

Le rapport de ces durées a pour valeur :

$$\frac{T''}{T'} = \frac{8\sqrt{2}}{7} = 1{,}616;$$

mais il ne faut pas perdre de vue que la plus longue des deux sert à évacuer un volume double.

56 — Si le récipient présente la forme d'une surface de révolution, engendrée autour d'un axe vertical par une méridienne quelconque :

$$x = f(z),$$

on a, pour le temps de sa vidange :

$$T = \frac{\pi}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{z}} dz = \frac{1,144}{\Omega} \int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{z}} dz.$$

Pour apprécier l'influence des variations du profil sur la durée de l'écoulement, il convient d'effectuer la comparaison à égalité de volume. Nous envisagerons donc le rapport du temps T au volume V :

$$\frac{T}{V} = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \frac{\int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{z}} dz}{\int_0^H x^2 dz} = \frac{0,363}{\Omega} \frac{\int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{z}} dz}{\int_0^H x^2 dz}.$$

Prenons comme exemple la courbe méridienne qui a pour équation :

$$x = Cz^n,$$

quel que soit l'exposant n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Il vient alors :

$$\int_0^H x^2 dz = \frac{C^2 H^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{z}} dz = \frac{C^2 H^{2n+\frac{1}{2}}}{2n+\frac{1}{2}},$$

et, par suite :

$$\frac{T}{V} = \frac{4n+2}{4n+1} \frac{1}{m\Omega\sqrt{2gH}} = \frac{0,363}{\Omega\sqrt{H}} \frac{4n+2}{4n+1}.$$

On aura, par exemple, pour le cône :

$$n = 1, \qquad \frac{T_1}{V_1} = \frac{6}{5m\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\Omega\sqrt{H}} = \frac{0,457}{\Omega\sqrt{H}};$$

pour le paraboloïde de révolution :

$$n = \frac{1}{2}, \qquad \frac{T_2}{V_2} = \frac{4}{3m\sqrt{2g}} \frac{1}{\Omega\sqrt{H}} = \frac{0,485}{\Omega\sqrt{H}};$$

pour le récipient qui serait engendré par la révolution d'une parabole autour de la tangente de son sommet :

$$n = 2, \qquad \frac{T_3}{V_3} = \frac{10}{9m\sqrt{2g}} \frac{1}{\Omega\sqrt{H}} = \frac{0,404}{\Omega\sqrt{H}}.$$

On retrouve enfin comme vérification, pour l'hypothèse :

$$n = 0, \qquad \frac{T_4}{V_4} = \frac{\sqrt{2}}{m\sqrt{g}} \frac{1}{\Omega\sqrt{H}} = \frac{0,727}{\Omega\sqrt{H}},$$

résultat déjà obtenu (éq. 25) pour le vase prismatique.

Si l'on évalue les rapports à ce dernier nombre des valeurs relatives au paraboloïde, au cône, et au vase effilé en forme de rebroussement parabolique, on obtient les différents termes de cette gradation numérique :

1,000 0,667 0,601 0,555

qui met en évidence l'influence exercée sur l'écoulement, à contenance égale, par la forme plus ou moins rétrécie du récipient à sa partie inférieure.

57 — La formule fondamentale (24) a été utilisée pour l'établissement de projets importants. Il s'agissait de mettre à sec, au

moyen de galeries d'écoulement aboutissant dans des vallées voisines à un niveau inférieur, des masses d'eau considérables, telles que le lac Lungern dans l'Underwald et le lac Fucino dans les Abruzzes.

Afin de résoudre une pareille question, on commence par effectuer, au moyen de sondages, un relevé détaillé du fond de la cuvette, de manière à en figurer les courbes de niveau équidistantes. Pour connaître l'aire A de chacune d'elles, on peut se servir mécaniquement du planimètre d'Amsler ; ou bien on mesure, par rapport à un axe quelconque, ses ordonnées équidistantes, dont on substitue les valeurs dans la formule approximative de quadratures de Simpson. Ces valeurs de A, substituées à leur tour dans la fonction $\frac{A}{\sqrt{z}}$, fournissent alors les valeurs équidistantes de la fonction à intégrer (24), et une nouvelle application de la formule de Simpson fait connaître le résultat cherché.

58 — Toutefois il arrivera ordinairement qu'une circonstance, impossible à négliger, viendra compliquer la solution ([1]). En effet, un bassin naturel sert ordinairement de lieu de concentration pour les eaux d'une certaine étendue topographique. On doit donc le considérer comme recevant, sans interruption, un certain débit q par unité de temps, dans lequel on aura d'ailleurs tenu compte de l'influence inverse de l'évaporation. Dès lors, le volume élémentaire $-Adz$ qui disparaît pendant le temps dt, devient la différence entre la quantité d'eau évacuée par l'orifice, à savoir : $m\Omega\sqrt{2gz}\,dt$, et l'apport qdt qui n'a pas cessé d'affluer durant cet intervalle. L'équation différentielle du phénomène devient, dans ces conditions :

$$-Adz = m\Omega\sqrt{2gz}dt - qdt,$$

et il restera à l'intégrer, lorsque l'on sera suffisamment renseigné sur les quantités A et q.

Pour achever la solution sur un exemple, nous supposerons con-

([1]) Daubuisson. *Traité d'hydraulique*, p. 106.

stants ces deux éléments [1]. L'équation devient alors, en séparant les variables :

$$\frac{dt}{A} = \frac{dz}{q - m\Omega\sqrt{2gz}}.$$

Prenons comme variable auxiliaire :

$$q - m\Omega\sqrt{2gz} = x.$$

Nous en déduirons par la différentiation :

$$dz = -\frac{dx}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{z} = \frac{x-q}{m^2\Omega^2 g}\,dx,$$

et l'équation se transformera de la manière suivante :

$$\frac{m^2\Omega^2 g}{A}\,dt = \left(1 - \frac{q}{x}\right)dx.$$

On obtient alors, en intégrant avec des logarithmes népériens à partir de $t = 0$:

$$\frac{m^2\Omega^2 g}{A}\,t = x - x_0 + q \operatorname{Log}\frac{x_0}{x}.$$

Comme on a d'ailleurs, pour $t = 0$:

$$x_0 = q - m\Omega\sqrt{2gH},$$

(1) A la vérité, l'hypothèse de l'invariabilité de A s'éloigne extrêmement de la réalité. On obtiendrait une idée plus juste du résultat, si l'on traitait l'hypothèse d'un fond de cuvette en forme de demi-ellipsoïde, ou de quart d'ellipsoïde, qui se rapproche beaucoup mieux du type des bassins naturels, ou des étangs que l'on réalise en barrant une vallée au moyen d'une digue transversale. L'intégration peut encore s'achever en suivant la même marche, mais la complication des calculs m'empêche de les reproduire ici.

M. le commandant du génie Poulain a également intégré, à l'aide des fonctions elliptiques, l'équation de l'écoulement par un grand orifice rectangulaire, en supposant que la charge subisse l'influence de la loi des marées (*Mémoires de la Société d'émulation du Doubs*, 17 décembre 1873).

il vient définitivement :

$$\frac{m^2\Omega^2 g}{A} t = m\Omega(\sqrt{2gH} - \sqrt{2gz}) + q \operatorname{Log}\left(\frac{m\Omega\sqrt{2gH} - q}{m\Omega\sqrt{2gz} - q}\right).$$

59 — Traitons, comme dernière application de cet ordre d'idées, le problème de la décharge d'un bief d'écluse dans le bief adjacent, à travers un orifice noyé. D'après la formule qui a été donnée pour ce genre d'écoulement (n° 51), la vitesse sera, en tous les points de la section contractée $m\Omega$, constante et égale à :

$$v = \sqrt{2gh},$$

si h désigne la dénivellation des deux biefs à chaque instant. Le volume infiniment petit qui passe pendant le temps dt aura donc pour valeur $m\Omega dt \sqrt{2gh}$. D'autre part, si l'on appelle A et A' les surfaces de ces biefs prismatiques, z et $z + h$ les hauteurs d'eau qu'ils renferment, les variations de volume à la surface seront Adz et $-A'd(z+h)$. Comme elles doivent être égales l'une à l'autre, ainsi qu'au volume précédent, nous poserons les égalités :

$$dz = + \frac{m\Omega}{A} \sqrt{2gh}\, dt,$$

$$dz + dh = - \frac{m\Omega}{A'} \sqrt{2gh}\, dt,$$

d'où l'on tire, en retranchant :

$$dh = - m\Omega \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A'}\right) \sqrt{2gh}\, dt,$$

et, en séparant les variables :

$$dt = - \frac{AA'}{m\Omega(A + A')\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Il vient, par suite, en intégrant :

$$t = \frac{AA'}{m\Omega(A + A')} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}),$$

si l'on désigne par H la différence initiale de niveau des deux biefs [1].

On aura, en particulier, pour la durée de la décharge complète, en faisant $h = 0$:

$$T_1 = \frac{AA'}{m\Omega(A + A')} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Dans le cas spécial de l'égalité des deux biefs, il vient, en posant $A = A'$:

$$T_1' = \frac{A}{m\Omega} \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

[1] On peut juger du degré remarquable d'exactitude de cette théorie, et, par suite, du postulatum qui lui sert de base (n° 53), d'après les résultats d'une expérience exécutée sur le canal de Bromberg, et rapportée par Eytelwein et par Daubuisson (*Hydraulique*, p. 115). Les nombres de secondes nécessaires pour élever, sept fois de suite, d'une même épaisseur, le niveau de l'un des sas, ont fourni, entre le calcul et l'observation directe, la comparaison suivante :

CALCUL	EXPÉRIENCE
93	90
102	102
112	114
128	128
151	149
197	197
476	454

La concordance est frappante pour les six premiers intervalles. Quant à l'écart que présente le dernier, il est loin de rien prouver contre la théorie, car il est très difficile d'apprécier l'instant précis pour lequel le mouvement se termine, en s'atténuant par degrés infiniment petits. Il convient donc de mettre à part cet intervalle final. Le total des six premiers nombres donne alors, de part et d'autre, 783 et 780, d'où une différence de 3 secondes sur l'ensemble de cette durée, qui constitue en même temps le plus grand écart pour les périodes intermédiaires. Il s'ensuit une erreur relative de 0,00385 seulement. Il est toutefois nécessaire d'ajouter que nous avons choisi, pour faire cette preuve, un exemple particulièrement concluant, et que beaucoup d'autres expériences présentent un accord moins favorable.

Si l'on rapproche cette valeur de celles qui ont été trouvées (éq. 25 et 26) pour le cas où l'écoulement a lieu dans l'air, et non plus sous l'eau, on voit que :

$$T_1' = T = 2T'.$$

Il faut donc, pour évacuer la moitié du bief supérieur dans le bief inférieur, sous la charge continuellement croissante de celui-ci, la même durée que pour vider complètement ce bief sans charge extérieure. Il faut, de même, deux fois plus de temps que pour écouler, sous une charge constante, un volume égal à celui du bief; et, par suite, quatre fois plus de temps que pour évacuer, dans ces conditions, une quantité d'eau égale à celle qui est effectivement sortie, et qui n'est que la moitié du volume du bief.

CHAPITRE IV

CHANGEMENTS BRUSQUES

—

§ 1

THÉORÈME DE BÉLANGER

60 — Lorsque les parois qui encaissent une veine liquide subissent un changement brusque de section (fig. 32), les filets ne pouvant côtoyer un contour anguleux (n° 39), laissent nécessairement, entre cette partie de l'enveloppe et la surface progressivement renflée du courant, un espace qui ne participe pas à l'entraînement général. Cependant cette masse ne saurait rester immobile, sous l'influence du frottement qu'elle subit de la part de la veine en mouvement à son intérieur. Elle cède donc à cette action; mais le vide ainsi produit se comble nécessairement par un retour en arrière, en produisant les effets tournoyants, ou remous, dont nous avons déjà parlé (n° 51). Ce phénomène, en apparence

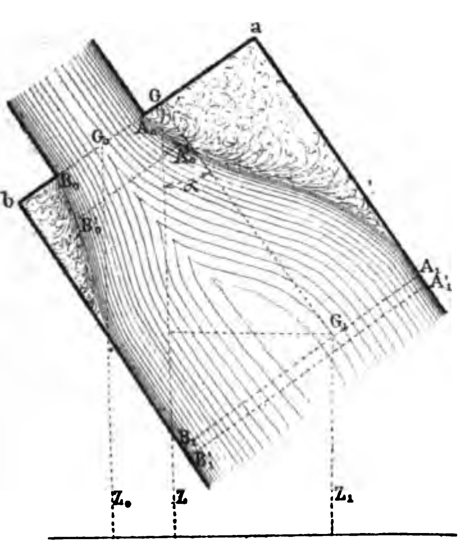


Fig. 32.

presque insignifiant, présente au contraire une importance capitale, car il constitue une cause très efficace de déperdition de la force vive, en raison du travail des forces intérieures de viscosité ainsi mises en jeu. Bélanger a réussi, par une voie très élégante, à évaluer cette perte, au moyen du théorème de la projection des quantités de mouvement.

Ce théorème s'indique en effet très naturellement pour l'étude du mouvement dans les conditions actuelles, puisqu'il fournit une relation indépendante des forces intérieures, lesquelles constituent précisément la difficulté, tant à cause de leur complication que par suite de l'obscurité qui règne sur leur nature. Nous appliquerons cette équation pendant un temps élémentaire dt, en projection sur la direction aA_1 de la partie rectiligne, et en embrassant par la pensée toute la masse liquide qui se trouve comprise entre le plan ab du changement brusque, et une section A_1B_1 menée dans la région où s'est rétabli le régime par filets parallèles. Ce système matériel comprend par conséquent les remous, aussi bien que la portion $A_0B_0A_1B_1$ qui participe à l'écoulement proprement dit.

Au bout du temps dt, les remous nous présentent un ensemble identique à ce qu'il était pour l'instant initial, en raison de la permanence. Ils disparaissent donc identiquement du premier membre de l'équation, où figure l'accroissement de la quantité de mouvement projetée. La seconde partie $A_0B_0A_1B_1$ se retrouve, à la fin de cette durée élémentaire, en $A'_0B'_0A'_1B'_1$. Nous rencontrons encore, en $A'_0B'_0A_1B_1$, un volume commun qui disparaît algébriquement. Il ne reste, en définitive, pour constituer le premier membre, que la différence des quantités de mouvement des deux tranches extrêmes d'aval et d'amont $A_1B_1A'_1B'_1$ et $A_0B_0A'_0B'_0$. Comme elles ont d'ailleurs la même masse, cette différence sera égale au produit de cette masse commune $\frac{\varpi\Omega_1 v_1 dt}{g}$ par la différence $v_1 - v_0$ des vitesses. On obtient ainsi, pour le premier membre de l'équation des quantités de mouvement :

$$\frac{\varpi\Omega_1 v_1 dt\,(v_1 - v_0)}{g}.$$

Dans le second, nous devons placer le produit par dt de la somme des projections des forces extérieures, à savoir : les réactions des parois et le poids du liquide. En ce qui concerne les premières, nous n'avons à envisager que les sections planes ab et A_1B_1, attendu que la surface latérale ne donne lieu qu'à des forces normales à l'axe, qui disparaissent en projection. Dans toute l'étendue de ces aires planes, l'on peut admettre, pour les pressions, le régime hydrostatique. En effet, pour les parties A_0B_0 et A_1B_1, le mouvement est rectiligne et uniforme (n° 21) ; et, dans l'intérieur de la couronne comprise entre le contour ab et le noyau A_0B_0, nous pouvons invoquer la lenteur des déplacements (n° 22). D'après cela, les forces totales que supportent ces surfaces ont pour valeur (n° 10) le produit de leur aire commune Ω_1 par les pressions qui se développent en leurs centres de gravité respectifs G et G_1, lesquels sont situés, d'après la forme cylindrique du tuyau, sur une parallèle GG_1 à ses génératrices. Nous appellerons p_1 la pression en G_1, et p celle qui se développe en G. Mais cette dernière peut s'exprimer en fonction de la pression p_0 exercée au centre de gravité g_0 de la *section vive* A_0B_0 de l'écoulement. La loi de répartition des pressions dans le régime hydrostatique nous donne à cet effet (éq. 1) :

$$p_0 = p + \varpi(z - z_0),$$

d'où l'on déduit :

$$p = p_0 + \varpi(z_0 - z).$$

En résumé donc, l'ensemble des termes dus aux pressions se réduit à :

$$\Omega_1 dt\left[p_0 + \varpi(z_0 - z) - p_1\right].$$

Quant au poids, il a pour valeur le produit du poids spécifique ϖ par le volume $\Omega_1.GG_1$ du cylindre liquide. Nous avons à le projeter sur l'axe du tuyau, c'est-à-dire à le multiplier par le cosinus de l'inclinaison α de ce dernier sur la verticale. Mais $GG_1 \cos\alpha$ repré-

sente alors la différence de niveau $z - z_1$ des points G et G_1. Le terme en question sera donc :

$$\varpi \Omega_1 (z - z_1) dt.$$

Si nous formons maintenant l'équation, nous voyons les deux termes en z se détruire réciproquement. Le facteur $\Omega_1 dt$ qui figure partout peut être supprimé, et, si nous divisons encore par le poids spécifique, il vient :

$$(27) \qquad \frac{v_1 (v_1 - v_0)}{g} = \left(\frac{p_0}{\varpi} + z_0\right) - \left(\frac{p_1}{\varpi} + z_1\right).$$

61 — On remarquera que le second membre reproduit identiquement celui de l'équation de Bernoulli (éq. 8). Il représente la charge entre les deux sections considérées. Quant au premier membre de la relation actuelle, il diffère essentiellement de celui $\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}$ de ce dernier théorème. On peut, en effet, le mettre sous la forme :

$$\frac{v_1 (v_1 - v_0)}{g} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_0)^2}{2g},$$

et cet écart $\frac{(v_1 - v_0)^2}{2g}$ ne saurait être nul, puisque l'équation de continuité :

$$\Omega_0 v_0 = \Omega_1 v_1,$$

nous donne, pour les vitesses, le rapport inverse des sections :

$$(28) \qquad \frac{v_1}{v_0} = \frac{\Omega_0}{\Omega_1},$$

lequel, par hypothèse, diffère de l'unité.

Il sera, d'après cela, intéressant de conserver, autant que possible, nos habitudes précédentes, c'est-à-dire l'usage du théorème de

Bernoulli, au moyen d'un simple terme de correction, en écrivant de la manière suivante l'équation de Bélanger :

$$(29) \quad \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \left[\left(\frac{p_0}{\varpi} + z_0\right) - \left(\frac{p_1}{\varpi} + z_1\right)\right] - \frac{(v_1 - v_0)^2}{2g}.$$

On l'énoncera comme une modification du théorème de Bernoulli, en disant que ce théorème subsiste encore, ***sauf une perte subie par la charge***, laquelle a pour valeur :

$$\frac{(v_1 - v_0)^2}{2g}.$$

La quantité $v_1 - v_0$ prend le nom de ***vitesse perdue*** dans cette sorte de choc du liquide sur lui-même, produit par le ralentissement brusque. A l'aide de cette dénomination consacrée par l'usage, nous pourrons formuler ainsi le théorème de Bélanger : ***Aux changements brusques de section qu'une veine liquide est obligée de subir, il s'opère, dans le théorème de Bernoulli, une perte de charge, mesurée par la hauteur due à la vitesse perdue.***

Cette quantité sera d'ailleurs toujours connue, ou du moins rattachée à la vitesse d'arrivée v_0, par l'équation de continuité (28), puisque les deux sections sont données *a priori*.

62 — La valeur de la perte de demi-force vive due à l'effet des remous dans un changement brusque de section se trouve dès lors déterminée.

En effet, la demi-force vive d'un poids élémentaire P animé d'une vitesse V est le produit de sa masse $\frac{P}{g}$ par la moitié $\frac{V^2}{2}$ du carré de sa vitesse. On peut aussi le représenter comme le produit du poids P par la hauteur due à la vitesse $\frac{V^2}{2g}$. La variation de demi-force vive, quand la masse élémentaire passe d'une section à l'autre, est donc le produit de ce poids par l'accroissement de la hauteur due, c'est-à-dire par la charge entre ces deux sections,

d'après le théorème de Bernoulli (éq. 8), quand il s'applique dans les conditions ordinaires. La perte subite qu'elle éprouve dans une variation brusque de section sera par conséquent, d'après le théorème de Bélanger, le produit,

$$\mathrm{P}\,\frac{(v_0 - v_1)^2}{2g},$$

du poids par la perte de charge.

D'après cela, comme toutes les particules viennent éprouver, l'une après l'autre, une semblable déperdition, on voit que *la perte de demi-force vive due aux remous, rapportée à l'unité de temps, sera le produit du débit en poids par la hauteur due à la vitesse perdue.*

§ 2

AJUTAGE CYLINDRIQUE

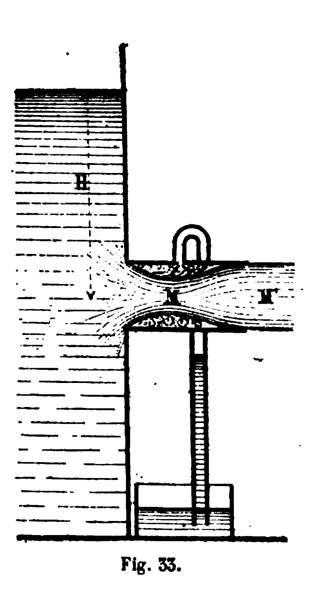


Fig. 33.

63 — Supposons que l'on munisse un orifice circulaire pratiqué en mince paroi d'un ajutage extérieur (¹), c'est-à-dire d'un bout de tuyau (fig. 33) assez long pour que la veine, qui entraîne par son frottement l'air interposé entre elle et la paroi, se gonfle dans cette atmosphère raréfiée au point de rejoindre les parois et de sortir *à gueule-bée* (²). Elle achève alors d'ex-

(¹) Malgré la similitude de noms, les nouveaux phénomènes que nous étudions en ce moment n'ont rien de commun avec celui que nous avons déjà envisagé sous la dénomination classique d'*ajutage rentrant de Borda* (nº 44). On a, en effet, alors supposé essentiellement le tuyau assez court pour ne pas être mouillé par la veine, qui n'occupe à son intérieur que la moitié de sa section. C'est précisément en cela que consiste la différence essentielle des deux modes d'écoulement, car les remous sont alors supprimés.

(²) Hachette. *Traité des machines*, 1828, p. 73. — Venturi. *Recherches expérimentales sur la communication latérale du mouvement dans les fluides*, 1797.

pulser cet air, qui se trouve définitivement remplacé par une certaine quantité de liquide tournoyant à l'état de remous.

On retrouve, dans ces conditions, entre la section M de la contraction et celle M' du débouché, un état de choses identique à celui de la figure 32, qui nous a fourni l'équation de Bélanger (éq. 29). Nous supposons d'ailleurs que le tuyau n'a que strictement la lon gueur qui vient d'être définie. Tout supplément à cet égard n'aurait d'autre effet que d'introduire des frottements extérieurs, en augmentant inutilement le total de ceux que nous avons négligés dans l'analyse précédente.

Si donc nous écrivons, entre M et M', l'équation (29), elle donnera, en prenant pour plan de comparaison celui qui passe par l'axe de l'ajutage :

$$(30) \qquad \frac{v'^2 - v^2}{2g} = \frac{p - p_a}{\varpi} - \frac{(v - v')^2}{2g},$$

si nous appelons p la pression qui se développe dans la contraction, et p_a la tension atmosphérique qui règne dans toute l'étendue du débouché (n° 40).

Nous avons d'ailleurs, pour déterminer la vitesse perdue, l'équation de continuité (éq. 28) :

$$(31) \qquad v' = mv,$$

en désignant par m le coefficient de la contraction qui prend naissance dans ces conditions spéciales.

Je ferai enfin remarquer que la partie de l'écoulement qui se trouve en amont de la section contractée reproduit identiquement, de son côté, les conditions du problème auquel nous avons (n° 40) appliqué le théorème de Bernoulli sous la forme :

$$(32) \qquad \frac{v^2}{2g} = H + \frac{p_a - p}{\varpi}.$$

Ces trois équations renferment : 1° quatre constantes numériques :

$$\varpi = 1000 \quad p_a = 10336 \quad g = 9{,}81 \quad m = 0{,}62$$

si nous admettons provisoirement pour m la même valeur que dans l'air; 2° une constante arbitraire H, qui sera donnée dans chaque cas; 3° enfin trois inconnues, v, v', et p, que ces relations vont nous permettre de déterminer. Procédons à cette élimination.

64 — Pour connaître la *vitesse au débouché* v', nous ajouterons ensemble les égalités (30) et (32), ce qui donne :

$$\frac{v'^2}{2g} = \text{H} - \frac{(v - v')^2}{2g},$$

ou, d'après (31) :

$$\frac{v'^2}{2g} = \text{H} - \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \frac{v'^2}{2g},$$

et enfin :

$$\frac{v'^2}{2g} = \frac{\text{H}}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}.$$

Si l'on effectue le calcul, avec la valeur admise provisoirement en ce qui concerne m, il vient :

$$v' = 0{,}85\sqrt{2g\text{H}}.$$

En consultant, à cet égard, l'observation directe, on a trouvé [1] :

$$(33) \qquad v' = 0{,}82\sqrt{2g\text{H}}.$$

Si l'accord n'est pas complet, il est néanmoins assez remarquable pour constituer une vérification importante de ces théories délicates. Nous n'étions pas d'ailleurs en droit d'en attendre une absolument rigoureuse, puisque nous avons formé, à l'égard de m, une

[1] Bossut admettait, à cet égard, la valeur $\frac{13}{16}$ (*Hydrodynamique*, t. II, chap. III).

hypothèse gratuite, et négligé, en outre, l'influence des frottements extérieurs. Il sera d'ailleurs évidemment préférable, pour continuer le calcul, d'employer celle des deux valeurs qui est la plus exacte (33).

La *perte de charge* s'évaluera en remarquant que l'accroissement effectif de la hauteur due, lorsque l'eau passe du repos à la vitesse v', est $\frac{v'^2}{2g}$. Il mesure, d'après le théorème de Bélanger, la charge diminuée de la perte de charge. Comme d'ailleurs la charge disponible est H, on voit que la perte de charge se formule par :

$$H - \frac{v'^2}{2g} = H\left[1 - (0,82)^2\right] = 0,33\,H.$$

La perte de charge est donc d'un tiers de la charge disponible, ou de moitié de la charge utilisée ([1]), puisque celle-ci forme dès lors les deux autres tiers.

Nous obtiendrons la *dépense* en appliquant, à la section du débouché, l'équation de continuité :

$$Q = \Omega v',$$

c'est-à-dire :

$$Q = 0,82\,\Omega\sqrt{2gH}.$$

En l'absence d'ajutage, on aurait eu, pour le débit (éq. 19) :

$$Q_1 = 0,62\,\Omega\sqrt{2gH}.$$

On voit donc que la présence de cet appendice active l'écoulement. Il *attire*, en quelque sorte, le liquide hors du vase, en exerçant sur lui un *appel*, une *succion*. La mesure de cette augmentation de

([1]) Ces deux formes de l'énoncé nous seront utiles l'une et l'autre, suivant la nature des applications.

la dépense est fournie par le rapport :

$$\frac{0,82}{0,62} = 1,32;$$

d'où cet énoncé : ***Le débit est augmenté d'environ un tiers par la présence de l'ajutage cylindrique.***

Nous déduirons de là l'expression de la ***vitesse dans la contraction.*** En effet, le débit passe dans cette section, comme dans toutes les autres. Si donc nous négligeons, pour un énoncé approximatif, la différence que peut présenter la contraction actuelle avec celle qui prend naissance dans l'air, il faudra, d'après l'équation de continuité, que ce soit la vitesse qui ait subi, pour son propre compte, l'augmentation correspondante. On a donc :

$$v = 1,32\sqrt{2gH};$$

ce qui montre que ***la vitesse dans la contraction est augmentée d'un tiers environ.***

Cet accroissement de vitesse tient à une diminution de pression dans l'intérieur de l'ajutage. En raison de ce ***degré de vide,*** le liquide s'y précipite plus énergiquement que dans une enceinte qui lui opposerait la pression atmosphérique. La production de cette ***dépression*** est un phénomène d'une importance absolument capitale [1]. L'équation (32) nous en fournit la valeur :

$$\frac{p_a - p}{\varpi} = \frac{v^2}{2g} - H = H\left[(1,32)^2 - 1\right] = 0,74H.$$

[1] Elle sert de point de départ au fonctionnement d'appareils très remarquables, dont le premier a été la ***trompe*** (fig. 34), et qui, dans leur forme actuelle, beaucoup plus puissante, sont connus sous les noms d'***injecteurs, éjecteurs, souffleurs, élévateurs,*** etc. On y emploie, à la vérité, non plus des ajutages cylindriques, mais des tubes ***convergents-divergents*** (fig. 35), qui présentent des effets du même genre et encore plus accusés. L'eau injectée sous pression en A entraîne, par B, le liquide adjacent avec l'aide de la dépression qui est créée dans l'étranglement en C, et le tout se trouve projeté à travers l'orifice D. Le fonctionnement à l'aide de l'eau est souvent remplacé, dans ces organes, par l'emploi de l'air comprimé, et surtout de la vapeur. Cette dernière, en se condensant au contact de l'eau froide, et en lui cédant sa chaleur de

On peut donc dire, en nombres ronds, que la *dépression déve-*

constitution, vient mêler, au phénomène qui nous occupe, des circonstances d'un autre

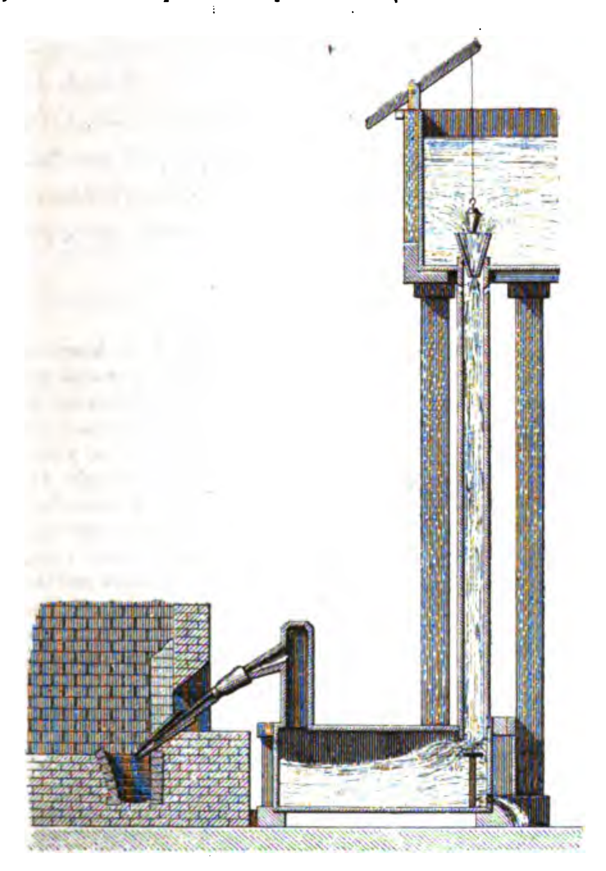


Fig. 34. — Trompe.

ordre que nous analyserons plus tard, à l'occasion de l'alimentation des générateurs à vapeur. On a obtenu, à l'aide de ces éjecteurs, des effets d'une intensité très remar-

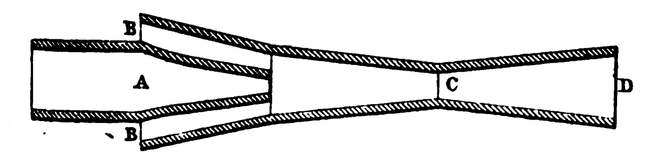


Fig. 35. — Ajutage convergent-divergent.

quable. C'est ainsi qu'à Londres, on en a employé pour l'extinction des incendies, en les faisant fonctionner à des pressions formidables, de manière à couper les construc-

loppée dans l'ajutage cylindrique est égale aux trois quarts de la charge qui est exercée sur son centre.

On voit qu'il s'agit là d'une valeur très notable. Elle a été mise en évidence par une expérience célèbre de Venturi, qui consiste à adapter à la section contractée un tube manométrique, dont la partie inférieure plonge dans un bain liquide (fig. 33). Celui-ci s'élève alors au-dessus de son niveau extérieur, jusqu'à une hauteur égale aux trois quarts de celle qui surmonte l'ajutage lui-même.

Ce curieux phénomène nous présente enfin un exemple de la

tions par la force du jet, afin de faire la part du feu et d'étouffer le brasier sous la chute des décombres, en même temps que par l'inondation.

On peut signaler encore un autre exemple des effets de la dépression due à l'épanouissement brusque qu'une veine est obligée de subir, pour revenir au contact de la pression atmosphérique. La vitesse diminuant par là, d'après l'équation de continuité, la pression doit, suivant la formule de Bernoulli (éq. 7), aller en croissant ; et, comme elle a pour limite celle de l'atmosphère, elle est obligée, pour cela, de partir d'une valeur moindre dans la contraction. Les mariniers savent fort bien, en effet, à quel danger se trouve exposé un bateau qu'une fausse manœuvre amène à se mettre en travers d'une arche de pont. S'il est chargé au point de se trouver, dans les conditions ordinaires, presque immergé, on risque alors de le voir couler à pic. Cela tient à ce que le courant s'engouffre sous la quille, et ne rejoint le fond plat du bateau qu'à une certaine distance de son arête. Il se développe par suite, dans cette région, une dépression dont l'effet vient s'ajouter au poids, jusque-là tenu en équilibre par la poussée du liquide déplacé Une immersion plus profonde devient donc inévitable, et peut suffire à déterminer le naufrage.

Ce même principe se trouve encore appliqué dans la construction des ***barrages à poutrelles*** (fig. 36). On compose cet ouvrage de pièces équarries superposées, et on

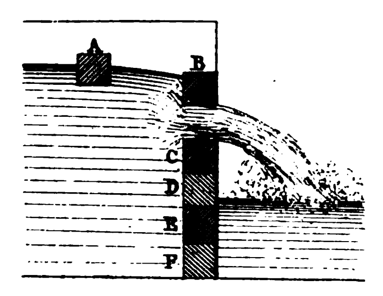


Fig. 36.
Barrage à poutrelles (coupe verticale).

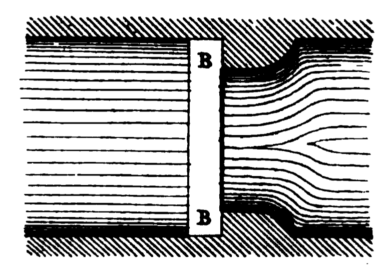


Fig. 37.
Barrage à poutrelles (plan horizontal).

l'élève avec une très grande facilité. Il suffit, pour cela, de faire flotter les poutrelles en A, en les dirigeant de manière qu'elles se présentent en travers au point B, au contact de montants en maçonnerie. La succion qui s'exerce en dessous les fait alors couler en C, les unes au-dessus des autres.

limite de charge capable d'amener le dégorgement, en provoquant dans les équations une impossibilité physique, à savoir un degré de dépression dont la valeur dépasserait celle de la pression atmosphérique, et conduirait à une *pression négative* (n° 27). Il faut en effet, pour que la quantité p reste positive, que l'on puisse écrire :

$$\frac{p_a - p}{\varpi} < \frac{p_a}{\varpi},$$

c'est-à-dire, en ce qui concerne l'eau (n° 9) :

$$0{,}74\mathrm{H} < 10^{\mathrm{m}}{,}336;$$

d'où l'on déduit, comme condition nécessaire :

$$\mathrm{H} < 14^{\mathrm{m}}{,}02.$$

§ 5

AJUTAGES DIVERGENTS OU CONVERGENTS

65 — *Buses divergentes* [1]. — On trouve, dans l'analyse des propriétés de l'ajutage cylindrique, tout à la fois un phénomène susceptible d'applications utiles [2], à savoir la succion qui a pour effet de faire sortir le liquide en plus grande abondance que par un orifice d'égal diamètre pratiqué en mince paroi, et, en même temps, une circonstance fâcheuse : la perte de charge. Il y a lieu, d'après cela, de se demander s'il serait possible de modifier le dispositif, de manière à garder le premier avantage en supprimant l'inconvénient. Rien n'est plus facile en effet.

Il suffit, pour cela, de conserver à la veine sa forme épanouie, en

[1] Daubuisson. *Traité d'hydraulique*, p. 64. — De Caligny. Expériences sur divers phénomènes des ajutages divergents (*Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau*, 1883, t. I, p. 139 et 339).

[2] Notamment dans la *cheminée évasée* adaptée par M. Guibal à son ventilateur de mines (Haton de la Goupillière, *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 459).

évitant en même temps, dans les ***espaces nuisibles***, la production des remous qui sont une cause de perte de force vive. On substitue ainsi à l'ajutage cylindrique une ***buse divergente*** dont le profil est évasé, mais avec une grande continuité, de manière à supprimer tout changement brusque (fig. 38). Cet effet comporte toutefois une limite, et l'on ne saurait, par une dilatation indéfinie de la section, forcer outre mesure l'accélération que l'on imprime ainsi au liquide. L'on arriverait par là, comme dans la question précédente, à provoquer le dégorgement de la buse. Cette limite est facile à déterminer de la manière suivante.

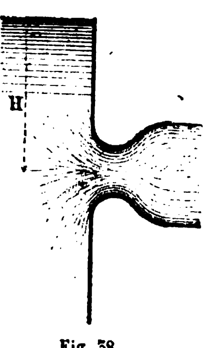


Fig. 38.
Buse divergente.

Conservons, avec le dispositif de la figure 38, les notations de la question précédente. Nous pourrons appliquer le théorème de Bernoulli depuis les profondeurs du bassin, pour lesquelles la vitesse est négligeable, jusqu'au débouché; puisqu'il ne se produit nulle part de remous sur ce parcours. On obtiendra ainsi la formule de Torricelli (éq. 17) :

$$v' = \sqrt{2gH}.$$

Si l'on écrit de même l'équation de Bernoulli, en s'arrêtant à la section contractée, on aura simultanément (éq. 16) :

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_a - p}{\varpi}\right)}.$$

L'équation de continuité relie d'ailleurs ces deux vitesses, et donne :

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{v}{v'} = \sqrt{1 + \frac{p_a - p}{\varpi H}} = \sqrt{1 + \frac{10336 - p}{1000H}}.$$

Comme, du reste, la pression p ne saurait être abaissée au-dessous

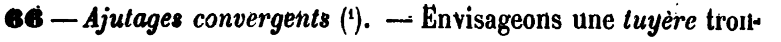
de zéro, il vient pour la limite du rapport de dilatation *des sections* :

$$\text{Lim.}\ \frac{\Omega'}{\Omega} = \sqrt{1 + \frac{10,336}{H}}.$$

et, pour celui *des rayons* :

$$\text{Lim.}\ \frac{\rho'}{\rho} = \sqrt[4]{1 + \frac{10,336}{H}}.$$

On voit que cette limite se resserre d'autant plus que la charge est plus importante. Si, par exemple, on emploie une hauteur d'eau de $10^{m},336$, on ne pourra augmenter le diamètre dans un rapport supérieur à $\sqrt[4]{2}$ ou 1,189 qui ne représente pas même $\frac{1}{5}$ en sus. Avec une charge égale à un mètre, on pourrait aller jusqu'à 1,835 ou environ $\frac{4}{5}$ en sus. Pour arriver à doubler le rayon dans la valeur du rapport limite, il faudrait abaisser la charge jusqu'à $0^{m},689$.



66 — *Ajutages convergents* [1]. — Envisageons une *tuyère* tronconique encastrée dans une paroi plane (fig. 39). Une contraction se produit à l'entrée. Elle est suivie d'un renflement, et des remous s'établissent dans l'intervalle libre. De là une perte de charge, et une diminution dans la vitesse finale, analogue à celle que l'on observe dans l'ajutage cylindrique, mais moins impor-

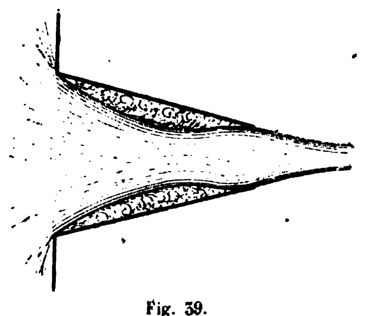


Fig. 39.
Ajutage convergent

[1] Expériences de Poleni, 1718 (Bossut, *Hydrodynamique*, § 530). — Lespinasse (*Mémoires de l'Académie de Toulouse*, t. II, 1784). — Castel (*Annales des mines*, 1833 et 1838). — Daubuisson (*Hydraulique*, p. 55). — Collignon (*Cours de mécanique appliquée aux constructions*, 2ᵉ partie, p. 127).

tante, car la section renflée est moindre, dans le tronc de cône, qu'elle ne le serait pour rejoindre la paroi du cylindre. La vitesse perdue est donc moins sensible. Cette atténuation sera naturellement d'autant plus accusée que l'angle du cône sera plus grand.

Au débouché, les filets dirigés par la paroi conique présentent une certaine convergence qui détermine une contraction, moins prononcée toutefois que pour l'orifice en mince paroi, et croissant également avec l'angle du cône.

On voit donc que la section diminue, en même temps que la vitesse y augmente, lorsque s'accroît la conicité. Le débit subit à la fois ces deux influences inverses, d'après l'équation de continuité. L'expérience a montré, en ce qui concerne l'effet résultant, que la dépense croît depuis le cas de l'ajutage cylindrique jusqu'à l'angle de 12° environ, pour décroître ensuite jusqu'à celui de l'orifice en mince paroi. On a enregistré, à cet égard, les résultats suivants :

ANGLE DU CÔNE	$\frac{\Omega}{\Omega'}$	$\frac{v}{\sqrt{2gH}}$	$\frac{Q}{\Omega\sqrt{2gH}}$
0° 0′	1,00	0,820	0,820
12° 4′	0,99	0,955	0,942
29° 58′	0,92	0,975	0,895
48° 50′	0,86	0,984	0,847
180° 0′	0,62	1,000	0,620

§ 4

DIAPHRAGMES

67 — Les tuyaux de conduite présentent souvent une succession d'étranglements suivis d'épanouissements, tels que ceux auxquels donnent lieu, par exemple, les *robinets* ordinaires ou les *robinets-vannes*. Le cas le plus simple, pour lequel cet obstacle serait constitué par une mince paroi, porte le nom de *diaphragme*. Il est

facile, à l'aide du théorème de Bélanger, d'assigner l'influence que ce genre d'entraves exerce sur l'écoulement.

Soient en effet (fig. 40) ω la section du diaphragme, $m\omega$ celle de

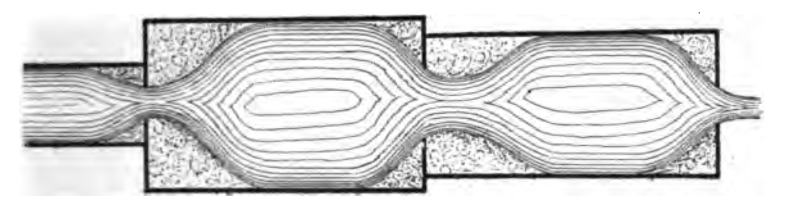


Fig. 40. — Diaphragmes.

la contraction qui lui fait suite, et v la vitesse qui s'y produit. Appelons de même Ω la section de la travée qui succède, et V la vitesse qui s'y établit. On aura, d'après l'équation de continuité :

$$Q = m\omega v = \Omega V.$$

et, par suite, pour la vitesse perdue

$$v - V = \left(\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{\Omega}\right) Q.$$

La perte de charge provoquée par la présence du diaphragme sera donc :

$$\frac{(v-V)^2}{2g} = \left(\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{\Omega}\right)^2 \frac{Q^2}{2g},$$

et celle que produira l'ensemble des $n-1$ premiers diaphragmes disposés le long de la conduite :

$$\frac{Q^2}{2g} \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{1}{m\omega_k} - \frac{1}{\Omega_k}\right)^2$$

Le $n^{\text{ième}}$ et dernier se comporte comme une mince paroi pour l'écoulement à l'air libre (éq. 16). La hauteur due à la vitesse

finale $\frac{v_n^2}{2g}$ est donc égale à la charge d'ensemble $H + \frac{p-p'}{\varpi}$ diminuée de la perte de charge totale dont nous venons de former l'expression. De là l'équation :

$$\frac{v_n^2}{2g} = H + \frac{p-p'}{\varpi} - \frac{Q^2}{2g} \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{1}{m\omega_k} - \frac{1}{\Omega_k} \right)^2.$$

Comme nous avons d'ailleurs, en appliquant une dernière fois l'équation de continuité :

$$Q = m\omega_n v_n,$$

il vient finalement :

$$\frac{Q^2}{2g} = \frac{H - \frac{p-p'}{\varpi}}{\frac{1}{m^2\omega_n^2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{1}{m\omega_k} - \frac{1}{\Omega_k} \right)^2}.$$

Telle est la relation qui fera connaître le débit de la conduite, sous l'influence des obstacles dont elle est encombrée, et en faisant abstraction, pour le moment, du frottement sur les parois; cette étude étant réservée pour le chapitre suivant.

§ 5

ÉTRANGLEMENT PRODUIT PAR LES PILES D'UN PONT

68 — L'entrave apportée dans le courant des rivières par la présence des piles de pont détermine des phénomènes du même ordre que les précédents (¹). Le liquide se divise en avant de chaque pile,

(¹) Poncelet. *Introduction à la mécanique industrielle*, 1841, p. 537. — Résal. *Cours de mécanique générale*, t. II, p. 323. — Collignon. *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, 2ᵉ partie, p. 312.

et une *proue liquide* très écrasée (fig. 41) stationne au contact de l'avant-bec, à l'état de remous, d'autant moins accusé que la forme de cet éperon sera déterminée d'une manière plus favorable. On pourrait même concevoir, à la limite, que l'on soit parvenu, à l'aide d'une courbe appropriée, à supprimer cette cause de perte de force vive; et nous l'admettrons par approximation pour le profil hémi-circulaire, qui est aujourd'hui généralement adopté.

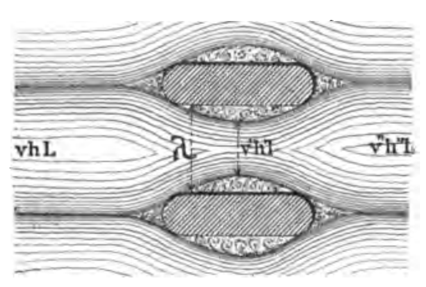


Fig. 41.

Le théorème de Bernoulli pourra, dans ces conditions, s'appliquer jusqu'à la contraction. Il viendra ainsi :

$$\frac{v'^2 - v^2}{2g} = h - h'. \tag{54}$$

Nous pourrons invoquer, en effet, dans les sections où l'écoulement a lieu par filets parallèles, le régime hydrostatique (n° 21). Les profondeurs d'eau h et h' représentent donc (sauf la constante de la pression atmosphérique) les ordonnées des niveaux piézométriques.

Comme la pile est toujours appareillée en ligne droite, il s'établira des remous sous l'arche, et nous devrons appliquer à partir de là, jusqu'à une section où se trouve définitivement rétabli le régime par filets parallèles, non plus le théorème de Bernoulli, mais celui de Bélanger, que nous écrirons sous la forme suivante (éq. 27) :

$$\frac{v''(v'' - v')}{g} = h' - h''.$$

En joignant à ces formules les équations de continuité :

$$vhL = v'h'l = v''h''L = Q,$$

nous obtiendrons en tout cinq relations entre les inconnues v, v', v'', h, h', et les données h'', l, L, Q.

Si l'on substitue les valeurs :

$$v = \frac{Q}{Lh}, \qquad v' = \frac{Q}{lh'}, \qquad v'' = \frac{Q}{Lh''},$$

dans les deux premières relations, elles deviennent :

$$h'^2 - \left(h'' + \frac{Q^2}{gL^2h''^2}\right)h' + \frac{Q^2}{glLh''} = 0,$$

$$h^3 - \left(h' + \frac{Q^2}{2gl^2h'^2}\right)h^2 + \frac{Q^2}{2gL^2} = 0.$$

L'équation du second degré en h' nous fournira cette inconnue. En la substituant dans l'équation du troisième degré en h, nous obtiendrons, à son tour, la profondeur en amont. Cela fait, les trois autres égalités détermineront les valeurs des vitesses.

On connaîtra de cette manière la valeur du gonflement $h - h''$ provoqué par la présence des piles, ainsi que la chute $h - h'$ qu'éprouve l'eau en s'engageant sous l'arche du pont, et le contre-haut $h'' - h'$ qu'elle doit gravir pour reprendre, à la sortie, son niveau normal [1].

[1] En raison de la complication de ces calculs, on se contente souvent d'une approximation assez grossière. On néglige la contre-pente, c'est-à-dire la différence entre h' et h'', et, dès lors, on substitue à l'inconnue principale $h - h''$ la quantité $h - h'$, qui est immédiatement fournie par l'équation (34) sous la forme :

$$h - h' = \frac{Q^2}{2gh''^2}\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{L^2}\right),$$

en évaluant v et v' d'après l'équation de continuité, et confondant encore dans cette occasion h et h' avec h'', qui représente la profondeur naturelle du courant. Quant à l, on l'exprime en fonction de la largeur λ de la travée sous la forme $\mu\lambda$, en désignant par μ un coefficient qui doit être déterminé empiriquement. A cet égard, Funk a proposé la valeur 0,90 pour les eaux moyennes, et 0,80 dans les grandes eaux. Eytelwein a indiqué 0,95 avec la forme triangulaire ou ogivale des avant-becs, et 0,85 pour les piles rectangulaires. On emploie ordinairement le coefficient 0,90 dans tous les cas, et spécialement avec le profil hémi-circulaire.

§ 6

CHOC D'UNE VEINE LIQUIDE CONTRE UN CORPS SOLIDE

69 — *Effort exercé.* — Les changements brusques qui résultent, pour une veine liquide, des actions réciproques de ses diverses parties, ne sont pas les seuls qui puissent y déterminer des pertes de force vive. Il en est encore de même lorsque le courant se trouve subitement dévié de sa direction par la rencontre d'un corps solide. Il y a lieu, dans ce cas, d'évaluer à la fois l'action qu'exerce le fluide sur cet obstacle, et la perte de force vive qu'il subit pour son propre compte.

La plupart du temps, la surface solide, que nous réduisons d'abord à un plan indéfini, fait partie d'un récepteur hydraulique, et possède, à ce titre, un mouvement propre. Ce déplacement, que nous supposerons de translation pour plus de simplicité, peut toujours se décomposer suivant deux directions, à savoir la normale et une droite située dans le plan lui-même. Mais ce dernier mouvement n'exercera aucune influence sur le liquide, si nous négligeons le travail du frottement sur un aussi court espace. Nous pouvons donc l'écarter de ces considérations, et supposer simplement que le plan soit animé d'une vitesse u suivant sa normale. Nous nous attacherons, dans ce qui suit, au mouvement relatif du liquide par rapport à cette translation d'entraînement.

L'expérience montre qu'après sa rencontre avec une surface parfaitement polie et sans rugosités, l'eau ne rejaillit pas, comme le ferait un solide élastique, sous un angle de réflexion plus ou moins rapproché de l'égalité avec l'angle d'incidence. On la voit, au contraire, s'étaler en nappe, par un écrasement complet du jet, qui s'éparpille tangentiellement [1]. Nous envisagerons, d'après cela, le système matériel compris entre une section plane A_0B_0 de la

[1] Savart. Expériences sur le choc d'une veine liquide contre un disque mince (*Annales de chimie et de physique*, t. LIV, 1833). — Boussinesq. Théorie des résultats obtenus par Savart pour la forme que prend une veine liquide après s'être heurtée contre un plan circulaire (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 45 et 128).

veine (fig. 42) et un cylindre A_1B_1 normal au plan, en lui appliquant le théorème des quantités de mouvement projetées sur la normale. Cette relation, qui ne renferme que les forces extérieures, aura en effet l'avantage d'éliminer immédiatement les forces intérieures inconnues qui se développent dans cet écrasement.

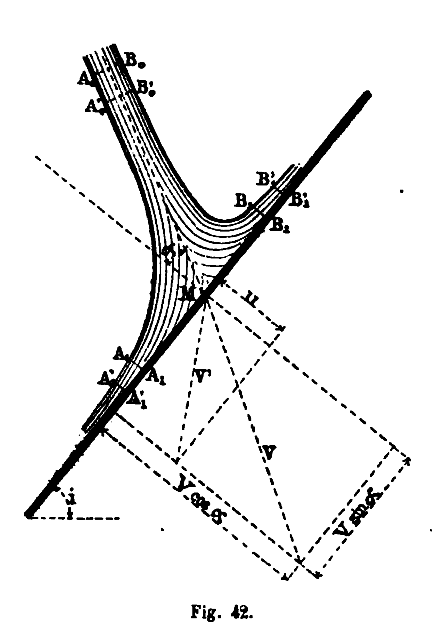


Fig. 42.

Les molécules situées sur ces deux surfaces extrêmes se retrouveront en $A_0'B_0'$ et $A_1'B_1'$ au bout du temps dt. La partie intermédiaire $A_0'B_0'A_1B_1$ disparaît algébriquement. La couronne $A_1B_1A_1'B_1'$ ne donne lieu, pour sa quantité de mouvement, à aucune projection sur la normale. Il ne reste, par suite, à envisager que la tranche $A_0B_0A_0'B_0'$. La vitesse relative de cette dernière est la résultante de sa vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire. Sa projection normale sera donc la différence de celles de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement. Elle aura, d'après cela, pour valeur $v \cos \alpha - u$, si nous désignons par v la vitesse de la tranche A_0B_0, et par α l'angle qu'elle fait avec la normale au plan, c'est-à-dire avec la translation d'entraînement. Quant à la masse de la tranche d'amont, elle s'exprime par $\frac{\varpi Q\, dt}{g}$, et le premier membre de l'équation se réduit à :

$$-\frac{\varpi Q dt}{g}(v \cos \alpha - u),$$

avec le signe négatif, puisque ce terme se rapporte à la vitesse initiale.

Quant aux forces extérieures destinées à composer le second membre, on devra leur adjoindre, d'après la théorie des mouvements relatifs, les deux forces fictives connues sous les noms de force d'inertie d'entraînement et de force centrifuge composée. Mais l'une et l'autre s'annulent identiquement dans le cas actuel, puisque le mouvement d'entraînement est une translation rectiligne et uniforme. Il ne reste donc à prendre en considération que la pesanteur et la réaction normale F du plan, laquelle forme précisément l'inconnue de la question. En ce qui concerne, en effet, la pression atmosphérique, elle disparaît identiquement, ainsi que nous l'avons montré dans une autre occasion (nº 44). Elle constitue d'ailleurs la seule pression développée dans la section A_0B_0, pour laquelle les filets sont supposés libres d'obéir à l'action de la pesanteur (nº 20), cette section ayant été choisie, pour cela, à une distance suffisante de l'obstacle perturbateur; et quant aux pressions exercées sur le cylindre A_1B_1, elles sont perpendiculaires à l'axe de projection.

Désignons donc par P le poids du liquide renfermé dans l'enceinte $A_0B_0A_1B_1$. Son impulsion projetée sera $P\cos i dt$, si nous représentons par i l'inclinaison du plan sur l'horizon. L'équation aura, d'après cela, pour second membre :

$$(P \cos i - F)\, dt,$$

et elle donnera, en remplaçant Q d'après l'équation de continuité :

$$(35) \qquad F = P \cos i + \frac{\varpi}{g} \Omega v (v \cos \alpha - u).$$

Il peut sembler surprenant que la force F, qui est nécessairement déterminée, se présente comme une fonction du poids P, lequel est arbitraire, comme les sections mêmes entre lesquelles il se trouve renfermé. Mais il faut remarquer, à cet égard, que, d'une part, v et α dépendent également du choix de A_0B_0, car la vitesse des corps pesants change de valeur et de direction aux divers points de leur trajectoire. On comprend donc qu'il puisse, à cet égard, s'établir

une compensation qui ne saurait, bien entendu, manquer d'exister. D'un autre côté, l'influence du choix du cylindre A_1B_1 ne pouvait non plus manquer d'intervenir, car l'effort exercé par la plaque variera avec son étendue, et celle de la nappe liquide qu'elle soutient ainsi, en la détournant de reprendre son cours naturel sous l'action de la pesanteur seule.

Imaginons, par exemple, pour prendre le cas le plus simple, un plan fixe :

$$u = 0,$$

horizontal :

$$i = 0$$

choqué normalement par une veine verticale :

$$\alpha = 0.$$

Il viendra, dans ces conditions :

$$F = P + \frac{\varpi\Omega v^2}{g}.$$

Au fur et à mesure que nous abaissons, par la pensée, la section A_0B_0, le poids P diminue, et la vitesse de chute augmente. Nous tomberions, à la vérité, dans la confusion, en dépassant le point où s'altère le parallélisme des tranches, que suppose la démonstration précédente. C'est cependant ce que l'on fait involontairement dans le langage ordinaire, quand on parle de la *vitesse de rencontre* V. On se trouve par là conduit implicitement à supposer $P = 0$, en rapprochant indéfiniment A_0B_0 et A_1B_1. Il vient alors :

$$F = \frac{\varpi\Omega V^2}{g}$$

De là cet énoncé qui avait été formulé par Newton : *L'effort exercé contre un plan fixe par le choc normal d'une veine liquide est le*

double du poids du cylindre qui aurait pour section celle de cette veine [1] *et pour axe la hauteur due à sa vitesse* [2].

70 — *Perte de force vive.* — Nous aurons besoin, pour la théorie des récepteurs hydrauliques, de connaître l'expression de la perte de force vive qui se produit dans la rencontre brusque d'un liquide avec un solide. Une distinction essentielle est nécessaire à cet égard.

Lorsque l'obstacle est fixe, le travail d'écrasement de la veine intervient seul pour en diminuer la force vive; la réaction de ce plan n'effectuant aucun travail sur le déplacement tangentiel de l'eau, si nous négligeons l'influence du frottement pour une aussi faible longueur. Mais si le plan se trouve animé lui-même d'une translation normale, de vitesse constante u, la réaction F exécute pour son compte un travail, qui vient, comme le précédent, réduire la force vive du courant. Toutefois cette dernière portion de l'énergie n'est pas perdue. Elle est passée dans le récepteur, qui a besoin d'en

(1) Lorsque cette section peut être considérée comme infinie, comme dans le cas de l'immersion d'un obstacle limité au sein d'un courant illimité dans le sens transversal, le phénomène change complètement de nature, et l'argumentation précédente ne s'y applique plus en aucune manière. Il prend alors le nom de *résistance des milieux*. Je me suis occupé ailleurs de cette importante question (Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes, renfermant la théorie géométrique des organes et celle des résistances passives*. Gauthier-Villars, 1864, p. 438 à 449). Mais dans le Cours actuel, destiné à l'établissement des machines, et non aux questions qui intéressent la navigation, j'écarte à dessein ce qui concerne la résistance des milieux, les propulseurs et la propagation des ondes.

(2) Ce résultat a été contrôlé expérimentalement par Bossut, qui a trouvé, au lieu du facteur 2, le coefficient 1,95 (*Hydrodynamique*, § 855); et par Bidone, qui a donné des rapports compris entre 2,04 et 2,23 (*Expériences sur la percussion des veines d'eau*, Turin, 1836). Le degré de poli paraît d'ailleurs intervenir en influençant l'éparpillement de la veine, et Zuliani a obtenu un coefficient plus élevé pour le fer que pour le bois.

Ce rapport sera également augmenté par la présence de rebords, qui ont pour effet de renverser l'écoulement en arrière. En effet, le second terme des quantités de mouvement projetées relatif à la tranche cylindrique $A_1B_1A'_1B'_1$ ne disparaît plus alors identiquement; il prend un signe négatif, et s'ajoute par suite au premier dans la soustraction algébrique. Si la courbure rejette la totalité de la veine dans une direction diamétralement opposée, l'effort que nous avons calculé sera donc doublé. Il sera, au contraire, atténué, si, au lieu d'un plan, on emploie une surface fuyante, qui laisse la quantité de mouvement de $A_1B_1A'_1B'_1$ se projeter dans le même sens que celle de $A_0B_0A'_0B'_0$.

Quant au choc oblique contre un obstacle au repos, des expériences du docteur Vince (Daubuisson, *Hydraulique*, p. 289) ont montré, conformément à l'équation (35), dans laquelle on continuerait à supposer $u = 0$ et $P = 0$, que l'effort est proportionnel au sinus de l'inclinaison de la veine sur le plan fixe.

recevoir pour entretenir son mouvement uniforme malgré les résistances industrielles qu'il est destiné à vaincre. En l'absence de ces résistances, il prendrait une accélération et un accroissement de force vive, sous l'impulsion du courant qui viendrait lui communiquer la sienne. Mais, dans les conditions réelles, l'énergie qui a abandonné le liquide passe finalement, au delà du récepteur que l'on entretient en mouvement uniforme, dans les résistances qu'il a pour mission de surmonter. Cette portion du travail s'exprimera donc, durant l'unité de temps, par Fu. Désignons en même temps par T celle qui résulte, dans le même intervalle, du jeu des forces intérieures. Nous aurons alors, pour le second membre de l'équation des forces vives que l'on appliquerait au liquide $A_0B_0A_1B_1$, pendant son passage en $A'_0B_0'A'_1B'_1$:

$$-(Fu+T)\,dt.$$

Occupons-nous maintenant de former le premier membre.

Nous nous contenterons, à cet égard, du point de vue approximatif qui vient d'être employé pour établir le théorème de Newton. Nous introduirons donc la *vitesse de rencontre* V, que possède le liquide au moment où il atteint l'obstacle, dans une direction qui fait l'angle α avec la normale; et nous annulerons en même temps le poids P. Raisonnons d'ailleurs comme si la veine, au lieu de s'étaler à la fois dans toutes les directions, à la vérité d'une manière très inégale, s'étendait uniquement suivant la projection de la vitesse V sur le plan solide. Si, dans ces conditions, on applique le théorème des quantités de mouvement projetées sur cette droite, la réaction normale F, seule force extérieure qui puisse influencer le mouvement, disparaîtra d'elle-même; ce qui montre que la vitesse projetée $V \sin \alpha$ ne subit aucune altération. Quant à la composante normale, qui était originairement $V \cos \alpha$, elle est devenue u à la fin du choc, lorsque le liquide, ainsi marié au métal, n'est plus animé par rapport à lui que de mouvements relatifs tangentiels. La vitesse finale V' est donc la résultante de ces deux composantes rectangulaires, ce qui donne pour sa valeur :

$$V'^2 = u^2 + V^2 \sin^2\alpha.$$

La variation du carré de la vitesse sera, d'après cela :

$$V'^2 - V^2 = u^2 - V^2 \cos^2 \alpha.$$

La masse étant d'ailleurs $\frac{\varpi Q dt}{g}$, on aura pour premier membre de l'équation des forces vives :

$$\frac{\varpi Q dt}{2g} (u^2 - V^2 \cos^2 \alpha).$$

Cette équation donnera par conséquent :

$$T = \frac{\varpi Q}{2g} (V^2 \cos^2 \alpha - u^2) - Fu.$$

Or il vient, en introduisant dans la formule (35) les hypothèses $P = 0$, $v = V$:

$$F = \frac{\varpi Q}{g} (V \cos \alpha - u).$$

On déduit de là :

$$T = \frac{\varpi Q}{2g} \left[(V^2 \cos^2 \alpha - u^2) - 2u (V \cos \alpha - u) \right]$$

$$= \frac{\varpi Q}{2g} \left[u^2 + V^2 \cos^2 \alpha - 2uV \cos \alpha \right]$$

$$= \frac{\varpi Q}{2g} (V \cos \alpha - u)^2.$$

Ce résultat est facile à interpréter (fig. 42). En effet la longueur $V \cos \alpha - u$ mesure la droite qui ferme le triangle des deux vitesses initiale et finale V et V'. On l'appelle, pour cette raison, *vitesse perdue* dans le choc (1), et l'on peut, d'après cela, énoncer le résultat

(1) C'est, en effet, celle qu'il faudrait composer avec V' par la règle du parallélo-

de la manière suivante : *Lorsqu'une masse liquide vient choquer un plan mobile, elle éprouve une perte de force vive marquée par la force vive qui correspond à la vitesse perdue.*

gramme des vitesses, pour obtenir V. On possédait donc, dans la vitesse V, à l'instant initial, l'équivalent du système de V′ et de V cos α — u. Or on n'a plus que V′ pour l'instant final, ce qui permet de dire que l'on a perdu la seconde composante V cos α — u

CHAPITRE V

TUYAUX

—

§ 1

FROTTEMENT DES LIQUIDES

71 — *Lois du frottement des liquides.* — Nous avons, dans les deux derniers chapitres, étudié les phénomènes qui caractérisent les *points singuliers* de l'écoulement. Il nous faut maintenant envisager les *longs parcours*, sur lesquels s'use progressivement l'énergie motrice.

Nous y distinguerons les *tuyaux de conduite*, dont la théorie formera l'objet de ce chapitre, et les *canaux à ciel ouvert*, auxquels nous consacrerons le chapitre suivant. Ces deux modes d'écoulement diffèrent essentiellement l'un de l'autre, en ce que la section transversale des tuyaux étant une courbe fermée, permet des tensions quelconques, tandis que, pour les canaux, la pression atmosphérique s'exerce directement sur la surface libre suivant toute son étendue.

La théorie du mouvement de l'eau dans les tuyaux sera encore basée sur le théorème de Bernoulli, mais à la condition, bien entendu, d'y tenir compte de la viscosité (éq. 11). Il est donc essentiel de déterminer avant tout la fonction R, qui représente la résistance par unité de longueur [1]. Il est remarquable, à cet égard,

[1] Il ne saurait entrer dans les proportions de ce Cours de présenter ici le développement des expériences qui ont servi de base à l'établissement de ces énoncés, de leur laborieuse discussion, en même temps que des investigations théoriques par

que les lois du frottement des liquides soient, en quelque sorte, sur tous les points, l'inverse de celles qui président au frottement des corps solides.

Le frottement de l'eau est proportionnel à la surface mouillée (¹).

Cette surface étant cylindrique aura pour mesure le produit de sa longueur l par le périmètre de sa section droite, que l'on est dans l'usage de représenter par χ. Le facteur χl entrera donc dans l'expression de R.

Le frottement de l'eau est indépendant de la pression (²).

lesquelles on s'est proposé de découvrir ces lois *a priori*. On peut consulter, pour ces divers objets, les documents suivants : Kleitz. Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXIV, 430). — Stokes. On the Theory of the internal Friction of Fluids in motion (*Cambridge's Transactions*, VIII, 292). — Darcy. *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*, 1848. — Darcy. *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*, 1857. — Darcy et Bazin. Recherches hydrauliques, etc. (*Mémoires présentés par divers savants à l'Institut*, XIX). — Boussinesq. Essais sur les lois trouvées expérimentalement par MM. Darcy et Bazin (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 29 août 1870). — Boussinesq. Sur l'influence du frottement dans les mouvements réguliers des fluides (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2ᵉ série, t. XIII, p. 377 ; — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXVII, 287). — Boussinesq. Sur le mouvement varié de l'eau dans les canaux et les tuyaux (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 3 et 10 juillet 1871). — Maurice Lévy. Essai théorique et appliqué sur le mouvement des liquides (*Annales des ponts et chaussées*, 1867). — Maurice Lévy. Hydrodynamique des liquides homogènes (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXVIII, 588). — Colonel Boileau. *Notions nouvelles d'hydraulique concernant les tuyaux de conduite, les canaux et les rivières*, in-4°, 1881. — Daniel Bernoulli. Dissertatio de actione fluidorum (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, II). — Du Buat. Principes d'hydraulique, § 34 à 36. — Coulomb (*Mémoires de l'Institut*, III). — Navier (*Mémoires de l'Institut*, VI). — Poncelet. De la communication latérale du mouvement dans les fluides (*Introduction à la mécanique industrielle*, 1841, p. 531). — De Saint-Venant. Mémoires sur l'hydrodynamique des cours d'eau (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXIV). — E. Matthieu (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LVII, 320). — Lechevallier. *Mémoires sur le mouvement des fluides*. Metz, 1828. — Gauckler. Du mouvement de l'eau dans les conduites et les canaux (*Annales des ponts et chaussées*, 1868). — Gueymard. *Mémoire sur la conduite des eaux dans des tuyaux métalliques de forme cylindrique*. — Genieys. *Essai sur les moyens de conduire et de distribuer les eaux*.

(¹) Tandis que, pour les solides, il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

(²) Tandis que, pour les solides, il est proportionnel à la pression mutuelle. Notons toutefois que les vérifications de Darcy à cet égard n'ont été poussées que jusqu'à quatre atmosphères (*Mémoires présentés par divers savants à l'Institut*, XV). D'après les observations du P. Secchi (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 2ᵉ semestre de 1837, p. 627), le frottement semblerait augmenter légèrement pour les très grandes pressions (de Caligny, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1838 et 1841. — *Recherches théoriques et expérimentales*, etc., t. I, p. 375).

Le facteur p ne figurera donc pas dans cette fonction. Cette circonstance présente une grande importance. On peut remarquer notamment qu'il n'y aura pas lieu, d'après cela, de redouter, *au point de vue de la meilleure utilisation de la charge*, les *conduites forcées* destinées à franchir le fond des vallées, quelque grande que soit la pression qui s'y développe. Leur résistance élastique à de pareils efforts a seule lieu de préoccuper l'ingénieur.

Le frottement de l'eau dans les tuyaux dépend de la vitesse moyenne qui s'y développe (1).

Cette notion de la *vitesse moyenne* est tout à fait capitale. Il ne faudrait pas croire, en effet, que le liquide s'avance d'un seul bloc, comme le ferait un piston solide. Au contact de la paroi, glisse une première pellicule liquide, ralentie dans son mouvement par le frottement direct contre le métal. Une seconde gaine fluide glisse à l'intérieur de la précédente, ralentie de même par l'action tangentielle qu'elle en éprouve, et ainsi de suite jusque dans la région centrale, où s'observerait la vitesse maximum. On a comparé, avec beaucoup de justesse, cette conception au déboîtement des tubes d'une lunette d'approche, lorsque l'on tire le tuyau central, qui entraîne tous les autres avec des vitesses décroissantes jusqu'à l'enveloppe extérieure, maintenue dans l'immobilité (2).

(1) Tandis que, pour les solides, il est ordinairement considéré comme indépendant de la vitesse. Cependant les nouvelles expériences de M. Marcel Deprez montrent qu'il y a beaucoup à rabattre de cette assertion.

(2) Il est toutefois nécessaire d'ajouter que cette conception, plus rationnelle que celle qui ferait avancer toute la masse d'un seul bloc, ne renferme pas encore le dernier mot de la réalité. Le mécanisme effectif de l'écoulement paraît présenter une tout autre complication. Des oscillations dues aux chocs contre les rugosités des parois, des mouvements à double courbure produits par des impulsions obliques, des tourbillonnements élémentaires plus ou moins réguliers y viennent jouer leur rôle. Nous avons reconnu notamment (n° 60) l'importance de ces derniers, au point de vue de la destruction de force vive qui est synonyme de l'expression de frottement. On peut se reporter, à cet égard, aux développements donnés par M. de Saint-Venant sur ce point très important et encore si obscur (Mémoire sur l'hydrodynamique des cours d'eau, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXIX, n° 6), ainsi qu'à ceux qui ont été présentés par M. le colonel Boileau (*Notions nouvelles d'hydraulique*, p. 4). Cet habile hydraulicien distingue nettement (*Ibidem*, p. 66) les *mouvements translatoires*, seuls utilisés pour faire passer un certain débit d'une section à une autre, des *mouvements intestins*, qui sont au contraire nuisibles, comme absorbant inutilement une partie du travail moteur. M. Bazin donne, sur ce sujet, d'intéressants développements (*Recherches expérimentales*, etc., p. 23). M. Boussinesq (Essai théorique, etc., *Comptes rendus de*

Au milieu de cette variation, l'on distingue une vitesse moyenne u, définie par l'équation :

$$(36) \qquad Q = \Omega u.$$

Elle est, par conséquent, *le quotient de la dépense par la section*. Cette relation est identique, pour sa forme, à l'équation de continuité (éq. 5); mais il y a, au fond, une différence importante. Cette dernière, en effet, exprime un théorème relatif au cas du parallélisme des tranches, tandis que l'égalité (36) constitue uniquement, pour un mode de mouvement dans lequel ce parallélisme ne s'observe pas, la définition arbitraire d'une quantité u destinée à donner une idée simple du résultat de cet écoulement.

En résumé, il résulte des trois lois précédentes que la résistance Rl, développée sur un tronçon de longueur l, peut être exprimée par la formule :

$$Rl = \varpi \chi l \varphi(u),$$

dans laquelle nous mettons en évidence, en vue de simplifications ultérieures, le poids spécifique ϖ, en désignant par φ une fonction convenablement choisie, mais provisoirement inconnue. Il vient,

l'Académie des sciences, LXXI, 389) a, le premier, étudié analytiquement l'écoulement, en tenant compte des tourbillons qui se détachent continuellement des parois, pour cheminer avec la masse liquide. Il a introduit, à cet égard, la considération très importante de la *moyenne locale* des valeurs que prend, en un même point, la vitesse, dans un temps assez court.

A la variation que subit la vitesse avec la distance à l'axe, il semble s'en ajouter une autre qui serait fonction du temps. M. le colonel Boileau développe en effet (*Notions nouvelles d'hydraulique*, p. 11) la proposition suivante : Dans un courant fluide en contact avec des parois, les vitesses de translation sont périodiques. L'auteur fait remarquer que les joncs dans les rivières, les herbes, les moissons sous l'action du vent, au lieu de se tenir courbés dans une situation d'équilibre, sont très souvent animés d'un mouvement oscillatoire. Ces fluctuations continuelles avaient été signalées également par M. Baumgarten dans le lit de la Garonne (*Annales des Ponts et chaussées*, 1847). Ce phénomène est désigné par les ingénieurs américains sous le nom de *pouls des rivières*. Ramazzini avait déjà remarqué, en 1691, les oscillations d'un cours d'eau en aval d'un coude brusque (*De fontium Mutinensium admiranda scaturigine tractatus physico-hydrostaticus*, in-4°, Modène. — De Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau*, 1883, t. I, p. 132). Rappelons enfin, dans cet ordre d'idées, les observations de Savart (n° 39) sur les oscillations provoquées par le passage de l'eau à travers un orifice en mince paroi.

par conséquent, pour la résistance par unité de longueur :

$$R = \varpi \chi \varphi(u). \tag{37}$$

72 — Différentes formes ont été proposées pour la fonction φ. Il n'y a pas lieu, d'ailleurs, de s'étonner de cette multiplicité; puisque la détermination empirique d'une fonction, d'après l'observation d'un nombre limité de valeurs, peut toujours se concevoir d'une infinité de manières.

La première forme :

$$\varphi(u) = au + bu^2, \tag{38}$$

est due à Coulomb [1]. Elle a été adoptée également par de Prony [2] et d'autres expérimentateurs [3], avec les coefficients suivants :

$a = 0,000\,017\,331\,4$	$b = 0,000\,348\,259$	De Prony.
$0,000\,018\,840\,0$	$0,000\,342\,500$	Daubuisson.
$0,000\,022\,358\,0$	$0,000\,280\,320$	Eytelwein.

De Chezy avait proposé, dès 1775, la formule monôme [4] :

$$\varphi(u) = Bu^2, \tag{39}$$

[1] Mémoire sur des expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents (*Mémoires de l'Institut*, III, 1798).

[2] A l'aide de 51 expériences, dont 7 de Couplet, 26 de Bossut, 18 de du Buat (De Prony. *Recherches physico-expérimentales sur la théorie des eaux courantes*, 1804), M. Léon Lalanne a réduit en tableau graphique la formule de de Prony (Supplément de Cousinery aux tables de Genieys. — *Annales des Ponts et chaussées*, 1866).

[3] De Prony a négligé, dans la détermination de ses coefficients, la hauteur due à la vitesse qui est créée dans le tuyau. Daubuisson en a tenu compte. Eytelwein a eu égard, en outre, à l'effet d'ajutage qui se produit à l'insertion du tuyau dans la paroi du réservoir, lorsque celle-ci n'est pas parfaitement évasée.

[4] On voit, en effet, que pour les valeurs de u voisines de l'unité, le premier terme de l'expression (38) est beaucoup plus petit que le second. Cependant, pour de très faibles vitesses, telles que celles de l'écoulement à travers des tubes capillaires, c'est précisément l'inverse qui se produit, et le premier terme qu'il conviendrait de conserver seul, en faisant abstraction du second (Expériences du docteur Poiseuille sur l'écoulement dans les tuyaux capillaires. *Recueil des mémoires présentés par divers savants à l'Institut*, t. VIII et IX. — Boussinesq. Théorie des phénomènes constatés par les expériences

pour laquelle divers auteurs ont indiqué les valeurs suivantes (¹) :

$B =$	$0,000\,356\,684$	Eytelwein.
	$0,000\,385\,500$	Dupuit.
	$0,000\,362\,400$	De Saint-Venant.

M. de Saint-Venant a fait remarquer (²) que l'utilité que présente, pour le calcul logarithmique, la forme monôme Bu^2, appartient également au type plus général :

$$\varphi(u) = Au^n, \tag{40}$$

qui a l'avantage de renfermer un paramètre arbitraire de plus, pour se plier à la représentation des observations. Il a indiqué, pour cette formule, les valeurs numériques :

$$n = \frac{12}{7}, \qquad A = 0,000\,295\,57.$$

Enfin Darcy a reconnu (³) qu'il était impossible, pour des mesures

de M. Poiseuille. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1ᵉʳ juillet 1867, p. 46. — Rapport de Arago, Babinet, Piobert et Regnault. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, XV, 1167. — De Caligny. Expériences sur les phénomènes du frottement de l'eau dans des tubes de petit diamètre. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1850, p. 169. — De Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau*, I, 379).

M. Bornemann a même proposé l'expression

$$\varphi(u) = a'u^{\frac{3}{2}} \quad b'u^2,$$

ou, plus simplement :

$$\varphi(u) = A'u^{\frac{3}{2}},$$

pour tenir compte des particularités que présentent les petites vitesses (*Journal central polytechnique*, 1845, 19ᵉ cahier. — *Allgemeine Bauzeitung* de M. Forster, 1852, p. 153).

(¹) Eytelwein. Recherches sur le mouvement de l'eau (*Annales des mines*, 1825, t. XI). — Nadault de Buffon, d'après Tadini (*Traité des irrigations*). — Genieys. *Essai sur l'art de conduire les eaux*. — Dupuit. *Études sur le mouvement des eaux courantes*, 1848. — Courtois. *Traité des moteurs*, t. II, article 99.

(²) De Saint-Venant. Sur un mode d'interpolation applicable au mouvement des eaux (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, XVII, 1108. — *Annales des mines*, 4ᵉ série. t. XX, p. 185). — Du Buat avait déjà remarqué que *les résistances sont en moindre raison que les carrés des vitesses* (Principes d'hydraulique, art. 27).

(³) Au moyen de 198 expériences exécutées par lui (Darcy. *Du mouvement de l'eau*

délicates, de faire abstraction des dimensions de la section. Les coefficients de la formule de De Prony (éq. 38) :

$$\varphi(u) = a_1 u + b_1 u^2,$$

deviennent alors des fonctions du diamètre D du tuyau (supposé circulaire) sous la forme :

$$(41) \quad \begin{cases} a_1 = 0,000\,032 + \dfrac{0,000\,000\,015\,04}{D^2}, \\ b_1 = 0,000\,443 + \dfrac{0,000\,012\,400\,00}{D} \end{cases}$$

Si l'on emploie, au contraire, le type monôme (39) :

$$\varphi(u) = B_1 u^2,$$

il convient, dans le même ordre d'idées, d'adopter la valeur :

$$B_1 = 0,000\,507 + \frac{0,000\,012\,94}{D}.$$

Darcy a également constaté une certaine influence de la nature des parois. Les coefficients précédents, qui conviennent pour la fonte altérée par de légers dépôts, doivent être diminués de moitié pour la fonte lisse ou le fer étiré.

73 — *Application.* — Comme application immédiate, ces formules permettent de traiter le problème suivant [1]. ***Établir, de manière à réduire les frais autant que possible, la conduite destinée à relier à un château d'eau une machine à vapeur élévatoire*** [2].

dans les tuyaux. — Bresse. *Mécanique appliquée aux constructions*, II, 124. — Bour. *Cours de mécanique et machines de l'École Polytechnique*, III, 358. — Moseley. Mouvement permanent de l'eau dans les conduites (*Revue universelle des mines, de la métallurgie*, etc., par de Cuyper et Habets, 1re série, t. XXXI, p. 419).

[1] Collignon. *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, II, 218.

[2] On appelle *château d'eau* un point élevé, souvent utilisé par les municipalités

La dépense pécuniaire occasionnée par l'établissement d'une conduite, fourniture et pose comprises, est considérée pratiquement comme proportionnelle à sa surface χl. Elle pourra donc être représentée par :

$$\alpha\chi l,$$

si α désigne cette dépense par mètre carré.

Quant à l'énergie à fournir, elle comprendra, en premier lieu, le travail utile de l'élévation du liquide. Mais celui-ci étant déterminé, n'a pas à intervenir dans la recherche du minimum, et il est dès lors inutile de le mentionner. Il faut, en second lieu, vaincre la résistance $\varpi\chi l\varphi(u)$, en développant pour cela, par seconde, le travail $\varpi\chi lu\varphi(u)$. Si donc β représente la dépense pécuniaire occasionnée par la production d'un kilogrammètre par seconde [1], il s'ensuivra la dépense :

$$\beta\varpi\chi lu\varphi(u).$$

La fonction à rendre minima, dégagée de sa partie constante et du facteur commun l, sera donc :

$$\chi\left[\alpha + \beta\varpi u\varphi(u)\right].$$

Or, si l'on suppose que la section varie semblablement à elle-même, χ restera proportionnel à $\sqrt{\Omega}$, c'est-à-dire, d'après l'équation (36),

comme sujet d'ornementation architecturale, et sur lequel les machines élévatoires concentrent l'eau, qui s'écoule ensuite, par la seule influence de la pesanteur, à travers les conduites destinées à la distribuer dans la ville. Le travail dépensé pour cette élévation se retrouve théoriquement dans celui qui est ensuite accompli par la gravité, lorsqu'elle effectue cet écoulement en surmontant les résistances. On pourrait donc, à la rigueur, appliquer le travail des pompes à pousser l'eau directement dans les tuyaux, de manière à vaincre les résistances sans faire intervenir la pesanteur ; mais l'emploi du château d'eau présente l'avantage de couper la transmission, en supprimant la propagation à travers les conduites de distribution, des pulsations de la machine motrice. Aujourd'hui, cependant, l'emploi des cloches à air régulatrices a beaucoup restreint l'utilité des châteaux d'eau.

(1) Ou 75β celle d'un cheval-vapeur, en y comprenant, outre la dépense de premier établissement, le capital représentatif de l'entretien et des consommations. On ne perdra pas de vue qu'il s'agit là de chevaux *effectifs*, dont le nombre sera le produit de celui des chevaux *nominaux* par le *rendement* du moteur.

à $\sqrt{\frac{Q}{u}}$, ou, finalement, à $\frac{1}{\sqrt{u}}$. On peut donc substituer à l'expression précédente :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{u}} + \beta\varpi\varphi(u)\sqrt{u}.$$

En égalant à zéro la dérivée de cette fonction, il vient :

$$-\frac{\alpha}{2u^{\frac{3}{2}}} + \beta\varpi\left[\varphi'(u)\sqrt{u} + \frac{\varphi(u)}{2\sqrt{u}}\right] = 0,$$

ou, plus simplement :

$$2u^2\varphi'(u) + u\varphi(u) = \frac{\alpha}{\beta\varpi}.$$

Telle est l'équation qui fera connaître la vitesse type, après quoi la relation (36) permettra d'en déduire les dimensions de la section.

Si, par exemple, nous employons la formule (40), l'équation devient :

$$(2n+1)\,Au^{n+1} = \frac{\alpha}{\beta\varpi},$$

d'où :

$$u = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha}{(2n+1)\,\varpi A\beta}}$$

et, en effectuant :

$$u = 0{,}9\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{7}{19}}.$$

Il est remarquable que la vitesse la plus avantageuse soit indépendante du débit. Elle n'est fonction que du rapport des deux prix de revient, par mètre carré de tuyau et par cheval effectif. L'équation (36) montre, d'après cela, que l'aire de la section sera, dans

chaque cas, proportionnelle au débit. Ses dimensions varieront donc en raison de la racine de ce débit. Si nous remplaçons, dans cette formule (36), u par la valeur précédente, on voit que le diamètre D de la conduite circulaire s'en dégagera sous la forme :

$$D = \gamma \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{7}{38}} \sqrt{Q},$$

en désignant par γ une certaine constante.

En réalité, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ varie peu dans la pratique. Sa puissance $\frac{7}{38}$, qui est intermédiaire entre les racines cinquième et sixième, reste sensiblement constante, et le coefficient de $\sqrt{Q}$ peut être considéré comme fixe dans l'application. Bresse a proposé, à cet égard, la formule :

$$D = \frac{3}{2} \sqrt{Q},$$

dans laquelle D est exprimé en mètres, et Q en mètres cubes par seconde.

§ 2

PROBLÈME DE LA CONDUITE SIMPLE

74 — La vitesse moyenne u, d'après sa définition même (éq. 36), reste nécessairement constante dans toutes les sections d'un tuyau cylindrique. Nous pourrons admettre, comme l'hypothèse la plus simple, qu'il en est de même pour celles de chacun des filets rectilignes élémentaires, dont elle est la résultante. Si donc on applique à l'un de ces derniers, sur une longueur arbitraire, le théorème de Bernoulli, la variation de la hauteur due à sa vitesse sera nulle. Il en sera, par suite, de même du second membre de l'équation, lequel comprend la charge diminuée de la perte de

charge (éq. 11). La perte de charge se trouve ainsi égale à la charge. En d'autres termes, *toute la charge est perdue pour un segment quelconque de chacun des filets élémentaires.*

On est dans l'usage de désigner par J la *perte de charge sur l'unité de longueur.* Elle a pour valeur (éq. 12) :

$$J = \frac{1}{\varpi} \int_0^1 \frac{R}{\omega} ds.$$

R peut sortir du signe d'intégration, puisque tous les éléments dont il dépend restent les mêmes le long du filet (éq. 37). La pression seule varie, mais la résistance en est indépendante (n° 71). Il vient donc :

$$(42) \qquad J = \frac{R}{\varpi\omega} \int_0^1 ds = \frac{R}{\varpi\omega}.$$

On peut également écrire, en multipliant les deux termes de la fraction par une longueur quelconque l :

$$(43) \qquad J = \frac{Rl}{\varpi\omega l},$$

d'où cet énoncé : *la perte de charge par unité de longueur, pour un filet élémentaire, est le rapport de la résistance qui se développe sur un tronçon quelconque au poids de ce tronçon.*

Toutes les trajectoires étant des droites normales à une section quelconque, les pressions suivent rigoureusement, dans cette section, le régime hydrostatique (n° 23). Il n'existe donc, pour toute son étendue, qu'un seul niveau piézométrique. Il s'ensuit encore que tous les filets ont des lignes piézométriques identiques. Dès lors, puisque rien ne distingue, dans cette ligne, les divers filets auxquels elle se rapporte, on peut aussi bien, en ajoutant par la pensée terme à terme toutes les fractions égales à la précédente (43), *exprimer la perte de charge au moyen du quotient de la résistance totale développée sur l'ensemble du liquide qui remplit un seg-*

ment quelconque du tuyau lui-même, divisé par le poids de ce liquide [1].

Dès lors R prend, dans la formule (42), l'expression (37), et il vient :

$$J = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u), \tag{44}$$

ou encore, d'après la relation (36) :

$$J = \frac{\chi}{\Omega}\varphi\left(\frac{Q}{\Omega}\right).$$

Le facteur $\frac{\Omega}{\chi}$, par lequel il faut multiplier le périmètre pour obtenir l'aire de la section, a reçu de du Buat le nom de *rayon moyen*.

75 — Rien jusqu'ici, dans ces considérations, n'implique pour cette section une forme spéciale. En réalité, elle est ordinairement circulaire. Cependant on emploie aussi, pour l'aérage des mines, des tuyaux qui portent le nom de *canars*, et dont quelques-uns sont elliptiques, quand on veut les loger plus commodément dans le cintre des galeries, ou rectangulaires, lorsqu'on les construit en planches. Rien n'empêcherait, si la chose en valait la peine, de développer, d'après de telles hypothèses, les calculs qui vont suivre ; mais il suffira évidemment, pour les besoins de la pratique, de considérer ici le cylindre de révolution.

Si nous appelons D son diamètre, il viendra :

$$\chi = \pi D, \qquad \Omega = \pi\frac{D^2}{4}.$$

[1] L'équation du mouvement uniforme de l'eau dans un tuyau a été posée pour la première fois en 1886 par Du Buat, colonel du génie, dans ses *Principes d'hydraulique*. Elle a été l'objet d'une discussion très attentive de la part de M. le colonel d'artillerie Boileau, qui étudie le mécanisme intime de ce phénomène à la page 26 de ses *Notions nouvelles d'hydraulique*.

et, par suite :

$$J = \frac{4}{D} \varphi\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right),$$

équation que l'on met ordinairement sous la forme suivante :

$$(45) \qquad \frac{1}{4} DJ = \varphi\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right).$$

76 — Le caractère commun de toutes les formes empiriques dont la fonction $\varphi(u)$ reste susceptible, est d'être croissante avec la vitesse. La plus simple de toutes (39) varie comme le carré de u. D'après cela, $\varphi\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)$ décroîtra comme la quatrième puissance de D. L'équation (45) montre par conséquent que *la perte de charge par unité de longueur varie en raison inverse de la cinquième puissance du diamètre*. Si, par exemple, on diminue de moitié ce dernier, on rend la perte 32 fois plus rapide. En le réduisant au tiers, on aurait une déperdition 243 fois plus active, etc.

Cette remarque met bien en évidence l'extraordinaire efficacité de l'étranglement d'une veine liquide, lorsqu'il s'agit de détruire la force vive ([1]). L'un des freins les plus puissants que l'on puisse employer dans les machines consiste, en effet, en un simple robinet, à l'aide duquel on *lamine* à volonté le passage d'un courant ([2]).

77 — L'équation (45) résout le *problème de la conduite simple*, dans lequel on demande de faire connaître le diamètre D qu'il est

([1]) Ce principe est employé notamment dans la *lampe modérateur*. L'huile s'élève jusqu'à la mèche en raison de la pression d'un piston comprimé par un ressort. Il s'ensuit que, vers la fin du fonctionnement, l'action motrice s'affaiblit par la détente du ressort, en même temps que la hauteur de l'élévation devient plus grande par la diminution du liquide inférieur. De là une double cause d'irrégularité. Pour y obvier, on fait monter l'huile à travers un tube qui est *encombré* partiellement par une tige fixée au piston, et descendant avec lui. L'abaissement de ce dernier dégage donc le passage sur une certaine étendue, et diminue les résistances, en même temps que décroît la puissance, ce qui tend à rétablir leur égalité.

([2]) On se sert, pour arrêter le recul des bouches à feu, d'un piston qui refoule une masse de glycérine à travers des trous de faible diamètre (Laurent. Des presses hydrauliques. *Revue d'artillerie*, décembre 1883).

nécessaire de donner à un tuyau, afin qu'il débite par seconde un volume donné Q. Il suffit, pour cela, d'évaluer la quantité J.

Si le bief de départ et celui d'arrivée sont tous les deux à la pression atmosphérique, on divisera leur dénivellation par la distance qui sépare ces deux points, et le quotient exprimera la perte de charge par unité de longueur.

Si les deux extrémités se trouvaient soumises à des pressions différentes, comme lorsqu'on demande de fournir, au point d'arrivée, *l'eau en charge*, afin qu'elle puisse monter à des étages supérieurs, alimenter des jets d'eau, ou faire fonctionner des moteurs à piston, c'est la différence des niveaux piézométriques, et non plus celle des altitudes elles-mêmes, que l'on divisera par la longueur du tuyau.

Si enfin le parcours doit présenter des points singuliers d'une nature définie, on évaluera, pour chacun d'eux, la perte de charge spéciale à laquelle il donne lieu, on retranchera cet ensemble de la charge disponible, et c'est l'excédent qui formera le numérateur de la fraction. Énumérons donc successivement les principaux types de ces pertes de charge accidentelles.

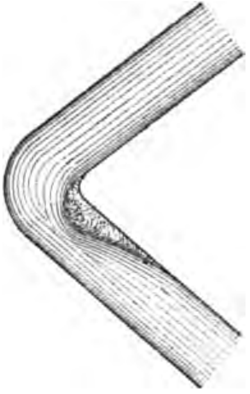
78 — Lorsque l'embouchure du tuyau n'est pas parfaitement évasée, et que celui-ci s'implante normalement dans la paroi du bief de retenue, il s'y produit les mêmes phénomènes que dans un ajutage cylindrique. De là une perte de charge égale à la moitié de la charge utilisée (n° 64) :

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{2g}.$$

Si la conduite, au lieu de déboucher dans l'air, de manière à déverser l'eau en cascade, aboutit au sein d'un bief stagnant, la vitesse est intégralement perdue, et donne lieu, d'après le théorème de Bélanger (n° 61), à la perte de charge :

$$\frac{u^2}{2g}.$$

Quand le tuyau présente divers changements de section en des points intermédiaires, des diaphragmes, des robinets, il se produit, pour chacun de ces obstacles, une perte de charge que nous avons appris à évaluer (n° 67), et qui forme un multiple connu de $\frac{u^2}{2g}$.


Fig. 43.

Si la conduite présente, au lieu de la forme rectiligne, ou du moins d'inflexions très adoucies, des *coudes brusques* (fig. 43), le filet interne, au lieu de suivre cette courbure trop raide, l'abandonne en raison de son inertie, et ne rejoint la paroi qu'un peu plus loin. Dans l'intervalle, s'établit un remous destructeur de la force vive [1]. De là une perte de charge, dont la loi a été exprimée empiriquement par Navier, sous la forme :

$$\left(0,0186 + \frac{0,0039}{r}\right) \frac{L}{r} \frac{u^2}{2g},$$

en désignant par L la longueur du coude, et par r son rayon de courbure. Du Buat avait déjà proposé, à cet égard, une formule qui revient à la suivante :

$$0,1208\, k \sin^2 \varepsilon \, \frac{u^2}{2g},$$

quand on prend pour données l'angle ε sous lequel le filet moyen de la travée rectiligne d'amont irait rencontrer, par son prolongement, la surface courbe, et le nombre de fois k que la déviation totale renferme cet angle ε. M. de Saint-Venant a substitué à cette expression compliquée la suivante :

$$0,0961 \frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}} \frac{u^2}{2g},$$

[1] Bossut paraît être le premier qui ait élucidé cette influence des coudes (*Traité élémentaire d'hydrodynamique*, 1775).

dans laquelle D désigne le diamètre du tuyau (1). Rankine a déduit (2) des expériences de Weissbach la formule :

$$\left(0{,}9457 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2{,}0470 \sin^4 \frac{\theta}{2}\right) \frac{u^2}{2g},$$

en appelant θ l'angle que forment les deux tangentes extrêmes d'un coude brusque. Pour un coude arrondi, il introduit l'influence du diamètre D de la conduite sous la forme :

$$\left[0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{D}{2r}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{L}{\pi r} \frac{u^2}{2g}.$$

M. de Caligny a reconnu (3) l'influence particulière qu'exerce la longueur de la partie du tuyau située en aval d'un coude, lorsque cet élément descend au-dessous de certaines limites.

On voit que toutes les expressions qui précèdent renferment en facteur $\frac{u^2}{2g}$. Nous pouvons donc désigner l'ensemble de ces pertes de charge accidentelles par $\alpha \frac{u^2}{2g}$, au moyen d'un coefficient α qui sera connu dans chaque cas. Si donc l continue à représenter la longueur totale de la conduite, et j le rapport à cette quantité de la différence des niveaux piézométriques des extrémités, il viendra :

$$\begin{aligned} J &= j - \frac{\alpha}{l} \frac{u^2}{2g} \\ &= j - \frac{\alpha}{2gl} \left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 \\ &= j - \frac{8\alpha Q^2}{g\pi^2 l D^4}. \end{aligned}$$

(1) Boussinesq (*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences par divers savants*, XXIII, 596).

(2) *A Manual of applied Mechanics.*

(3) De Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes oscillantes*, t. I, p. 116 et 126 ; t. II, p. 555

L'équation (45) devient par là :

$$\frac{D}{4} j - \frac{2\alpha Q^2}{g\pi^2 l D^5} = \varphi\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right). \tag{46}$$

Mais elle prend diverses formes suivant le choix de la fonction φ. Il convient de les passer en revue.

79 — Avec la formule de De Prony (38), le second membre contient D^4 au dénominateur. Si l'on rend l'équation entière, et que l'on ramène tous ses termes dans le premier membre, elle sera du cinquième degré [1] avec une seule variation de signe. Elle admet donc, d'après le théorème de Descartes, une racine positive unique, qui résoudra sans ambiguïté la question proposée. Elle s'obtiendra au moyen des méthodes approximatives instituées pour la résolution des équations numériques. Pour en faciliter l'application dans ce cas spécial, on a construit des tables numériques d'après différents dispositifs [2].

Si l'on emploie les formules de Darcy (41), les coefficients a et b du calcul précédent deviennent, dans l'équation du cinquième degré :

$$a_1 = a' + \frac{a''}{D^2}, \qquad b_1 = b' + \frac{b''}{D}.$$

On a donc à chasser de nouveau le dénominateur D^2, et la relation devient du septième degré. Elle ne présente encore qu'une seule variation, et donne lieu aux mêmes observations.

[1] Rankine a dressé (*Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs*, traduction de G. Richard, p. 165) une table semblable qui présente, pour les 100 premiers nombres, la valeur du carré et de la cinquième puissance. M. Collignon donne également (*Cours de mécanique appliquée*, II, 551), une table qui fournit les inverses des cinquièmes puissances.

[2] De pareilles tables ont été insérées par Mary dans son *Cours de navigation intérieure à l'École des Ponts et chaussées*; par Dupuit, dans son *Traité de la conduite et de la distribution des eaux*; par Bresse, dans son *Traité de mécanique appliquée*, t. II; par Fourneyron, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de 1843; par M. Collignon, dans son *Traité de mécanique appliquée aux constructions*, t. II, p. 589 à 594; par M. Vigreux (*Théorie et pratique de l'art de l'ingénieur, du constructeur de machines et de l'entrepreneur de travaux publics*, série II, p. 42).

Quant à la formule monôme (39), elle peut être considérée comme un cas particulier de l'expression (40) due à M. de Saint-Venant, pour laquelle les opérations seront conduites de la manière suivante.

80 — L'équation générale (46) devient alors :

$$\frac{D}{4}j - \frac{2\alpha Q^2}{g\pi^2 l D^5} = A\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^n,$$

$$D\left(\frac{j}{4} - \frac{2\alpha Q^2}{g\pi^2 l D^4}\right) = \frac{4^n A Q^n}{\pi^n}\frac{1}{D^{2n}},$$

$$D^{2n+1} = \frac{4^{n+1}AQ^n}{\pi^n\left(j - \frac{8\alpha Q^2}{g\pi^2 l D^4}\right)}.$$

Cette transformation préliminaire ne saurait, bien entendu, être considérée comme une résolution de l'équation, puisque l'inconnue D figure encore dans le second membre ; mais elle se prête à l'évaluation de cette dernière, à l'aide d'approximations successives. On commencera, pour cela, par supprimer le terme négatif, en écrivant simplement :

$$(47) \qquad D_1 = \left(\frac{4^{n+1}AQ^n}{\pi^n j}\right)^{\frac{1}{2n+1}},$$

expression calculable par logarithmes, car elle présente la forme monôme. On a d'ailleurs évidemment, pour la racine rigoureuse D :

$$D_1 < D.$$

On substitue alors cette valeur D_1, à la place de l'inconnue, dans le terme négatif que l'on rétablit au dénominateur, et l'on écrit :

$$D_2 = \left(\frac{4^{n+1}AQ^n}{j - \frac{8\alpha Q^2}{g\pi^2 l D_1^4}}\right)^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Comme D_1 est trop petit, il est clair que l'on aura :

$$D_2 > D.$$

Pour une nouvelle approximation, l'on remplace encore, dans le terme négatif, l'inconnue par D_2, en posant :

$$D_3 = \left(\frac{4^{n+1}AQ^n}{j - \frac{8\alpha Q^2}{g\pi^2 l D_2^4}} \right)^{\frac{1}{2n+1}},$$

ce qui donne à la fois :

$$D_1 < D_3 < D,$$

et ainsi de suite. Les diverses valeurs ainsi trouvées s'échelonnent successivement comme le montre la figure 44, si on les représente

O D
D_1 D_3 D_5 D_6 D_4 D_2

Fig. 44.

par des longueurs comptées sur une ligne droite à partir d'une origine O. Elles convergent progressivement vers un point dont on appréciera par le sentiment la situation-limite, et qui fournira la valeur définitive de l'inconnue D.

Dans le cas spécial de l'absence de pertes de charge accidentelles, on a $\alpha = 0$, et D_1 (47) devient la valeur exacte. Si l'on effectue les opérations numériques, elle prend la forme :

$$D_1 = 0,2396687 \frac{Q^{\frac{12}{31}}}{j^{\frac{7}{31}}}.$$

Pour faciliter l'application du calcul logarithmique, M. de Saint-

Venant a dressé des tables [1] qui fournissent directement les valeurs des quantités :

$$\frac{0,239\,668\,7}{j^{\frac{7}{21}}}, \qquad Q^{\frac{12}{21}}.$$

§ 3

CONDUITES VARIABLES

81 — *Conduites à section variable.* — Imaginons que le centre d'une sphère décrive une courbe donnée, en même temps que son diamètre D varie d'après une fonction connue de l'arc s parcouru. Cette sphère enveloppera une ***surface-canal***, dont la ***caractéristique*** sera un grand cercle, tracé dans un plan normal à la courbe directrice à l'aide du diamètre en question, que nous appellerons le diamètre du canal.

Nous supposerons qu'un tel tuyau serve à l'écoulement permanent, mais non uniforme, d'un liquide. Toutefois nous nous imposerons la condition que les variations du rayon soient assez lentes pour que, sur un tronçon quelconque, celles qui en résultent pour la demi-force vive soient négligeables vis-à-vis du travail absorbé par les résistances. S'il arrive toutefois que ce programme, tout en restant convenablement observé pour l'ensemble du profil, se trouve en défaut sur quelque point particulier, nous nous contenterons alors de reléguer la variation de force vive correspondante au rang des pertes de charge accidentelles (n° 78).

Dans ces conditions, on pourra appliquer, *à titre approximatif*, la théorie précédente, qui est uniquement basée sur ce que le changement de force vive reste rigoureusement nul. Elle nous conduira donc à l'équation (45), dans laquelle seulement nous devrons dorénavant considérer D comme une variable, dépendant de s d'une manière connue *a priori*. Nous nous contenterons, à cet égard, de déve-

[1] *Annales des mines*, 4e série, t. XX, p. 354 et 356.

lopper les calculs pour l'hypothèse de M. de Saint-Venant (éq. 40). qui transforme ainsi cette équation :

$$\frac{1}{4} \mathrm{DJ} = \frac{4^n \mathrm{AQ}^n}{\pi^n \mathrm{D}^{2n}}.$$

Elle nous fournira la variation corrélative de la dénivellation piézométrique avec D, et par suite avec s. Désignons, à cet effet, par H la charge comprise entre une origine fixe et un point quelconque. Il viendra, avec cette notation :

$$\mathrm{J} = \frac{d\mathrm{H}}{ds},$$

et, par conséquent, pour un tronçon de longueur l :

$$\text{(48)} \qquad \mathrm{H} = \frac{4^{n+1} \mathrm{AQ}^n}{\pi^n} \int_0^l \frac{ds}{\mathrm{D}^{2n+1}}.$$

82 — Considérons, par exemple, un tuyau tronc-conique divergent. Si D_0 et D_1 représentent ses diamètres extrêmes, on aura, à la distance s du premier :

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}_0 + (\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_0) \frac{s}{l}.$$

On tire de là :

$$d\mathrm{D} = \frac{\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_0}{l} ds,$$

et, en substituant :

$$\mathrm{H} = \frac{4^{n+1} \mathrm{AQ}^n l}{\pi^n (\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_0)} \int_{\mathrm{D}_0}^{\mathrm{D}_1} \mathrm{D}^{-2n-1} d\mathrm{D},$$

c'est-à-dire, en effectuant :

$$\mathrm{H} = \frac{4^{n+1} \mathrm{AQ}^n l}{2n\pi^n (\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_0)} \left(\frac{1}{\mathrm{D}_0^{2n}} - \frac{1}{\mathrm{D}_1^{2n}} \right).$$

83 — On appelle *conduites équivalentes* celles qui débitent le même volume sous la même charge H. L'équation (48) fournit, à leur égard, le théorème suivant : *Deux conduites sont équivalentes lorsqu'elles admettent la même valeur pour l'intégrale :*

$$\int_0^l \frac{ds}{D^{2n+1}}.$$

Nous distinguerons, en particulier, dans un groupe de conduites équivalentes entre elles, le tuyau cylindrique, comme le plus simple de tous. Si Δ désigne son diamètre, l'intégrale devra avoir, pour tous les autres, la valeur :

$$\frac{l}{\Delta^{2n+1}}.$$

On peut appeler Δ le *diamètre moyen* du groupe. Ce tuyau moyen donne lieu aux théorèmes suivants.

84 — *Un tuyau cylindrique unique est toujours plus économique qu'une succession équivalente de tronçons cylindriques* [1].

Il suffit évidemment, pour établir cette proposition dans toute sa généralité, de la démontrer dans le cas de deux tronçons seulement. En effet, après avoir substitué à cet ensemble son tuyau moyen par raison d'économie, on groupera de la même manière celui-ci avec le troisième tronçon, et, de proche en proche, on arrivera à substituer, comme plus économique, un cylindre unique au système proposé.

Or on a, pour exprimer l'équivalence des divers systèmes formés de deux tronçons, de longueurs déterminées l', l'', et de diamètres arbitraires D', D'', la condition :

$$l'D'^{-(2n+1)} + l''D''^{-(2n+1)} = \text{const.},$$

[1] Il est d'abord évident, quant au fonctionnement, que ce dernier type donnerait lieu à une série de pertes de charge accidentelles (n° 61). Mais tel n'est pas le point de vue auquel nous nous plaçons dans ce théorème, qui ne concerne que les frais de premier établissement.

laquelle donne, par sa différentiation :

$$l'D'^{-2(n+1)}dD' + l''D''^{-(2n+1)}dD'' = 0.$$

D'autre part, nous avons vu (n° 73) que la dépense de premier établissement peut être considérée comme proportionnelle à la surface métallique, c'est-à-dire, sauf le facteur π, à l'expression :

$$l'D' + l''D''.$$

Pour rendre cette fonction minima, nous annulerons sa différentielle :

$$l'dD' + l''dD'' = 0.$$

Si maintenant nous éliminons dD' et dD'' entre ces deux relations, il vient :

$$D' = D'',$$

ce qu'il fallait démontrer.

85 — *Un tuyau cylindrique unique est toujours plus économique qu'un faisceau équivalent de tuyaux cylindriques de même longueur* (¹).

Il suffira, comme dans le cas précédent, d'effectuer la démonstration pour le cas de deux conduites seulement. Or, l'équation (47) montre que le débit Q est proportionnel à $D^{\frac{2n+1}{n}}$, que nous représenterons, pour abréger, par D^m. L'équivalence de la conduite unique au système des deux autres s'exprime donc par la condition :

$$D'^m + D''^m = D^m.$$

Les frais d'établissement étant d'ailleurs proportionnels respecti-

(¹) Ce qui n'empêche pas, en pratique, pour des conduites très importantes, de répartir ordinairement l'écoulement sur deux tuyaux distincts, afin de parer aux avaries et de faciliter les réparations.

vement à D' + D'' et à D, leur rapport aura pour valeur :

$$\frac{D}{D' + D''}.$$

Sa puissance $m^{\text{ième}}$ sera, d'après la dernière équation :

$$\frac{D'^m + D''^m}{(D' + D'')^m},$$

ou, plus simplement :

$$\frac{1 + x^m}{(1 + x)^m},$$

si nous représentons par x le rapport $\frac{D'}{D''}$. Or cette fraction est inférieure à l'unité, car le numérateur est moindre que le dénominateur. En effet, leur différence :

$$1 + x^m - (1 + x)^m$$

s'annule d'une part avec x, puisque m est un exposant positif, et en outre sa dérivée :

$$m\left[x^{m-1} - (x + 1)^{m-1}\right],$$

étant évidemment négative, cette différence est décroissante [1].

86 — *Conduites à débit variable.* — Jusqu'ici la dépense Q a été supposée invariable ; mais il existe des *conduites débitant en route*, pour lesquelles cet élément essentiel est, au contraire, successivement décroissant. Il devient alors nécessaire, dans l'intégration

[1] Dupuit estime qu'en représentant par l'unité la dépense due à l'établissement d'un tuyau unique, elle deviendra : 1,52 ; 1,93 ; 2,30 ; .... pour distribuer le même volume d'eau à l'aide de 2, 3, 4, ... conduites (*Traité de la conduite et de la distribution des eaux*, p. 71).

de l'équation (48), de faire rentrer Q sous le signe *somme*, dont on n'aurait plus le droit de le faire sortir. On obtient ainsi cette formule plus générale :

$$H = \frac{4^{n+1}A}{\pi^n} \int_0^l \frac{Q^n}{D^{2n+1}} ds.$$

Il doit d'ailleurs être entendu que Q, aussi bien que D, est exprimé directement en fonction de s.

Lorsque le tuyau est simplement cylindrique, cette relation prend la forme :

$$H = \frac{4^{n+1}A}{\pi^n D^{2n+1}} \int_0^l Q^n ds.$$

87 — Supposons, à titre d'exemple, que la déperdition soit uniformément répartie sur une longueur l, à l'extrémité de laquelle il ne parvient plus rien. Cette condition s'exprimera par la formule :

$$Q = Q_1 (l - s),$$

si Q_1 désigne le débit qui subsiste encore à un mètre de l'extrémité, ou bien $Q_1 l$ celui qui *entre dans la conduite*. L'équation précédente devient par là :

$$H = \frac{4^{n+1}AQ_1^n}{\pi^n D^{2n+1}} \int_l^0 (l - s)^n d(l - s),$$

c'est-à-dire :

$$(49) \qquad H = \frac{4^{n+1}AQ_1^n l^{n+1}}{(n+1)\pi^n D^{2n+1}}.$$

Telle est la charge qui sera capable de pousser, dans cette conduite perméable, le débit $Q_1 l$ par unité de temps.

88 — Cherchons encore, afin de mettre en évidence les effets de l'influence en question, la charge H' qui serait nécessaire pour faire parvenir, avec le même diamètre D, la même dépense $Q_1 l$ à l'extré-

mité d'un tuyau étanche d'égale longueur. L'équation (47) nous donne à cet égard :

$$D^{2n+1} = \frac{4^{n+1}AQ^n}{\pi^n J} = \frac{4^{n+1}A(Q_1 l)^n}{\pi^n\left(\frac{H'}{l}\right)} = \frac{4^{n+1}AQ_1{}^n l^{n+1}}{\pi^n H'}.$$

En comparant cette valeur de H' à celle de H qui est fournie par la relation (49), il vient :

$$H' = (n+1)H,$$

ou, en rendant à n sa valeur $\frac{12}{7}$ (n° 72) :

$$H' = \left(\frac{19}{7}\right) H = 2{,}714 H,$$

$$H = \left(\frac{7}{19}\right) H' = 0{,}368 H'.$$

Cherchons inversement le diamètre D' qu'il faudrait donner au tuyau étanche, pour porter ce débit à son extrémité sous la même charge H. L'équation sera alors (47) :

$$D'^{2n+1} = \frac{4^{n+1}AQ_1 l^{n+1}}{\pi^n H},$$

c'est-à-dire (49) :

$$D'^{2n+1} = (n+1) D^{2n+1}$$

$$D' = (n+1)^{\frac{1}{2n+1}} D,$$

ou enfin :

$$D' = \left(\frac{19}{7}\right)^{\frac{7}{31}} D = 1{,}252 D,$$

$$D = \left(\frac{7}{19}\right)^{\frac{7}{31}} D' = 0{,}798 D'$$

89 — *Branchements.* — Lorsqu'une conduite maîtresse doit alimenter des dérivations à la fois sur la droite et sur la gauche, il y a lieu de se demander comment il conviendra de la tracer, et de couper en tronçons l', l'' une transversale de longueur déterminée $l' + l''$, en vue de réduire au minimum la dépense de premier établissement pour l'ensemble de ces deux tronçons [1].

Remarquons, à cet effet, que l'équation (47), si l'on y remplace j par $\frac{H}{l}$, devient, en désignant par α une constante numérique :

$$D = \alpha Q^{\frac{n}{2n+1}} l^{\frac{1}{2n+1}} H^{-\frac{1}{2n+1}}. \tag{50}$$

Les débits Q' et Q'' qu'il s'agit de dériver dans les deux branchements sont assignés à l'avance. Nous admettrons en outre que les charges H', H'', consacrées à y produire le mouvement, ne sont pas influencées par la variation du point d'insertion [2]. On peut alors écrire, en représentant par β une constante qui prendra, pour chacun des deux tronçons, des valeurs β', β'' déterminées, mais distinctes :

$$D = \beta l^{\frac{1}{2n+1}}.$$

La dépense d'établissement d'une conduite étant proportionnelle à sa surface, c'est-à-dire à lD, on aura à rendre minima l'expression :

$$\beta' l'^{\frac{1}{2n+1}+1} + \beta'' l''^{\frac{1}{2n+1}+1}.$$

Nous annulerons donc sa différentielle :

$$\left(\frac{1}{2n+1} + 1\right)\left(\beta' l'^{\frac{1}{2n+1}} dl' + \beta'' l''^{\frac{1}{2n+1}} dl''\right) = 0.$$

[1] Dupuit. *Traité de la conduite et de la distribution des eaux*, p. 208.

[2] Dans le cas contraire, elles deviendraient des fonctions de l' et l'', qu'il faudrait connaître pour que le problème fût déterminé. L'on aurait alors à exécuter, à l'aide de ces valeurs, un calcul analogue à celui que nous effectuons ici pour le cas le plus simple.

Comme du reste $l' + l''$ est constant, on a en même temps :

$$dl' + dl'' = 0,$$

ce qui réduit la relation précédente à :

$$\beta' l'^{\frac{1}{2n+1}} = \beta'' l''^{\frac{1}{2n+1}},$$

c'est-à-dire :

$$D' = D''.$$

On obtiendra donc le maximum d'économie en dirigeant la conduite maîtresse de manière que les deux tronçons qu'elle sépare de part et d'autre puissent effectuer leur service avec un même diamètre.

90 — La formule (50) permet encore d'énoncer le principe suivant : *Le prix du transport du mètre cube d'eau à une distance donnée et sous une charge donnée est d'autant moins élevé que l'on opère sur des débits plus considérables.*

Elle fournit, en effet, pour les frais d'établissement lD rapportés à l'unité de volume, c'est-à-dire divisés par le débit Q :

$$\frac{lD}{Q} = \alpha l^{\frac{2n+2}{2n+1}} H^{-\frac{1}{2n+1}} Q^{-\frac{n+1}{2n+1}},$$

expression qui varie en raison *inverse* de la puissance $\frac{n+1}{2n+1}$ ou $\frac{19}{31}$ du débit Q.

Si, par exemple, au lieu d'un débit donné, l'on n'en conduisait plus à destination que la moitié, le déboursé par mètre cube se trouverait majoré dans le rapport $2^{\frac{19}{31}}$ ou 1,528, c'est-à-dire de plus de moitié.

§ 4

THÉORIE DES PROJETS DE DISTRIBUTION D'EAU

91 — *Problème direct.* — Le problème de la conduite simple, que nous avons envisagé ci-dessus (§ 2), constitue le cas le plus élémentaire de la question des *distributions d'eau* dans les villes, laquelle se posera, suivant les circonstances, d'une manière plus ou moins complexe. Le plan topographique, formé d'une projection horizontale avec cotes d'altitude, présentera à cet égard p points ou *carrefours*, dont chacun se trouvera réuni par des conduites à un certain nombre d'autres, de manière que l'ensemble renferme un total de q tuyaux. Les nombres p et q sont d'ailleurs sans aucune relation nécessaire l'un avec l'autre. On peut alors se proposer deux questions principales, que nous appellerons *problème direct* et *problème inverse* [1].

Le *problème direct* suppose une distribution déjà établie, en réalité ou sur le papier. Les longueurs $l_{k,k'}$ et les diamètres $D_{k,k'}$ des tuyaux sont connus, ainsi que les altitudes h_k de leurs extrémités respectives, c'est-à-dire des différents carrefours :

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad \ldots. \quad M_k, \quad \ldots. \quad M_p.$$

Il s'agit alors de déterminer d'une part les p hauteurs piézométriques y_k, que l'on verrait au besoin se manifester dans des tubes manométriques, ou *regards*, si l'on en établissait au-dessus de ces points, et, en outre, les q débits $Q_{k,k'}$, ou les q vitesses $u_{k,k'}$ qui prendront naissance dans ces conduites. Ces deux dernières sortes d'inconnues rentrent l'une dans l'autre, d'après les équations (36) que l'on écrirait pour chaque tuyau, puisque les diamètres sont connus. Nous écarterons donc dorénavant la considération des vitesses u, pour ne nous attacher ici qu'aux dépenses Q. Nous aurons ainsi, en définitive, à déterminer $p + q$ inconnues y et Q.

[1] Nous reprenons, pour fixer les idées, le cas des conduites cylindriques et étanches.

A cet effet, nous disposons d'abord de p conditions, obtenues en écrivant que la somme des débits des divers tuyaux aboutissant à chacun des centres est la même pour l'ensemble de ceux qui y amènent l'eau, et pour le groupe de ceux qui la reçoivent après son passage en ce carrefour. Ce sont des relations du premier degré et sans coefficients, c'est-à-dire aussi simples que possible, ne renfermant que les q inconnues Q.

A ce premier système nous en adjoindrons un autre de q relations, en posant, pour chacun des q tuyaux, l'équation fondamentale de la conduite simple (46). Ces égalités renfermeront encore les q inconnues Q, et, en outre, les p inconnues y, qui figureront dans les q pertes de charge j par unité de longueur:

$$j_{k,k'} = \frac{y_k - y_{k'}}{l_{k,k'}}.$$

Ces dernières formules seront du premier degré par rapport aux inconnues y, mais de degrés supérieurs, ou même fractionnaires, pour les débits Q.

Ayant ainsi $p+q$ relations entre les $p+q$ inconnues de la question, il ne restera plus qu'à effectuer l'élimination de ce système bien déterminé d'équations. On y procédera au moyen d'approximations successives, dont la méthode suivie pour le problème de la conduite simple (n° 80) peut donner une idée d'après le cas le plus élémentaire, et dont nous présenterons plus loin un exemple (n° 93).

Mais, en supposant le résultat obtenu, il sera encore nécessaire de le soumettre à un contrôle. En effet, nous avons posé le premier groupe de p formules d'une manière qui est, au fond, arbitraire; car rien ne fait connaître *a priori* dans quel sens coulera l'eau à l'intérieur de chaque tuyau. Les différences d'altitude des deux carrefours qu'il met en rapport sont insuffisantes pour nous renseigner à cet égard, attendu que l'on voit très souvent des *conduites montantes*. Ce sont les différences de niveaux piézométriques qui déterminent seules ces directions. Mais les hauteurs piézométriques y sont précisément au nombre des inconnues. Il sera donc indispensable de vérifier *a posteriori* si les valeurs trouvées pour ces dernières

sont partout en conformité avec les hypothèses originairement adoptées *comme les plus probables*. Une seule discordance, à cet égard, serait la preuve que la solution analytique obtenue se trouve en dehors de la question; et l'on devrait recommencer toute l'opération, après avoir modifié les hypothèses de la manière que l'on croirait alors la plus judicieuse.

92 — *Problème inverse.* — La seconde question est celle des deux qui se présente le plus souvent aux ingénieurs. Elle concerne *l'établissement d'une distribution d'eau*. Le plan topographique est encore donné, mais les q diamètres $D_{k,k'}$ sont maintenant inconnus. En revanche, les q dépenses $Q_{k,k'}$ sont directement assignées par le cahier des charges. Le nombre des inconnues y et D est donc encore égal à $p+q$.

Les q équations (46) subsisteront encore, mais elles changeront d'aspect par cette interversion de rôles entre les données et les inconnues D et Q. Quant aux p relations du premier groupe, elles s'évanouissent, car elles ne constituent plus alors que des identités nécessaires et sans intérêt entre les données Q.

L'on ne possède donc plus, entre les $p+q$ inconnues y et D, que q relations. Le problème reste, par suite, indéterminé; et p conditions *quelconques* pourront être introduites arbitrairement, au choix du calculateur. Cette circonstance, qui peut sembler extraordinaire au premier abord, n'a, au fond, rien qui doive surprendre. Elle se présenterait dès le problème de la conduite simple, si les niveaux piézométriques des deux extrémités n'étaient pas assignés à l'avance, comme nous l'avons supposé dans le paragraphe 2 de ce chapitre. On peut toujours, en effet, dans un tuyau d'un calibre donné, faire circuler n'importe quel débit, pourvu que l'on y consacre une charge suffisante. Or, dans le cas actuel, les hauteurs piézométriques y ne sont pas données *a priori*. Si, pour rentrer dans des conditions analogues à celles du paragraphe 2, nous imaginons un cas pour lequel la formule du projet assignerait directement le niveau piézométrique de chacun des p carrefours M, leurs p hauteurs piézométriques y passeront dans la catégorie des quantités données, et, les inconnues se réduisant aux q diamètres D, en

nombre égal à celui des équations (46) dont on dispose, le problème redeviendra déterminé.

Cette remarque nous indique l'une des voies les plus ordinaires par lesquelles l'indétermination se trouvera plus ou moins circonscrite; en ce que quelques-uns, au moins, des niveaux piézométriques y se trouveront désignés à l'avance.

Dans le cas contraire, on peut chercher à disposer de ces p hauteurs piézométriques y de manière à réduire au minimum le total des frais de premier établissement, c'est-à-dire (n° 75) la somme des surfaces. Cette quantité sera une fonction linéaire des q diamètres D, et, par leur intermédiaire, des p hauteurs arbitraires y, auxquelles les diamètres se trouvent reliés par les q équations (46). Or le minimum d'une fonction de p variables indépendantes s'obtient en annulant ses p dérivées partielles. Dans chacune de ces équations figureront, il est vrai, les q dérivées partielles des quantités D relatives à celle des variables y d'après laquelle se fait actuellement la différentiation. Mais on les éliminera chaque fois en différentiant par rapport à cette variable les q équations (46), ce qui fournira q relations du premier degré entre ces dérivées partielles pour les faire disparaître. On se procurera ainsi finalement p nouvelles conditions, qui achèveront de déterminer le problème.

On pourra enfin, à défaut de toutes les ressources précédentes, user librement de la faculté que l'on possède d'introduire p conditions arbitraires, pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires, en vue de simplifier, de la manière qui paraîtra la plus utile, les q équations (46), en y supprimant les parties qui apportent analytiquement les plus grands obstacles à la marche de l'élimination.

Ajoutons, comme dernière observation, que ces longs et laborieux calculs ne devront en général être attaqués qu'après que l'on aura modifié arbitrairement le programme proposé en doublant tous les débits demandés, ou, du moins, en les majorant dans une proportion importante. Si, en effet, l'on calculait strictement les diamètres en vue des dépenses exigées, il arriverait prochainement que les incrustations déposées par les eaux calcaires, magnésiennes, ou séléniteuses rétréciraient les passages et diminueraient les débits. Il est donc nécessaire, avant tout, de faire largement la part de cette

éventualité, afin qu'en aucun cas les sections ne puissent tomber au-dessous du nécessaire. Tant qu'elles resteront surabondantes, on sera toujours maître de régler, à l'aide de robinets, les débouchés et les débits effectifs, tandis qu'aucun moyen ne permettrait plus de rétablir ces derniers à travers des tuyaux devenus trop étroits.

§ 5

EXEMPLES DE PROJETS DE DISTRIBUTION D'EAU

93 — *Premier problème.* — Indiquons, sur l'exemple le plus simple [1], l'application de ces principes généraux, successivement pour les deux problèmes direct et inverse.

Trois réservoirs A_1, A_2, A_3 (fig. 45) sont donnés par leurs projec-

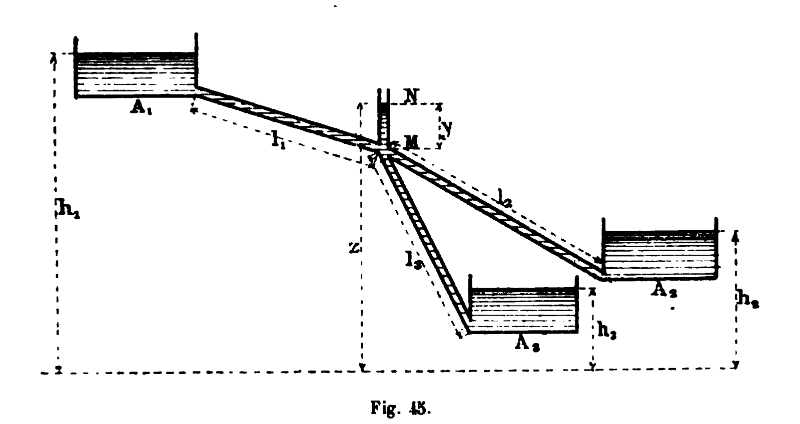


Fig. 45.

tions horizontales et par les altitudes h_1, h_2, h_3 de leurs niveaux. Ils sont reliés, à partir d'un point M, par trois conduites dont on connaît les longueurs l_1, l_2, l_3 ainsi que les diamètres D_1, D_2, D_3. On demande d'évaluer les vitesses u_1, u_2, u_3 et les débits Q_1, Q_2, Q_3 qui s'établiront dans ces tuyaux, ainsi que la pression p qui se développe au carrefour M. Nous désignerons cette dernière au moyen de son

[1] Collignon. *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, II, 208.

niveau piézométrique N, en introduisant l'altitude inconnue z de N au-dessus du plan de comparaison.

Nous ferons une première hypothèse en posant, conformément à la figure 45 :

$$h_1 > z > h_2 > h_3.$$

Dès lors les pertes de charge par mètre seront respectivement, pour les trois conduites :

$$\frac{h_1 - z}{l_1}, \qquad \frac{z - h_2}{l_2}, \qquad \frac{z - h_3}{l_3},$$

et il viendra, en leur appliquant la relation (45) :

$$(51) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{D_1(h_1 - z)}{4l_1} &= \varphi(u_1), \\ \frac{D_2(z - h_2)}{4l_2} &= \varphi(u_2), \\ \frac{D_3(z - h_3)}{4l_3} &= \varphi(u_3). \end{aligned} \right.$$

On a en outre, d'après l'équation (36) :

$$(52) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{4}\pi D_1^2 u_1, \\ Q_2 &= \frac{1}{4}\pi D_2^2 u_2, \\ Q_3 &= \frac{1}{4}\pi D_3^2 u_3, \end{aligned} \right.$$

et enfin :

$$(53) \qquad Q_1 = Q_2 + Q_3.$$

Tel est le système de sept équations destiné à déterminer les sept inconnues $D_1, D_2, D_3, u_1, u_2, u_3, z$.

Le procédé le plus rapide consiste à faire *a priori* une hypothèse

numérique sur la hauteur z, en lui attribuant arbitrairement une valeur z'. Les équations (51) feront connaître les vitesses correspondantes u, et ensuite les relations (52) fourniront les débits Q. Si l'on substitue alors les valeurs de ces derniers dans la condition (53), il est clair qu'elle ne se trouvera pas vérifiée, à moins d'un bien grand hasard, indiquant que l'on est tombé juste sur le véritable système de solutions. Supposons en premier lieu que l'on trouve par cette substitution :

$$Q_1 > Q_2 + Q_3,$$

cela montrera que l'on a fait, dans la hauteur disponible entre A_1 et A_2, trop de part à l_1 et pas assez à l_2 et l_3; en un mot, que l'on a pris pour z' une valeur trop grande. Elle serait, au contraire, trop petite, si le résultat de la substitution donnait :

$$Q_1 < Q_2 + Q_3.$$

Dans l'un comme dans l'autre cas, on forcera en sens contraire, de manière à obtenir, de la même manière, une valeur z'' telle que z se trouve compris entre z' et z''.

A partir de ce moment, on fera de nouveaux essais, en resserrant progressivement ces limites. Quand on les jugera suffisamment rapprochées pour le degré d'exactitude que l'on poursuit, on terminera en prenant, comme valeur de z, leur moyenne arithmétique. Il sera bon, cependant, quand on aura déjà notablement rapproché les limites, d'avoir égard, avant d'aller plus loin, aux pertes de charge accidentelles que nous avons passées sous silence dans ce qui précède, en vue de simplifier les premières approximations. On introduira donc, dans la première des relations (51), la perte de charge $\frac{1}{2}\frac{u_1^2}{2g}$ due à l'entrée (n° 63), si celle-ci n'est pas parfaitement évasée; et, dans chacune des deux autres, les pertes de charge dues au changement brusque (n° 61) :

$$\frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}, \qquad \frac{(u_1 - u_3)^2}{2g},$$

dans lesquelles on attribuera à u_1, u_2, u_3 les valeurs provisoires auxquelles on est actuellement parvenu pour ces inconnues. C'est avec ces nouvelles relations, ainsi améliorées au point de vue de l'exactitude, mais dorénavant un peu plus compliquées, que l'on achèvera la série méthodique des tâtonnements.

Si la marche de ces essais amenait à placer le carrefour M audessous du niveau A_2, contrairement à l'hypothèse initiale, qui serait alors remplacée par la suivante :

$$h_1 > h_2 > z > h_3,$$

on changerait, dans la seconde des équations (51), $z - h_2$ en $h_2 - z$, et l'on remplacerait de même l'équation (53) par la suivante :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

Cette question subsidiaire peut, du reste, être tranchée de suite. Si, en effet, on suppose $z = h_2$, celles des trois relations (51) qui subsistent encore avec cette hypothèse :

$$\frac{D_1 (h_1 - h_2)}{4 l_1} = \varphi (u_1),$$

$$\frac{D_3 (h_2 - h_3)}{4 l_3} = \varphi (u_3),$$

donneront pour u_1 et u_3, et, par suite, pour Q_1 et Q_3, des valeurs qui indiqueront si l'on a :

$$Q_1 < Q_3,$$

auquel cas :

$$z < h_2;$$

ou si, au contraire :

$$Q_1 > Q_3,$$

ce qui entraîne :

$$z > h_2.$$

On saura donc directement si le réservoir supérieur alimente les deux autres, ou si les deux plus élevés se déversent à la fois dans le bassin inférieur.

94 — *Second problème.* — Résolvons maintenant, comme second exemple, le problème inverse du précédent, que soulève la même figure 45.

Il s'agit alors d'amener, du réservoir A_1 aux bassins A_2, A_3, des débits Q_2, Q_3, assignés à l'avance et tels que l'on ait, bien entendu :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3.$$

On demande de faire connaître les diamètres D_1, D_2, D_3 qu'il est pour cela nécessaire de donner aux trois conduites, ainsi que les vitesses u_1, u_2, u_3 qui s'y établiront, et la pression p développée au carrefour M.

Le problème reste indéterminé, puisque l'on n'a plus entre ces sept inconnues que les six relations (51) et (52). Pour achever de le déterminer et trouver, à cet effet, une septième équation, nous nous imposerons de réduire autant que possible la dépense de premier établissement, c'est-à-dire de rendre minima l'expression :

$$l_1 D_1 + l_2 D_2 + l_3 D_3,$$

ou, d'après les équations (52) :

$$l_1 \sqrt{\frac{Q_1}{u_1}} + l_2 \sqrt{\frac{Q_2}{u_2}} + l_3 \sqrt{\frac{Q_3}{u_3}}.$$

Nous devons donc annuler la dérivée de cette fonction par rapport à z, ce qui donne :

$$l_1 \sqrt{Q_1}\, u_1^{-\frac{3}{2}} \frac{du_1}{dz} + l_2 \sqrt{Q_2}\, u_2^{-\frac{3}{2}} \frac{du_2}{dz} + l_3 \sqrt{Q_3}\, u_3^{-\frac{3}{2}} \frac{du_3}{dz} = 0.$$

Mais les relations (51) fournissent, par leur différentiation :

$$\varphi'(u_1)\frac{du_1}{dz} = -\frac{D_1}{4l_1} = -\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{Q_1}{\pi u_1}},$$

$$\varphi'(u_2)\frac{du_2}{dz} = +\frac{D_2}{4l_2} = +\frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{Q_2}{\pi u_2}},$$

$$\varphi'(u_3)\frac{du_3}{dz} = +\frac{D_3}{4l_3} = +\frac{1}{2l_3}\sqrt{\frac{Q_3}{\pi u_3}},$$

ce qui transforme ainsi l'équation de condition :

$$(54)\qquad \frac{Q_1}{u_1^2\varphi'(u_1)} = \frac{Q_2}{u_2^2\varphi'(u_2)} + \frac{Q_3}{u_3^2\varphi'(u_3)}.$$

Les formules (51) deviennent, d'autre part, d'après (52) :

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{u_1}\,\varphi(u_1) &= \frac{h_1 - z}{2l_1}\sqrt{\frac{Q_1}{\pi}}, \\ \sqrt{u_2}\,\varphi(u_2) &= \frac{z - h_2}{2l_2}\sqrt{\frac{Q_2}{\pi}}. \\ \sqrt{\mu_3}\,\varphi(u_3) &= \frac{z - h_3}{2l_3}\sqrt{\frac{Q_3}{\pi}}. \end{aligned}\right.$$

Ces quatre équations suffiront pour déterminer z, u_1, u_2, u_3; après quoi les relations (52) fourniront D_1, D_2, D_3.

On résoudra ce système au moyen de tâtonnements dirigés comme dans l'exemple précédent. A cet effet, on adoptera pour z une valeur numérique z', et l'on évaluera, à l'aide des dernières égalités (55), les vitesses u_1, u_2, u_3. On reconnaîtra ensuite si le premier membre de l'équation (54) devient supérieur ou inférieur au second. Dans le premier cas, u_1 sera trop petit, et par suite z' trop grand. On essayera dès lors une valeur moindre z'', de manière à comprendre z entre z' et z'', et l'on continuera ainsi comme pour le premier problème.

95 — *Troisième problème.* — La méthode précédente peut se

généraliser (¹) et s'étendre (fig. 46) au cas de n bassins $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_{n-1}, A_n$; le réservoir supérieur A_1 alimentant tous les autres, au moyen d'une conduite-maîtresse $A_1 A_n$, et de $n-2$ branchements insérés aux divers carrefours $M_2, M_3 \ldots, M_{n-1}$.

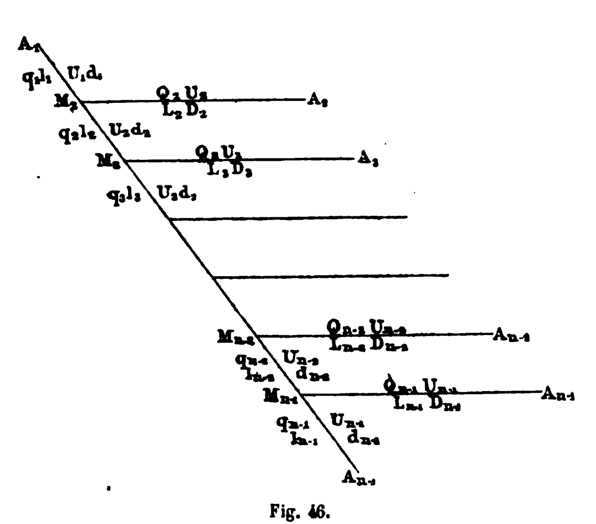


Fig. 46.

Nous représenterons par U_k et u_k les vitesses qui s'établissent respectivement dans chacun des branchements, et dans le tronçon subséquent de la conduite-mère. Q_k et q_k désigneront les débits correspondants, D_k et d_k les diamètres de ces tuyaux, L_k et l_k leurs longueurs, enfin z_k l'altitude des niveaux piézométriques des divers carrefours M_k.

Parmi ces quantités, Q, q, L, l sont données, tandis que U, u, D, d, z restent inconnues. Il existe d'ailleurs, entre les données, des identités nécessaires, de la forme :

$$q_k = q_{k+1} + Q_{k+1},$$

ou encore :

$$q_k = Q_{k+1} + Q_{k+2} + Q_{k+3} + \ldots\ldots + Q_{n-2} + Q_{n-1} + q_{n-1}.$$

Quant au nombre des inconnues, il comprend : $n-2$ vitesses U pour les branchements, $n-1$ vitesses u pour les tronçons; $n-2$ diamètres D des branchements, $n-1$ diamètres d des tronçons;

(¹) Bresse. Sur la détermination la plus avantageuse des diamètres d'un système de conduites à plusieurs branches (*Cours lithographié d'hydraulique* de Bélanger, p. 190):

enfin $n-2$ altitudes piézométriques z des divers carrefours; c'est-à-dire, en tout, $5n-8$ quantités.

Nous aurons entre elles : d'un côté, pour les $n-2$ branchements et les $n-1$ tronçons, $2n-3$ relations de la forme (46); d'autre part, $2n-3$ fois l'équation (36); soit, en tout, $4n-6$ égalités. Il restera donc, parmi les inconnues : $(5n-8)-(4n-6)$, c'est-à-dire $n-2$ indéterminées, lesquelles nécessiteront, si l'on entreprend de tout déterminer, $n-2$ conditions nouvelles. Nous nous procurerons ces dernières en disposant des $n-2$ altitudes piézométriques z relatives aux $n-2$ carrefours, de manière à rendre minima la somme des frais de premier établissement, c'est-à-dire la fonction :

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} & l_1\sqrt{\frac{q_1}{u_1}}+l_2\sqrt{\frac{q_2}{u_2}}+\ldots\ldots+l_{n-1}\sqrt{\frac{q_{n-1}}{u_{n-1}}} \\ & +L_2\sqrt{\frac{Q_2}{U_2}}+L_3\sqrt{\frac{Q_3}{U_3}}+\ldots\ldots+L_{n-1}\sqrt{\frac{Q_{n-1}}{U_{n-1}}}. \end{aligned} \right.$$

Un calcul dirigé de la même manière que pour le problème précédent (n° 94), et appliqué successivement à chacun des systèmes partiels $M_{k-1}\, A_k\, M_{k+1}\, M_k$, fournira, à cet égard, un groupe de $n-2$ équations de la forme :

$$(57)\qquad \frac{q_{k-1}}{u_{k-1}^2\varphi'(u_{k-1})}=\frac{Q_k}{U_k^2\varphi'(U_k)}+\frac{q_k}{u_k^2\varphi'(u_k)}.$$

On y joindra d'abord les $n-1$ relations (55) relatives à chaque tronçon, sous la forme :

$$(58)\qquad \sqrt{u_k}\,\varphi(u_k)=\frac{z_k-z_{k+1}}{2l_{k+1}}\sqrt{\frac{q_{k+1}}{\pi}},$$

dans lesquelles les valeurs extrêmes $z_1=h_1$ et $z_n=h_n$ représentent des données immédiates; en second lieu, les $n-2$ équations de branchements du même type :

(59) $$\sqrt{U_k}\,\varphi(U_k) = \frac{z_k - h_k}{2L_k}\sqrt{\frac{Q_k}{\pi}};$$

en troisième lieu, les $n - 1$ équations (36) des tronçons :

$$q_k = \frac{1}{4}\pi d_k^2 u_k;$$

et enfin les $n - 2$ relations analogues des branchements :

$$Q_k = \frac{1}{4}\pi D_k^2 U_k.$$

On aura ainsi constitué le système complet de $5n - 8$ équations, en nombre égal à celui des inconnues. Les deux derniers groupes feront connaître les diamètres d et D, une fois que les vitesses u et U auront été déterminées. Occupons-nous donc de la recherche de ces dernières, au moyen du système (57), (58) et (59).

Le tâtonnement sera conduit de la manière suivante. On commencera par attribuer à z_2 (z_1 restant en dehors comme constituant une donnée immédiate h_1) une valeur arbitraire z_2'. Dès lors :

l'équation	(58)	fournira u_1	pour	$k = 1$,
	(59)	U_2		2,
	(57)	u_2		2,
	(58)	z_3		2,
	(59)	U_3		3,
	(57)	u_3		3,
	(58)	z_4		3,
	(59)	U_4		4,
	(57)	u_4		4,
	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	(58)	z_{n-2}		$n - 3$,
	(59)	U_{n-2}		$n - 2$,
	(57)	u_{n-2}		$n - 2$,
	(58)	z_{n-1}		$n - 2$,
	(59)	U_{n-1}		$n - 1$.

A ce moment, au lieu d'employer de nouveau, pour suivre la même loi, l'équation (57), on invoquera une dernière fois la relation (58), en y faisant $k = n - 1$, afin de profiter de ce que l'on connaît *a priori* $z_n = h_n$, et l'on en déduira u_{n-1}.

C'est alors que, pour terminer, on substituera les valeurs de u_{n-2}, U_{n-1}, u_{n-1} dans les deux membres de la formule (57), en y supposant $k = n - 1$. On aboutira ainsi à l'une ou l'autre des inégalités :

$$\frac{q_{n-2}}{u_{n-2}^2 \varphi'(u_{n-2})} \gtrless \frac{Q_{n-1}}{U_{n-1}^2 \varphi'(U_{n-1})} + \frac{q_{n-1}}{u_{n-1}^2 \varphi'(u_{n-1})}.$$

Il restera enfin à interpréter le signe ainsi trouvé, pour savoir s'il convient de forcer ou de diminuer la valeur z_2' qui a servi de point de départ, en vue d'en obtenir une nouvelle z_2'' plus approchée, et de la prendre pour origine d'une nouvelle série de tâtonnements.

Or, l'équation (58) montre clairement que, si z_2 augmente, u_1 diminue; et la relation (59) prouve également que U_2 augmente. Supposons maintenant que, pour une certaine valeur de k, u_{k-1} diminue, que U_k augmente, et que z_k s'accroisse lui-même, ensemble d'hypothèses qui vient d'être vérifié pour $k = 2$; je dis que ce caractère subsistera encore, lorsque l'on changera k en $k+1$. En effet, l'équation (57) montre qu'alors u_k diminue ; la relation (58) prouve que z_{k+1} augmente, et la formule (59) que U_{k+1} s'accroît de son côté. Le caractère en question est donc général. Il s'ensuit que toutes les vitesses u diminuent, tandis que les vitesses U augmentent, ainsi que les pressions z. Si donc la vraie valeur inconnue de z_2 est supérieure à l'arbitraire z_2', c'est-à-dire s'il y a lieu d'augmenter cette dernière pour passer à une limite opposée z_2'', on voit qu'en particulier, pour $k = n - 1$, u_{n-2} diminue et que U_{n-1} augmente. Quant à la quantité u_{n-1} qui est fournie, en dehors de la loi de succession normale, par l'équation (58), elle augmente visiblement avec z_{n-1}, tandis que $z_n = h_n$ reste constant. Cette vitesse du dernier tronçon, le seul qui ne soit pas suivi d'un branchement, fait donc exception à la loi des autres quantités u. Dès lors, il devient évident que, dans l'équation (57) appliquée pour $k = n - 1$, le premier membre augmente, tandis que le

second diminue. Le premier était donc trop petit, et le second trop grand. Par conséquent, enfin, c'est le signe inférieur de la double inégalité à laquelle nous sommes parvenus qui conduira à augmenter z_2, en prenant $z_2'' > z_2'$. Le signe supérieur exigerait, au contraire, que l'on prît, pour la limite opposée : $z_2'' < z_2'$.

Dans ce calcul, dirigé de manière à obtenir le minimum *absolu* de la fonction (56), il peut arriver que certaines pressions deviennent négatives, ce qui est inadmissible (¹). Dans ce cas, on ne laissera pas descendre la quantité correspondante z_k jusqu'à un tel degré. On la relèvera volontairement, pour la ramener à la valeur la plus faible que l'on jugera prudemment acceptable. Il va sans dire que l'on supprimera alors, du calcul, celle des équations (57) qui aurait été fournie par la différentiation relative à cette variable, devenue une donnée immédiate. Le nombre des équations se trouve ainsi diminué d'une unité, en même temps que celui des inconnues. Le problème reste donc déterminé, et le résultat de cette analyse n'est plus de réduire la fonction (56) à son minimum absolu, mais simplement à la plus petite des valeurs qui soient pratiquement acceptables.

(¹) Il suffirait même qu'elles tombassent au-dessous de la pression atmosphérique; car cette raréfaction aurait pour résultat de dégager les gaz dissous, en produisant une perturbation complète du régime.

CHAPITRE VI

CANAUX

—

§ 1

RÉGIME UNIFORME

96 — Nous distinguerons deux cas pour l'écoulement permanent de l'eau dans les canaux à ciel ouvert ([1]), suivant que le mouvement est uniforme ou varié. Avec le régime uniforme, la section reste constante d'après l'équation (36), et l'on rentre dans le cas des tuyaux prismatiques, à la condition seulement de tenir compte de ce que la pression reste invariable sur toute l'étendue de la surface libre.

Le mouvement étant rectiligne et uniforme, nous pouvons (n° 21) admettre le régime hydrostatique, et, par suite, l'existence, dans chaque section, d'un niveau piézométrique unique pour tous ses points, lequel serait situé à $10^m,336$ au-dessus de la surface de l'eau. La ligne piézométrique sera donc une droite parallèle au profil du courant, et la charge entre deux sections, c'est-à-dire l'abaissement de cette ligne de l'une à l'autre, pourra aussi bien se mesurer sur la surface liquide elle-même. D'un autre côté, la profondeur restant constante, le fond du canal constitue encore une droite parallèle aux deux précédentes, qui pourra, comme ces dernières, servir à mesurer les charges. La perte de charge J par unité de longueur sera donc, en définitive, le quotient de l'abaissement du

([1]) Les canaux peuvent également être voûtés et souterrains. Cette circonstance ne change naturellement rien aux lois qui les régissent, tant qu'un filet d'air règne à la surface du liquide, en transmettant la pression atmosphérique dans toutes les sections.

fond par sa longueur, ou, en d'autres termes, le sinus de son inclinaison i :

$$J = \sin i.$$

Cette valeur rigoureuse pourra, du reste, sans aucun inconvénient, être remplacée par la suivante :

$$J = i,$$

car l'erreur, moindre que $\frac{i^3}{6}$, sera tout à fait inappréciable pour d'aussi faibles pentes.

L'équation fondamentale (44) devient par là [1] :

$$(60) \qquad i = \frac{\chi}{\Omega}\,\varphi(u);$$

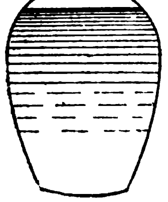
toutefois la fonction φ diffère alors des expressions qui ont été données (n° 72) pour les tuyaux proprement dits.

97 — On peut encore employer la formule de de Prony :

$$\varphi(u) = au + bu^2;$$

mais avec les valeurs suivantes :

$a = 0,000\,044\,449\,9$	$b = 0,000\,309\,314$	de Prony [2],
$0,000\,024\,265\,1$	$0,000\,365\,543$	Eytelwein [3];


Fig. 47.

(1) Cette formule explique notamment ce fait d'expérience, que l'on gagne sensiblement à ne pas remplir complètement les cunettes d'égout (fig. 47), et à laisser un segment plein d'air à la partie supérieure. On voit, en effet, que si l'on adjoignait à la masse inférieure une lame de liquide suffisante pour remplir ce petit espace, on ajouterait notablement au périmètre mouillé χ, et fort peu à la section Ω du courant. Le rapport $\frac{\chi}{\Omega}$ s'accroîtrait donc d'une manière importante, et, avec lui, la pente i nécessaire pour entretenir l'écoulement.

(2) D'après 31 expériences, dont 30 de du Buat, 1 de de Chézy.

(3) D'après 99 expériences, dont 36 de du Buat, 4 de Woltmann, 16 de Brunnings, 35 de Funck, 3 de Bidone, 3 de Bonati, 2 de l'École Romaine des Ponts-et-chaussées.

ou celle de Tadini [1] :

$$\varphi(u) = Bu^2,$$

avec le coefficient [2] :

$$B = 0{,}0004.$$

Celle de M. de Saint-Venant :

$$\varphi(u) = Au^n,$$

exige alors les valeurs :

$$n = \frac{21}{11}, \qquad A = 0{,}000\,401\,02.$$

L'expression adoptée par M. Bazin, d'après les vues de Darcy [3], prend la forme :

$$\varphi(u) = B_1 u^2 = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\rho}\right)u^2,$$

en désignant par ρ le rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$ de la section. Ces habiles expérimentateurs ont réalisé un progrès important, en nuançant la valeur des constantes d'après la nature des parois, que l'on n'avait pas, avant eux, prise en considération [4]. On a, dans ces conditions :

(1) Courtois la met sous la forme :

$$\varphi(u) = 0{,}007\,848\,\frac{u^2}{2g},$$

(*Traité des moteurs inanimés*, 1850).

(2) Cette expression fournit une valeur très simple du *frottement par mètre carré de surface mouillée*. Il a, en effet, pour valeur (éq. 37) :

$$\varpi\varphi(u) = 1000\,Bu^2 = 0{,}4\,u^2;$$

c'est-à-dire *les* $\frac{2}{5}$ *du carré de la vitesse. Son travail par seconde sera, par suite, les* $\frac{2}{5}$ *du cube de la vitesse.*

(3) Et fondée par lui sur 500 expériences.

(4) *Recherches hydrauliques*, etc. Introduction, p. 18.

Ciment lisse, bois raboté.	$\alpha = 0,000\,15$	$\beta = 0,03$
Parois unies, pierres de taille, briques, planches.	0,000 19	0,07
Parois peu unies, moellons. . . .	0,000 24	0,25
Parois en terre	0,000 28	1,25.

La crue des herbes, dans ce dernier cas, peut augmenter considérablement les résistances (1).

98 — Lorsqu'il s'agit d'établir un projet de canal, la question présente une large indétermination, car on ne possède que les deux relations (36) et (60) entre les variables Q, u, i, Ω, χ, dont le nombre peut même excéder 5, si la forme adoptée pour la section introduit, dans l'expression de Ω et de χ, plus de deux paramètres indépendants. On ne saurait d'ailleurs assigner, d'une manière générale, à ces diverses quantités le rôle d'inconnues ou de données. Les circonstances peuvent varier à cet égard.

On doit cependant, dans presque tous les cas, regarder la dépense Q comme une donnée. On connait, en effet, à l'aide d'un jaugeage, le débit du cours d'eau que l'on veut dériver intégralement; ou, sinon, la valeur de l'emprunt qu'il s'agit de lui faire est assignée directement.

Au contraire, la vitesse u se présentera généralement comme une inconnue. Dans un cas seulement, on s'en imposera la valeur *a priori*. Supposons, en effet, que l'on se propose de réduire au minimum le cube des déblais à effectuer. Comme la longueur du canal est déterminée, on ne dispose, pour cela, que de la section. Or pour qu'elle soit, dans l'équation (36), diminuée autant que possible, il faut que la vitesse atteigne la plus grande valeur compatible avec la conservation des berges. Celles-ci seraient ravinées et détruites, si l'écoulement atteignait un *régime torrentiel*, et se transformait en *eaux sauvages*. Il sera facile, dans chaque cas, par des essais directs effectués sur les terrains traversés, de connaître la valeur-limite qu'il sera sage d'adopter. On peut aussi s'en faire une idée à l'aide

(1) Les diverses valeurs du coefficient de u^2 en fonction de ρ ont été converties en tables numériques (Collignon, *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, II, 598)

du tableau suivant [1]. Il est très nécessaire, à cet égard, de ne pas perdre de vue que la corrosion est directement produite par la *vitesse de fond* W, distincte de la vitesse moyenne u qui figure dans nos calculs, et que nous y rattacherons plus tard (n° 115).

NATURE DES TERRAINS	VITESSE MOYENNE u — Mètres par seconde.	VITESSE DE FOND W — Mètres par seconde.
Terres détrempées.	0,101	0,076
Argiles.	0,203	0,152
Sables	0,407	0,305
Graviers	0,812	0,609
Cailloux	0,819	0,614
Pierres cassées	1,630	1,220
Poudingues, schistes tendres	2,026	1,520
Roches stratifiées	2,440	1,830
Roches dures	4,066	3,050

La pente i reste ordinairement inconnue. Cependant, si l'inclinaison de la droite qui joint les points extrêmes est tellement faible qu'il devienne insignifiant de réaliser sur elle des économies, incapables, par leur peu d'importance, de servir à la création de chutes motrices, on pourra employer cette pente telle qu'elle est à la création de la vitesse, pourvu qu'elle ne détermine pas un régime torrentiel. Dans les autres cas, on cherche au contraire à restreindre cette inclinaison au strict nécessaire, afin de conserver, au point d'arrivée, la plus grande charge possible.

[1] La notion de cette vitesse-limite permet de comprendre que, toutes choses égales d'ailleurs, la pente d'un cours d'eau naturel a tendance à diminuer, au fur et à mesure qu'il reçoit des affluents. En effet, si un torrent s'est créé à lui-même son lit par voie d'affouillement, ce phénomène a dû s'arrêter seulement lorsque la section est devenue telle, que la vitesse correspondante soit descendue au-dessous de la limite de corrosion. A ce moment $\varphi(u)$, et par suite $\frac{\Omega i}{\chi}$ (éq. 60) ont pris une valeur déterminée. Or, le cours d'eau venant à recevoir un nouvel affluent, son débit augmente, et, pour que celui-ci puisse s'écouler avec la même vitesse, il faut que le rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$ augmente, c'est-à-dire que i diminue.

99 — Il reste encore à examiner le rôle des deux éléments Ω et χ de la section. La forme de cette dernière est arbitraire *a priori*. On peut remarquer, en ce qui concerne son choix, que les facteurs Ω et χ n'interviennent que par leur rapport $\frac{\chi}{\Omega}$, auquel la pente reste proportionnelle (éq. 60). On a donc intérêt, pour économiser cette dernière, à déterminer le profil qui réduira ce rapport autant que possible, c'est-à-dire la courbe qui présentera, à égalité de surface, le minimum de périmètre, ou bien, à égalité de contour, l'aire maxima. On se trouve ramené par là au *problème des isopérimètres*, mais toutefois avec une modification spéciale ; car une partie seulement de la circonférence est ici représentée par χ, à savoir le *périmètre mouillé*. Quant à la droite fournie par la surface liquide, elle n'y figure pas.

Or, il est facile de ramener cette recherche aux conditions ordinaires. Si, en effet, nous ajoutons à la section inconnue ABC du courant (fig. 48) le tracé AB'C qui en est symétrique par rapport au plan d'eau AC, nous constituerons une figure fermée ABCB'A présentant une aire double, et un périmètre *complet* double du périmètre *mouillé* de la précédente. Le rapport de la circonférence à la surface est donc le même pour les deux cas, et il suffit de le rendre minimum dans ces nouvelles conditions. Or la géométrie enseigne, à cet égard, que la courbe qui renferme l'aire maxima sous un périmètre donné est le cercle. Le demi-cercle formera donc la section la plus avantageuse que l'on puisse théoriquement donner à un canal.

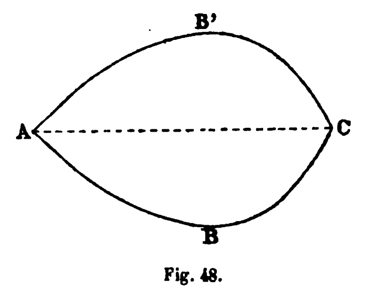


Fig. 48.

Malheureusement ce résultat ne se prête à aucune des exigences de la pratique. Il s'éloigne, d'une part, complètement des formes de la batellerie. En outre, les tangentes verticales des extrémités ne sauraient servir à maintenir des terres mouillées. On ne pourrait donc tout au plus s'inspirer de la forme hémi-circulaire que pour des canaux d'amenée sur les moteurs hydrauliques, établis,

non en terre, mais en maçonnerie, en excluant ceux de la navigation. Dans ces conditions, en effet, on peut remarquer que certaines cunettes d'égout présentent des profils courbes (fig. 47), qui rappellent, quoique de bien loin, cette dernière forme. Mais, en fait, on s'en tient presque toujours, dans la pratique courante, à celle du trapèze isocèle, qui est représentée par la figure 49.

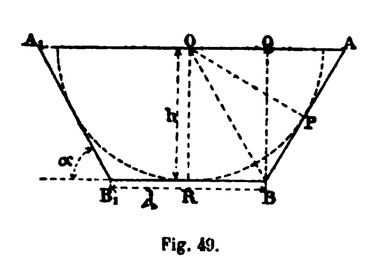


Fig. 49.

100 — Le *fruit* α que l'on donne alors aux deux berges est indiqué d'avance, soit par le talus naturel que prennent les terres au contact de l'eau, soit par les formes usitées dans la batellerie, si la raideur permise par ce talus naturel reste surabondante. La *largeur au plafond* λ, la profondeur h, peuvent aussi être empruntées aux convenances de la navigation. Mais il convient également de reprendre, à ce nouveau point de vue, la question précédente, en cherchant à déterminer, parmi les trapèzes isocèles d'angle donné, celui qui présente le maximum du rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$ [1].

Les bases du trapèze étant λ et $\lambda + 2h \operatorname{tang} \alpha$, on aura [2] :

$$\Omega = h(\lambda + h \operatorname{tang} \alpha),$$

$$\chi = \lambda + \frac{2h}{\cos \alpha}.$$

Si l'on suppose l'une de ces quantités constante, en considérant l'autre comme un minimum ou un maximum, on aura, dans les deux cas :

$$d\Omega = 0, \qquad d\chi = 0,$$

[1] Ce problème a été résolu par Daubuisson (*Traité d'hydraulique*, p. 138). Dupuit traite de même les cas où l'on se donne *a priori* la largeur ou la profondeur, au lieu de l'inclinaison (*Traité de la conduite et de la distribution des eaux*, p. 133).

[2] Il a été dressé une table numérique pour faciliter le calcul numérique des deux expressions Ω et χ, ainsi que de leur rapport qui exprime le rayon moyen (Collignon, *Traité de mécanique appliquée aux constructions*, II, 597).

ou, en développant :

$$h d\lambda + \lambda dh + 2h \operatorname{tang} \alpha dh = 0,$$

$$d\lambda + \frac{2dh}{\cos \alpha} = 0.$$

On en déduit, en égalant ensemble les deux valeurs de $\frac{d\lambda}{dh}$:

$$\frac{\lambda}{2} + h \operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{\cos \alpha},$$

résultat qui montre que *la demi-largeur du plan d'eau doit être égale au talus.*

On peut également donner à cet énoncé une forme plus simple. En effet, les triangles rectangles OAP, BAQ sont égaux, puisqu'ils ont un angle commun A et des hypoténuses égales, d'après ce qui précède. Il s'ensuit :

$$\mathrm{OP} = \mathrm{BQ} = \mathrm{OR}.$$

Le talus et le plafond se trouvent donc à la même distance du milieu de la surface libre, et par suite *le meilleur trapèze est circonscriptible à un cercle.* Cette condition en détermine complètement la forme, car il suffira de mener à un demi-cercle deux tangentes faisant avec le diamètre l'angle α, et une troisième, parallèle à ce diamètre.

Si, par exemple, on emploie la maçonnerie avec des parements verticaux, *le meilleur rectangle sera la moitié d'un carré.*

101 — *Premier exemple.* — On demande quelle pente on devra donner, dans une mine, à une galerie d'écoulement de $1^m,75$ de largeur sur $0^m,75$ de profondeur, pour la mettre en état de débiter, en 24 heures, un entretien d'eau de 20 000 mètres cubes. Il vient alors :

$$\chi = 1,75 + 2 \times 0,75 = 3^m,250$$

$$\Omega = 1,75 \times 0,75 = 1^{m^2},312.$$

Le débit par seconde a pour valeur :

$$Q = \frac{20\,000}{24 \times 60 \times 60} = 0^{m^3},231$$

et, par suite, la vitesse moyenne :

$$u = \frac{Q}{\Omega} = \frac{0,231}{1,312} = 0^{m},176.$$

Il vient donc, en employant la formule monôme (n° 97) :

$$i = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u) = \frac{3,250}{1,312} \times 0,000\,4\,(0,176)^2 = 0^{m},000\,03.$$

On voit que cette inclinaison théorique est absolument minime, et ne devient appréciable que sur de grandes longueurs. A un kilomètre, elle ne détermine qu'un abaissement de trois centimètres.

102 — *Second exemple.* — On demande quelle pente l'on doit donner au canal d'amenée d'une usine hydraulique qui, sur une largeur de $2^{m},00$ et une profondeur de $1^{m},00$, doit débiter $1^{m^3},00$ par seconde.

On a, dans ce cas :

$$\chi = 2,00 + 2 \times 1,00 = 4^{m},00$$

$$\Omega = 2,00 \times 1,00 = 2^{m^2},00;$$

et, pour la vitesse moyenne :

$$u = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1,00}{2,00} = 0^{m},50;$$

par conséquent, pour la pente :

$$i = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u) = \frac{4,00}{2,00} \times 0,000\,4\,(0,50)^2 = 0,000\,2$$

c'est-à-dire un cinquième de millimètre par mètre.

§ 2

RÉGIME VARIÉ

103 — *Théorie générale.* — Supposons maintenant la vitesse variable d'une section à l'autre ([1]). Comme le débit reste constant dans l'équation (36, p. 112), il s'ensuit une variation corrélative de la section Ω du courant, et notamment de la profondeur d'eau h. Nous admettons toutefois qu'il règne dans ces changements une assez grande continuité et une lenteur suffisante, pour que l'on puisse encore raisonner, à titre approximatif, comme avec le parallélisme des tranches, c'est-à-dire appliquer à l'ensemble du cours d'eau le théorème de Bernoulli, en même temps que le régime hydrostatique à chacune de ses tranches. La charge, de l'une à l'autre de ces dernières, s'évaluera donc encore comme ci-dessus (n° 96), à l'aide de l'abaissement du plan d'eau, mais non plus d'après celui du plafond, car la profondeur a cessé d'être constante. Nous introduirons, à cet effet, des *cotes descendantes* η comptées au-dessous d'un certain plan de comparaison supérieur (fig. 50).

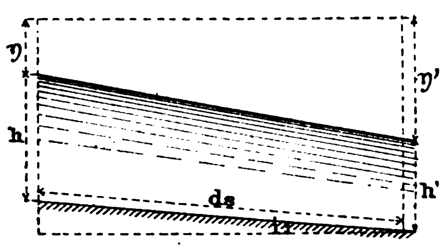


Fig. 50.

Si nous appliquons à un tronçon infiniment court le théorème de Bernoulli (éq. 11, p. 30), la charge entre ses sections extrêmes sera $d\eta$. La perte de charge due à la viscosité deviendra $\frac{R}{\varpi\Omega}\,ds$, et enfin

([1]) Bélanger. *Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes*, 1828. — Poncelet. *Cours de mécanique* fait à l'École d'artillerie de Metz, 1828. — Saint-Guilhem. *Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse*, 1834 et 1836. — Vauthier. *Annales des Ponts et chaussées*, 1836. — Coriolis. *Annales des Ponts et chaussées*, 1836. — De Saint-Venant. Sur des formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes (*Annales des mines*, 4e série, t. XX, p. 290). — Boudin. Sur l'axe hydraulique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique (*Annales des travaux publics de Belgique*, XX).

l'on aura, comme premier membre, la différentielle $\frac{udu}{g}$ de la hauteur due à la vitesse $\frac{u^2}{2g}$. Il viendra ainsi (¹) :

$$\frac{udu}{g} = d\eta - \frac{R}{\varpi\Omega}ds.$$

(¹) Pour remédier au défaut de rigueur du raisonnement ainsi basé sur l'hypothèse du parallélisme des tranches, avec une vitesse u commune à tout le système, Poncelet affectait le premier membre d'un coefficient de correction α, en écrivant :

$$\alpha\frac{udu}{g} = d\eta - \frac{R}{\varpi\Omega}ds,$$

(*Expériences hydrauliques*, 1832). Ce coefficient, supposé constant, provient de la substitution à la somme des forces vives individuelles de chaque filet (qui sont proportionnelles à son débit ωv et au carré v^2 de la vitesse), c'est-à-dire $\Sigma\omega v^3$, de la force vive d'ensemble Ωu^3. Il représente donc le rapport :

$$\alpha = \frac{\Sigma\omega v^3}{\Omega u^3}.$$

Pour pouvoir en effectuer la détermination exacte, il faudrait évidemment posséder la loi de variation de la vitesse dans les divers filets qui constituent le cours d'eau. Or c'est là une connaissance à peine ébauchée aujourd'hui (nº 114). Nous nous contenterons, à cet égard, d'établir, avec Poncelet, que ce coefficient est nécessairement supérieur à l'unité.

Posons en effet :

$$v = u + w,$$

en représentant par w la vitesse relative du filet par rapport à un système de comparaison qui serait animé de la vitesse moyenne u. Il y aura, d'après cela, parmi les quantités w, des valeurs positives et d'autres négatives. On tire de là, en multipliant par ω et intégrant :

$$\Sigma\omega v = \Omega u + \Sigma\omega w,$$

mais la définition de la vitesse moyenne (éq. 36) réduit ainsi cette égalité :

$$\Sigma\omega w = 0.$$

Or on a identiquement, en élevant au cube la valeur de la vitesse, et en ayant égard aux relations précédentes :

$$\begin{aligned}\Sigma\omega v^3 &= \Omega u^3 + 3u^2\Sigma\omega w + 3u\Sigma\omega w^2 + \Sigma\omega w^3\\ &= \Omega u^3 + \Sigma\left[\omega w^2(3u + w)\right]\\ &= \Omega u^3 + \Sigma\left[\omega w^2(2u + v)\right].\end{aligned}$$

Ce dernier terme ne renferme plus actuellement que des quantités essentiellement positives. Il vient donc :

$$\Sigma\omega v^3 > \Omega u^3,$$

Cette relation détermine implicitement la forme de la surface libre, quand on se trouve suffisamment renseigné sur la section Ω. En effet, cette connaissance permet de chasser la vitesse à l'aide de la formule (36), et l'on obtient ainsi une équation différentielle entre la profondeur h et l'arc s. Effectuons ces transformations.

104 — L'égalité (36) peut se mettre sous la forme :

$$u^2 = Q^2\Omega^{-2},$$

et donne, par sa différentiation :

$$2udu = - 2Q^2\Omega^{-3}d\Omega,$$

$$udu = - \frac{Q^2}{\Omega^3}\, d\Omega.$$

Pour que la section soit analytiquement définie, il faudra que l'on possède, entre x et h, les équations des deux profils qui la limitent de chaque côté (fig 51) :

$$x_1 = f_1(h), \qquad x_2 = f_2(h).$$

La largeur du plan d'eau :

c'est-à-dire finalement :

$$\alpha > 1.$$

Coriolis a évalué ce rapport à 1,16. Vauthier le faisait varier de 1,03 à 1,10. Bélanger estimait que l'on peut prendre $\alpha = 1,1$ (*Hydraulique*, lithographié, 1841-42, p. 75) M. Bazin rattache ce coefficient à celui B_1 qu'il a donné pour la résistance (n° 97) :

$$\alpha = 1 + 210B_1.$$

M. Boussinesq a remplacé α par une autre expression plus compliquée, pour le cas où la section varie progressivement (Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les tuyaux de conduite et les canaux découverts. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXIII, p. 34 et 101).

En réalité on fait, la plupart du temps, abstraction de ce facteur dans les recherches d'hydraulique ; et c'est sur ce terrain simplifié que nous nous placerons pour la suite de ces calculs, en supprimant dès à présent ce coefficient de correction.

$$x = x_1 + x_2,$$

sera, d'après cela, une fonction connue de h. On aura d'ailleurs :

$$d\Omega = x dh,$$

et l'on obtiendra, par une intégration, la valeur de Ω en fonction de h. Il viendra ainsi définitivement :

$$udu = -\frac{Q^2 x}{\Omega^3} dh,$$

expression qui permettra de remplacer udu en fonction de h et dh.

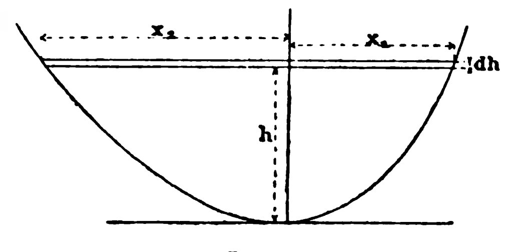


Fig. 51.

Pour rattacher de même la variable η à la profondeur h, nous aurons dans le triangle rectangle formé par le fond et l'horizontale (fig. 50) :

$$ids = d(\eta + h),$$

d'où :

$$d\eta = ids - dh.$$

Il reste enfin à remplacer la résistance R par son expression (37).

$$R = \varpi\chi\varphi(u),$$

$$\frac{R}{\varpi\Omega} = \frac{\chi}{\Omega}\varphi\left(\frac{Q}{\Omega}\right).$$

Si l'on effectue toutes maintenant ces substitutions, l'équation de Bernoulli devient :

$$-\frac{Q^2 x}{g\Omega^3}\,dh = (ids - dh) - \frac{\chi}{\Omega}\,\varphi\left(\frac{Q}{\Omega}\right)ds.$$

On en tire, en séparant les variables :

$$(61) \qquad ds = \frac{1 - \dfrac{Q^2 x}{g\Omega^3}}{i - \dfrac{\chi}{\Omega}\,\varphi\left(\dfrac{Q}{\Omega}\right)}\,dh,$$

et il ne reste plus qu'à intégrer, dans chaque cas, cette expression.

105 — *Canal rectangulaire.* — Supposons, pour fixer les idées sur le cas le plus simple, un chenal rectangulaire de largeur l assez grande pour que l'on puisse négliger devant elle la profondeur, et confondre l avec χ, dont la valeur rigoureuse serait sans cela $l + 2h$.

$$\chi = l, \qquad \Omega = lh, \qquad \frac{\chi}{\Omega} = \frac{1}{h}.$$

Nous adopterons, pour la résistance, la formule monôme Bu^2 (n° 97), et il viendra ainsi :

$$(62) \qquad ds = \frac{h^3 - \dfrac{Q^2}{gl^2}}{ih^3 - \dfrac{BQ^2}{l^2}}\,dh.$$

Si nous appelons H la profondeur qui permettrait de réaliser, dans les mêmes conditions, le régime uniforme, elle sera fournie par l'équation (60) :

$$i = \frac{1}{H}\,B\,\frac{Q^2}{l^2H^2},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{Q^2}{l^2} = \frac{i}{B} H^3, \qquad H = \sqrt[3]{\frac{BQ^2}{il^2}},$$

ce qui permet d'écrire plus simplement :

$$(63) \qquad ds = \frac{h^3 - \frac{i}{Bg} H^3}{i(h^3 - H^3)} dh.$$

En appelant z le rapport des profondeurs relatives à ces deux régimes :

$$z = \frac{h}{H},$$

on aura donc :

$$\frac{i}{H} ds = \frac{z^3 - \frac{i}{Bg}}{z^3 - 1} dz = \left(1 + \frac{1 - \frac{i}{Bg}}{z^3 - 1}\right) dz.$$

Intégrons à partir de la section qui a été prise pour origine des distances s, en appelant h_0 la profondeur en ce point. Il viendra par là :

$$(64) \qquad \frac{i}{H} s = z - z_0 + \left(1 - \frac{i}{Bg}\right) \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^3 - 1}.$$

On trouve, en suivant la méthode classique de l'intégration des fractions rationnelles, et introduisant les logarithmes *népériens* [1] :

$$(65) \quad \int \frac{dz}{z^3 - 1} = \frac{1}{6} \operatorname{Log} \left[\frac{(z-1)^2}{z^2 + z + 1} \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right).$$

[1] L'équation du régime varié des eaux courantes a été intégrée pour la première fois par Dupuit, en supposant la section rectangulaire (*Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*). Bresse a dressé une table numérique destinée à faci-

§ 3

DISCUSSION DE LA FORME DU PROFIL LIQUIDE

106 — Je ferai remarquer tout d'abord que les branches infinies que présente la courbe, admettront nécessairement comme asymptotes, soit la droite de régime uniforme, soit des horizontales. En effet, si le profil ne tend pas vers une parallèle au fond du lit, la profondeur arrivera, pour toute autre asymptote, à croître au delà de toutes limites, et le mouvement se ralentira indéfiniment. On aura ainsi une masse sensiblement stagnante, dont la forme ne peut être qu'infiniment rapprochée de l'horizontale.

Remarquons toutefois que, dans l'hypothèse de la droite de régime uniforme, il y a bien encore équilibre, mais avec l'adjonction des résistances, ce qui modifie la surface libre et la transforme en un plan incliné parallèle au fond. On comprend donc que le régime varié puisse encore tendre vers ce dernier état de choses, c'est-à-dire que la courbe admette également comme asymptote la droite de régime uniforme.

L'équation (63) indique d'ailleurs ces diverses circonstances. On peut d'abord la mettre sous la forme :

$$(66) \qquad \frac{\frac{dh}{ds}}{i} = \frac{h^3 - H^3}{h^3 - \frac{i}{Bg} H^3}.$$

liter l'application de la formule (*Cours de mécanique appliquée*, t. II, p. 221 et 470). La fonction $\psi(z)$ que fournit cette table reproduit, *après qu'on lui a ajouté la constante* $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ *et que l'on a changé le signe du résultat*, l'expression (65). Mais dans l'intégrale *définie* la constante $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ disparaît, et l'influence du signe revient au renversement des limites. On a donc, pour l'équation du profil de l'eau, en employant la fonction de Bresse :

$$\frac{i}{H} s = z - z_0 + \left(1 - \frac{i}{Bg}\right) [\psi(z_0) - \psi(z)].$$

M. de Saint-Venant a envisagé de même des sections trapézoïdales, et construit également des tables numériques destinées à abréger les calculs relatifs à ce cas (*Annales des mines*, 4e série, t. XX, p. 305 à 318, et 327 à 328).

On reconnaît ainsi que, tandis que le numérateur s'annule pour la valeur $h = H$, qui correspond au mouvement uniforme, le dénominateur s'annule de son côté pour $h = H'$, si H' désigne la valeur spéciale :

$$H' = H \sqrt[3]{\frac{i}{Bg}}.$$

Nous pouvons, d'après cela, écrire plus simplement :

$$(67) \qquad \frac{\frac{dh}{ds}}{i} = \frac{1 - \left(\frac{H}{h}\right)^3}{1 - \left(\frac{H'}{h}\right)^3}.$$

Dans ces conditions, on voit que, pour $h = H$, il vient $\frac{dh}{ds} = 0$, ce qui représente une direction parallèle au fond du lit. Pour $h = \infty$, il vient $\frac{dh}{ds} = i$, ce qui indique un angle alterne-interne avec l'inclinaison du fond (fig. 50), c'est-à-dire une horizontale.

La forme de la courbe dépendra évidemment des grandeurs relatives de H et H', ou de la valeur du rapport $\frac{i}{Bg}$. Nous distinguerons, à cet égard, deux cas généraux, suivant que cette fraction sera inférieure ou supérieure à l'unité.

107 — Considérons, en premier lieu, l'hypothèse des faibles pentes :

$$(68) \qquad i < Bg, \qquad H' < H.$$

Il y a lieu d'envisager, dans la courbe, trois zones, respectivement limitées par deux droites que nous mènerons parallèlement au lit, à des distances du fond marquées par H et H' (fig. 52).

1° Attachons-nous d'abord aux plus grandes profondeurs h :

$$H' < H < h,$$

c'est-à-dire à la portion de courbe située au-dessus de la droite H_1H_2. $\frac{dh}{ds}$ étant positif, h est incessamment croissant. Ce n'est donc pas vers la droite H_2 que peut tendre le tracé; par conséquent c'est (n° 106) vers une horizontale, que je représenterai par A_2. Quant à

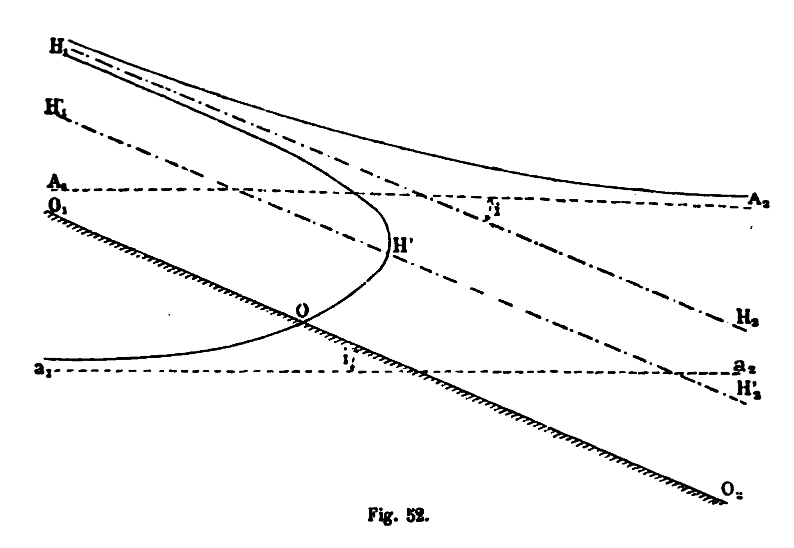


Fig. 52.

l'asymptote H_1, c'est vers l'amont que le profil s'en rapprochera. En effet, pour $z = 1$, l'équation (64, 65) donne $s = -\infty$, en de l'inégalité (68).

Telle est la forme la plus ordinaire des cours d'eau, quand ils abandonnent le régime uniforme. Elle se trouve représentée par la figure 53.

2° Envisageons, en second lieu, la zone intermédiaire :

$$H' < h < H,$$

c'est-à-dire la branche de courbe H_1H' (fig. 52). La dérivée $\frac{dh}{ds}$ a

changé de signe en passant par zéro; elle est devenue négative. h décroît donc à partir de l'asymptote d'amont H_1, ce qui constitue un *remous d'abaissement*. Mais, pour $h = H'$, le dénominateur

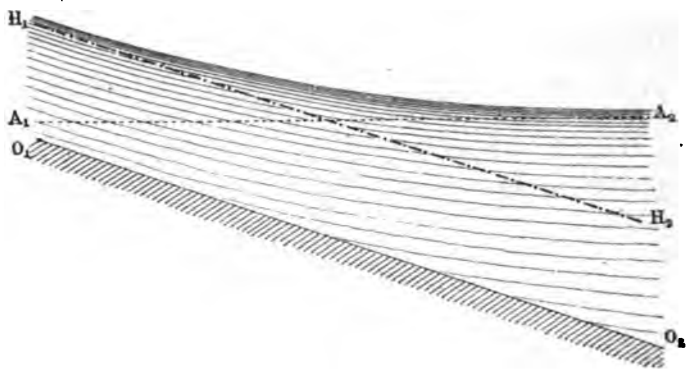


Fig. 53.

s'annule, et la courbe rencontre normalement, au point H', la droite $H_1'H_2'$.

Cette forme d'écoulement a, en effet, été observée. La surface devenant sensiblement verticale, on voit, en quelque sorte, le courant liquide *s'écrouler*. Le parallélisme des tranches se trouve com-

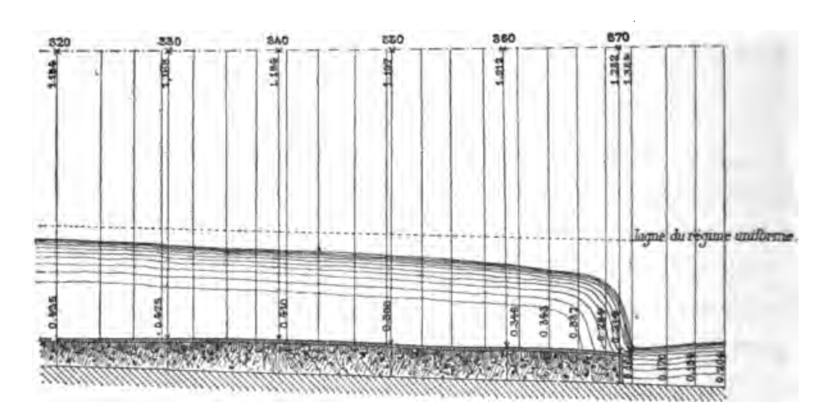


Fig. 54. — Ressaut d'abaissement des expériences de M. Bazin.

plètement disloqué, et l'équation des forces vives qui supposait, au moins par approximation, l'existence de ce parallélisme, n'est plus nullement fondée pour permettre de franchir ce point singulier du

phénomène. Il y a discontinuité dans le mouvement, et un régime distinct succédera au précédent. Cet accident porte le nom de ***ressaut d'abaissement***. M. Bazin a réussi à le réaliser (fig. 54), au moyen d'un brusque approfondissement du lit ([1]).

3° Arrivons enfin à l'hypothèse :

$$h < H' < H,$$

c'est-à-dire à l'arc $H'a_1$ (fig. 52). Le tracé part normalement de sa rencontre avec la droite $H_1'H_2'$, et tend vers une asymptote horizontale a_1a_2. En effet $\frac{dh}{ds}$, qui a changé de signe en passant par l'infini, est redevenu positif. On voit donc que h croît d'amont en aval, ou, en d'autres termes, qu'il décroît quand nous suivons, par la pensée, la courbe d'aval en amont. La profondeur ne pouvant d'ailleurs admettre d'autre limite finie que H, diminue sans cesse jusqu'à l'infini négatif; le second membre de l'équation (67) converge vers l'unité, et $\frac{dh}{ds}$ tend vers i, ce qui indique l'asymptote horizontale.

Cette branche coupera nécessairement, d'après cela, en un certain point O, le fond du lit O_1O_2 pour passer par-dessous; la profondeur s'annule, la vitesse devient infinie. Toutes ces circonstances s'opposent donc à la réalisation effective de cette partie de la solution analytique.

108 — Passons maintenant au second cas général, celui des grandes inclinaisons ([2]) :

$$i > Bg, \qquad H' > H.$$

([1]) *Recherches hydrauliques*, etc., série 81, expérience 2, planche XXV.

([2]) Pour le cas intermédiaire :

$$i = Bg,$$

on obtient (éq. 66) :

$$\frac{dh}{ds} = i,$$

c'est-à-dire la droite horizontale qui a pour équation :

$$h = is.$$

C'est alors du côté d'aval que la droite H_1H_2 sera asymptote (fig. 55), car, en raison de la nouvelle inégalité, l'équation (64,65) donne maintenant $s = +\infty$ pour $z = 1$.

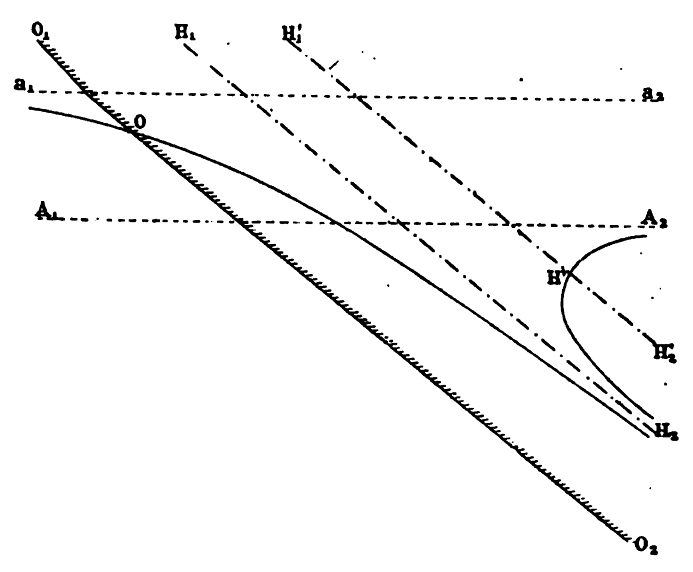


Fig. 55.

1° Supposons en premier lieu :

$$H < H' < h,$$

ce qui correspond à la branche $H'A_2$. Cette courbe rencontre normalement la droite $H_1'H_2'$, puisque l'hypothèse $h = H'$ annule le dénominateur. D'ailleurs, $\frac{dh}{ds}$ étant positif, h s'accroît jusqu'à une asymptote horizontale A_2. C'est un *remous d'exhaussement,* mais il débute par un *ressaut d'exhaussement.*

Ce dernier genre de phénomènes, quoique très rare, se rencontre cependant plus fréquemment que le ressaut d'abaissement (1). Il a été

(1) Nous venons de reconnaître qu'une condition essentielle de la possibilité du ressaut d'exhaussement est une pente suffisante :

$$i > Bg,$$

observé pour la première fois par Bidone [1]. Il joue, dans la théorie des récepteurs hydrauliques, un rôle d'une certaine importance sur

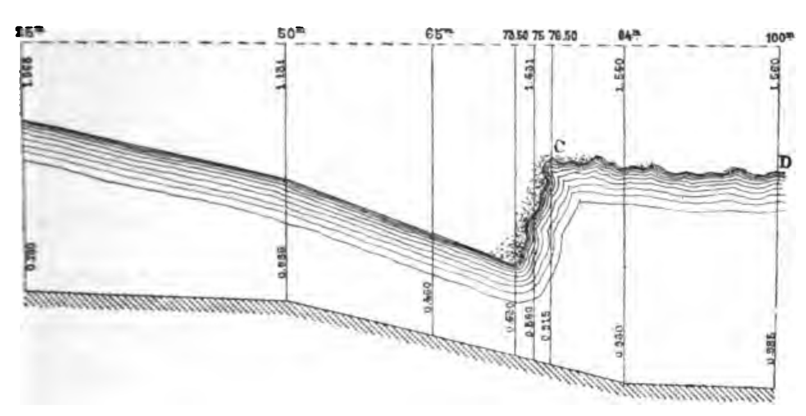


Fig. 56. — Ressaut d'exhaussement du pont de Crau.

lequel nous aurons l'occasion de revenir (nº 110). La figure 56

ou, d'après la valeur B = 0,0004 (nº 97) :

$$i > 0,0039.$$

Une pente de 4 millimètres serait donc, en pratique, un minimum nécessaire. Toutefois la valeur précédente de B présente le défaut de ne tenir aucun compte de la nature des parois. Les coefficients variables donnés à cet égard par M. Bazin (nº 97) ont permis à cet habile ingénieur de dresser (*Recherches hydrauliques*, p. 253) le tableau suivant des pentes minima relatives aux grandes profondeurs :

1er cas.	Ciment lisse, bois raboté	0,001 47
2e cas.	Pierre de taille, briques, planches	0,001 86
3e cas.	Maçonnerie de moellons peu unie	0,002 35
4e cas.	Parois en terre	0,002 75.

Pour des profondeurs plus restreintes exprimées en mètres, les résultats sont les suivants :

1er CAS		2e CAS		3e CAS		4e CAS	
h	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*
0,08	0,002	0,12	0,003	0,36	0,004	1,06	0,006
0,03	0,003	0,06	0,004	0,16	0,006	0,47	0,010
0,02	0,004	0,03	0,006	0,03	0,010	0,28	0,015

(1) *Mémoires de l'Académie de Turin*, 1820.

représente l'un des cas les plus remarquables qui aient été rencontrés; c'est un ressaut de $0^m,45$ que présente le canal de Craponne, au pont-aqueduc de Crau (1).

2° Soit, en second lieu, l'hypothèse :

$$H < h < H',$$

qui correspond à l'arc $H'H_2$ (fig. 55). Le profil se détache normalement du point H', et s'abaisse progressivement, car $\frac{dh}{ds}$, qui a changé de signe en passant par l'infini, est devenu négatif. C'est un remous d'abaissement analogue à celui que l'on observe aux approches d'un déversoir. Il ne saurait d'ailleurs y avoir d'autre asymptote que la droite H_2, car, pour que la forme du courant pût tendre vers une horizontale, il faudrait que h recommençât à croître, ce qui n'a pas lieu.

3° Supposons enfin :

$$h < H < H'.$$

Nous obtiendrons la branche H_2a_1. En effet, $\frac{dh}{ds}$ est devenu positif en passant par zéro. Par suite, h croît avec s jusqu'à l'asymptote H_2. Si donc on parcourt inversement la courbe d'aval en amont, la profondeur ira en décroissant; et, comme elle ne peut avoir aucune limite finie, l'asymptote sera nécessairement horizontale en a_1. Cette branche coupe donc, en un point O, le lit O_1O_2, ce qui rend ces conditions irréalisables dans la pratique.

109 — Si nous résumons les diverses circonstances que la discussion précédente nous a fait passer en revue, nous y rencontrons d'abord deux cas que l'application ne saurait reproduire, et sur lesquels il est inutile d'insister davantage; puis, en outre, les remous d'exhaussement et d'abaissement, ainsi que les ressauts d'exhaus-

(1) Bazin. *Recherches hydrauliques*, etc., planche XXVIII, fig. 19.

sement et d'abaissement; en d'autres termes, l'exhaussement ou l'abaissement effectués, soit d'une manière continue, soit sous la forme d'un accident brusque.

Examinons la manière dont ces circonstances pourront prendre naissance, suivant les valeurs des éléments du mouvement dont les abréviations H et H' avaient pris la place, et que nous commencerons par faire reparaître d'après les formules :

$$H^3 = \frac{BQ^2}{il^2} = \frac{Bh^2u^2}{i},$$

$$H'^3 = \frac{i}{Bg} H^3 = \frac{h^2u^2}{g}.$$

Ce qui donne, en reportant ces valeurs dans l'équation (67) :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Bu^2}{h}}{1 - \frac{u^2}{gh}}.$$

Nous représenterons, pour abréger, par n et d le numérateur et le dénominateur de cette fraction, en posant :

$$n = i - \frac{Bu^2}{h}, \qquad d = 1 - \frac{u^2}{gh},$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{n}{d}.$$

Je ferai remarquer d'une manière générale qu'en raison de l'équation de continuité, u varie nécessairement en sens inverse de h. Il en est donc de même de la fonction $\frac{u^2}{h}$. Par suite, n et d varieront dans le même sens que h. Nous pouvons, d'après cela, former les tableaux suivants :

1° $n > 0$, $d > 0$, $\frac{dh}{ds} > 0$, h, n, d croissent.

d étant croissant et déjà positif ne pourra s'annuler. Il n'y aura pas de ressaut. h étant croissant, il y a exhaussement. C'est le cas du *remous d'exhaussement*.

2° $n > 0$, $d < 0$, $\frac{dh}{ds} < 0$, h, n, d décroissent.

d étant décroissant et déjà négatif ne pourra s'annuler. Il n'y aura pas de ressaut. h étant décroissant, il y a abaissement. C'est le cas du *remous d'abaissement*.

3° $n < 0$, $d < 0$, $\frac{dh}{ds} > 0$, h, n, d croissent.

d étant négatif et croissant, pourra finir par s'annuler. Il y aura alors ressaut. h étant croissant, il y a exhaussement. C'est le cas du *ressaut d'exhaussement*.

4° $n < 0$, $d > 0$, $\frac{dh}{ds} < 0$, h, n, d décroissent.

d étant positif et décroissant, pourra finir par s'annuler. Il y aura alors ressaut. h étant décroissant, il y a abaissement. C'est le cas du *ressaut d'abaissement*.

§ 4

THÉORIE DU RESSAUT

110 — *Hauteur du ressaut.* — Cherchons maintenant à étudier en lui-même le phénomène si remarquable du ressaut. Nous avons vu (n° 107) que l'équation des forces vives ne permet pas de franchir ce point singulier, et de trouver la relation du régime qui le suit avec celui qui le précède. Il faudrait, pour pouvoir appliquer cette relation, connaître *a priori* l'expression du travail des forces intérieures développées dans la région pour laquelle se trouve détruite la conservation des tranches. Nous devrons donc, en vue de

tourner cette difficulté, opérer comme nous l'avons fait déjà dans deux circonstances analogues (nos 60 et 69), en recourant à l'emploi du théorème des quantités de mouvement, qui est rigoureusement indépendant des forces intérieures.

Nous projetterons sur un axe parallèle à l'inclinaison du lit (fig. 57), et nous envisagerons la masse liquide comprise entre deux sections A_0B_0, A_1B_1 pratiquées, tout à la fois, assez loin du ressaut pour que l'influence des agitations violentes dont il est le théâtre n'y altère pas le régime par filets parallèles, et, en même

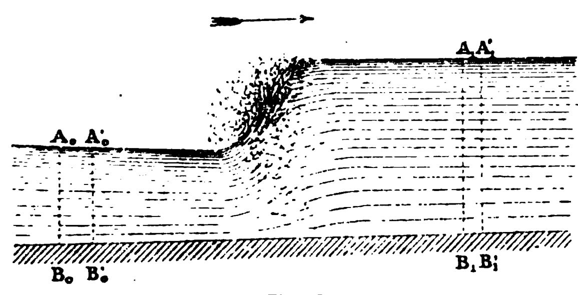


Fig. 57.

temps, assez près pour que l'on puisse négliger l'influence des frottements des parois qui, sans cela, devraient figurer dans l'équation à titre de forces extérieures. Quant aux réactions normales, elles disparaissent rigoureusement. Nous négligerons la projection de la pesanteur, puisque l'inclinaison de l'axe est insignifiante. La pression atmosphérique n'exerce, de son côté, aucun effet dans l'équation des quantités de mouvement projetées (n° 44). Il ne reste donc à envisager que les pressions supportées par les deux sections A_0B_0 et A_1B_1, en les évaluant comme dans le vide.

Nous pouvons admettre, pour chacune d'elles, le régime hydrostatique (n° 25). L'effort total sera donc, pour celle d'amont par exemple, le produit de sa surface Ω_0 par la pression $\varpi \frac{h_0}{2}$ développée au centre de gravité de ce rectangle. Le second membre de la relation deviendra d'après cela :

$$\frac{\varpi}{2}(\Omega_0 h_0 - \Omega_1 h_1)\,dt.$$

Quant au premier, il a été déjà évalué dans des conditions analogues (n° 60), sous la forme :

$$\frac{\varpi \Omega_0 u_0 dt}{g}(u_1 - u_0);$$

et l'égalité devient, par la suppression du facteur ϖdt :

$$\frac{2\Omega_0 u_0 (u_1 - u_0)}{g} = \Omega_0 h_0 - \Omega_1 h_1.$$

On a de plus, en appliquant l'équation de continuité à ces deux rectangles qui présentent la même largeur :

$$\text{(69)} \qquad \frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{h_1}{h_0} = \frac{u_0}{u_1},$$

et l'on en tire :

$$\Omega_1 = \Omega_0 \frac{h_1}{h_0}, \qquad u_1 - u_0 = u_0 \frac{h_0 - h_1}{h_1}.$$

Par la substitution de ces valeurs, Ω_0 disparaît, et il reste :

$$\frac{2u_0^2}{g}\frac{h_0 - h_1}{h_1} = \frac{h_0^2 - h_1^2}{h_0}.$$

Telle est l'équation destinée à relier la profondeur h_1 qui suit le ressaut, à celle h_0 qui le précède, et à la vitesse u_0 de cette section. Quant à la vitesse subséquente u_1, elle sera ensuite fournie par l'équation de continuité (69).

Il est remarquable que la relation à laquelle nous venons de parvenir, se dédouble en deux autres de la manière suivante :

$$(h_0 - h_1)\left(\frac{h_0 + h_1}{h_0} - \frac{2u_0^2}{gh_1}\right) = 0.$$

Si l'on annule le premier facteur, il vient :

$$h_1 = h_0.$$

C'est l'équation du régime uniforme; et elle devait, en effet, se présenter ici, puisqu'elle constitue une manière d'être possible de l'écoulement, qui est même de beaucoup la plus fréquente. C'est donc dans l'autre facteur que nous trouverons la loi du second régime admissible, celui du ressaut. Il vient ainsi :

$$(70) \qquad h_1^2 + h_1 h_0 - \frac{2u_0^2}{g} h_0 = 0,$$

équation du second degré qui a son dernier terme négatif, et, par suite, ses racines réelles et de signes contraires. Elle fournit, d'après cela, comme unique solution de la question, en rejetant la racine négative :

$$(71) \qquad h_1 = -\frac{h_0}{2} + \sqrt{\frac{h_0^2}{4} + \frac{2u_0^2 h_0}{g}}.$$

La hauteur du ressaut sera par conséquent la différence des deux profondeurs :

$$h_1 - h_0 = \sqrt{\frac{h_0^2}{4} + \frac{2u_0^2 h_0}{g}} - \frac{3}{2} h_0,$$

et le phénomène constituera un ressaut d'exhaussement ou d'abaissement suivant que l'on aura :

$$\sqrt{\frac{h_0^2}{4} + \frac{2u_0^2 h_0}{g}} - \frac{3}{2} h_0 \gtrless 0.$$

Transposons le second terme, élevons au carré les deux membres qui sont essentiellement positifs, et divisons par h_0 qui ne saurait être nul. Il viendra ainsi :

$$\frac{u_0^2}{g} \gtrless h_0,$$

résultat conforme à celui que nous a déjà fourni la discussion précédente (nº 109, 3e et 4e cas).

111 — *Perte de charge.* — Nous pouvons maintenant, comme nous l'avons fait dans les occasions analogues (nos 60 et 69), évaluer *a posteriori* la perte de force vive qui se produit dans un ressaut; ou, si l'on veut, la perte de charge qu'il faudrait inscrire dans l'équation de Bernoulli, pour pouvoir appliquer cette dernière d'un côté à l'autre du point singulier.

Si l'on désigne cette perte par ζ, la relation devra s'écrire :

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = (h_0 - h_1) - \zeta,$$

car la charge (qui sera négative dans le ressaut d'exhaussement) a pour valeur $h_0 - h_1$, puisque la même pression atmosphérique pèse sur les deux sections. On tire de là :

$$\zeta = \frac{u_0^2 - u_1^2}{2g} + h_0 - h_1.$$

Or, nous avons trouvé (70) :

$$\frac{2u_0^2}{g} = \frac{h_1}{h_0}(h_0 + h_1)$$

et la formule (69) permet d'en déduire :

$$\frac{2u_1^2}{g} = \frac{h_0}{h_1}(h_0 + h_1)$$

Il en résulte :

$$\frac{u_0^2 - u_1^2}{2g} = \frac{h_0 + h_1}{4}\left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{h_0}{h_1}\right),$$

et, par suite :

$$\zeta = \frac{(h_1 + h_0)^2 (h_1 - h_0)}{4h_0 h_1} + h_0 - h_1$$

$$= (h_1 - h_0)\left[\frac{(h_1 - h_0)^2}{4h_0 h_1} - 1\right],$$

ou, enfin, cette expression très simple :

$$\zeta = \frac{(h_1 - h_0)^3}{4h_0 h_1}.$$

112 — ***Établissement d'un barrage.*** — Supposons que, dans un courant dont le régime uniforme admettrait le niveau ABC parallèle au fond du lit (fig. 58), on établisse un barrage destiné à tendre les eaux en D. On en élèvera le seuil E à une telle hauteur, que l'épaisseur DE suffise à l'écoulement du débit, d'après la théorie des déversoirs (n° 52).

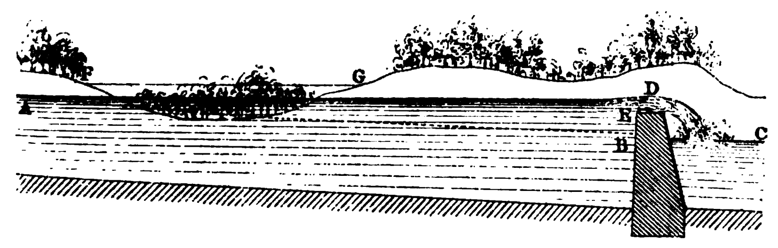


Fig. 58.

Supposons, comme premier cas, la pente assez faible pour satisfaire à l'inégalité (68, p. 168) ; la forme de la courbe (n° 107) n'admettra pas de ressaut. Pour la tracer, on confondra, par approximation, son asymptote AB avec une tangente ordinaire, et l'on traitera le profil comme une parabole déterminée par cette tangente et le sommet D. Rien n'empêche du reste, si l'on désire plus de rigueur, d'employer les tables de Bresse (n° 105, note 1) ; ou d'intégrer directement l'expression (62) à l'aide de la formule approximative de Simpson, en prenant successivement, pour limites, des

profondeurs graduées. L'on saura ainsi à quelle distance en amont se trouvent réalisés les niveaux correspondants, ce qui permettra de construire la courbe par points.

Ce tracé une fois obtenu, si l'on voit le profil liquide déborder au-dessus des berges, comme cela se présente en FG sur la figure 58, l'on connaîtra l'emplacement et l'importance des cavaliers de remblai qu'il sera nécessaire d'élever à l'avance, pour protéger les riverains contre l'inondation provoquée par le gonflement des eaux.

113 — Supposons, en second lieu, que la pente excède la valeur caractéristique B*g*, le raccordement s'effectuera (n° 108) au moyen d'un ressaut d'exhaussement (fig. 59). On aura, pour en déterminer

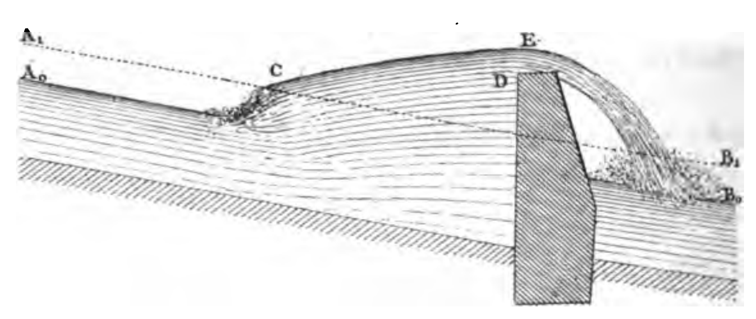


Fig. 59.

la hauteur, l'équation (71), dans laquelle h_1 représente la profondeur après le ressaut. On pourra donc tracer, parallèlement à la ligne de régime uniforme A_0B_0, la droite A_1B_1, sur laquelle devra se trouver le sommet C du ressaut. On construira, d'autre part, à partir du relèvement demandé E, au moyen des tables de Bresse ou de la formule de Simpson, la courbe à contre-pente CE; et son intersection avec A_1B_1 fera connaître l'emplacement nécessaire C du ressaut. On déterminera dès lors la production de ce phénomène en ce point, au moyen d'un changement de pente, et, au besoin, d'un élargissement brusque du lit, seuls moyens connus jusqu'ici pour en provoquer la formation.

§ 5

VARIATION DE LA VITESSE DANS UNE MÊME SECTION

114 — Indépendamment des recherches destinées à éclairer sur les modifications que subit la vitesse moyenne quand on passe d'une section à l'autre, il y a lieu de se préoccuper de la loi de variation des vitesses des divers filets élémentaires dans toute l'étendue d'une même section. Malheureusement cette partie de la question est l'une des moins élucidées de l'hydraulique, bien qu'elle ait été l'objet de nombreux et importants travaux, théoriques ou empiriques. Nous nous bornerons donc, à cet égard, à un aperçu sommaire.

On a longtemps admis que la vitesse maxima est celle du filet superficiel situé au milieu de la largeur du courant ; bien que certains hydrauliciens fussent, au contraire, d'avis que le mouvement de cette partie devait éprouver un certain ralentissement en raison de sa transmission à l'air atmosphérique. Defontaine crut avoir établi le premier énoncé, en l'absence de vent (1). Mais M. le colonel Boileau a trouvé le maximum à une certaine profondeur au-dessous de la surface, même avec l'influence accélératrice du vent soufflant d'amont en aval (2). M. Bazin partage cette manière de voir (3), et attribue ce résultat aux tourbillonnements intérieurs, destructeurs de la force vive (n° 60), lesquels trouveraient, pour leur production, plus de facilités dans les couches superficielles que dans les parties profondes.

On pensait de même, à l'origine, que l'accroissement de vitesse se prononçait de plus en plus, de la surface jusqu'au fond, suivant la formule établie pour les grands orifices (éq. 20, p. 57), erreur qui a été rectifiée par Pitot (4). Lorsqu'il a été reconnu que cette loi était beaucoup plus compliquée, divers expérimentateurs ont cherché à la formuler; mais on observe peu de concordance dans

(1) Daubuisson. *Traité d'hydraulique*, p. 176.
(2) Boileau. *Notions nouvelles d'hydraulique*, p. 34.
(3) Bazin. *Recherches hydrauliques*, p. 24.
(4) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1732.

les résultats obtenus. Woltmann, d'après des observations de Ximénès, de Brunnings et des hydrauliciens italiens, a proposé une loi parabolique :

$$u = A - Bh^2.$$

Defontaine l'admet également à partir de la surface (1), et M. Boileau à partir d'un point inférieur (2). La même relation a encore été obtenue par la Commission d'ingénieurs militaires chargée par le Congrès des États-Unis d'étudier, sous la direction de MM. Humphreys et Abbot, le régime du Mississipi (3). Gerstner et Raucourt ont employé, au contraire, un arc d'ellipse (4), Eytelwein une ligne droite (5), Funck une loi logarithmique (6), M. Maurice Lévy une formule à la fois algébrique et trigonométrique.

M. Bazin est entré dans une voie très judicieuse en insistant sur ce fait, que la vitesse ne dépend pas seulement de la profondeur, et qu'il y a lieu de grouper les divers points de chaque section en *courbes d'égale vitesse* (7). Il a même représenté par des formules ceux des résultats trouvés par lui dont la simplicité le permet (8). Déjà, à une époque antérieure, Sonnet, ainsi que Baumgarten, avaient donné des exemples de détermination de pareilles lignes. M. Maurice Lévy a montré que ces courbes d'égale vitesse sont nécessairement équidistantes et ont la même développée, quand on suppose que l'écoulement a lieu par filets parallèles (9).

115 — Quant à la valeur de la vitesse maxima V, on a entrepris de la relier à celle de la vitesse moyenne u. De Prony a donné,

(1) *Annales des Ponts et chaussées*, 1833, t. VI.
(2) *Notions nouvelles d'hydraulique*, p. 34.
(3) *Report upon the physics and hydraulics of the Mississipi River*, etc., 1861.
(4) *Annales des Ponts et chaussées*, 1832, t. IV, p. 1.
(5) Lahmeyer. *Erfahrungs Resultate über die Bewegung des Wassers in Flussbetten und Kanalen*, p. 11.
(6) Funck. *Beiträge zur allgemeinen Wasserbaukunst*, 1808. — Hagen. *Handbuch der Wasserbaukunst*, 1844, t. I.
(7) *Recherches hydrauliques*, pl. XVIII à XXIII.
(8) *Ibidem*, p. 182 à 246.
(9) *Essai théorique et appliqué sur le mouvement des liquides*, 1867, p. 10.

à cet égard, la formule hyperbolique [1] :

$$(72) \qquad u = V \frac{V + 2{,}37187}{V + 3{,}15312},$$

que l'on réduit souvent à cette forme plus simple :

$$u = \frac{4}{5} V.$$

M. Bazin en a donné une autre plus exacte [2] :

$$u = V - 14 \sqrt{\frac{\Omega}{\chi} i},$$

dans laquelle, comme on le voit, il est tenu compte des éléments qui caractérisent le cours d'eau.

On distingue également la *vitesse de fond* W, qui est considérée comme étant la vitesse minima. Du Buat la reliait aux deux précédentes par la formule :

$$u = \frac{V + W}{2},$$

à laquelle Sonnet a substitué la suivante [3] :

$$W + 2V = 3u.$$

La première de ces deux équations, combinée avec la formule *simplifiée* de De Prony, donne pour la relation de la vitesse du fond avec la vitesse moyenne :

$$(73) \qquad u = \frac{4}{5} W.$$

(1) *Recherches physico-mathématiques*, p. 79. — Baumgarten (*Annales des Ponts et chaussées*, 1848).
(2) *Recherches hydrauliques*, p. 21.
(3) *Recherches sur le mouvement uniforme des eaux*, 1845.

Quant au débit des rivières en fonction de la variation que subit leur profondeur suivant les saisons, on a essayé de le représenter également par des formules empiriques [1]. Les fonctions employées à cet égard diffèrent complètement d'après les cas particuliers et les expérimentateurs. Les unes sont rationnelles, les autres compliquées de radicaux. Ces relations, tout en restant très précieuses pour les divers services hydrauliques dans lesquels elles ont été instituées, éclairent donc peu jusqu'ici l'hydraulique générale.

[1] Boileau. *Notions nouvelles d'hydraulique*, p. 193. — Baumgarten. *Annales des Ponts et chaussées*, 1828. — Boulé. *Annuaire de la Société météorologique de France*, 1879. — Cheysson. *Ibidem*. — Lombardini. *Intorno al sistema idraulico del Po*, 1840.

CHAPITRE VII

JAUGEAGES

—

§ 1

PRÉLIMINAIRES

116 — Les théories précédentes nous fournissent l'expression des lois qui relient mutuellement les divers éléments des phénomènes de l'hydraulique. Mais, pour pouvoir les appliquer effectivement dans des conditions données, il faut être en état de mesurer numériquement les différentes quantités qui y figurent. On en peut distinguer trois sortes : les unes d'une nature purement *géométrique*, telles que les hauteurs h, les aires Ω, les périmètres χ; d'autres d'un ordre *hydrostatique*, comme les pressions p, les poids spécifiques ϖ ; enfin divers éléments qui sont plus spécialement du ressort de l'*hydraulique*, à savoir les débits Q, et les vitesses v. C'est donc de ces dernières quantités seulement que nous avons à nous occuper ici.

Ces deux variables ne sont du reste pas indépendantes. Nous savons qu'elles sont reliées par l'équation de continuité (5). Il semble dès lors qu'il doive suffire d'instituer une seule catégorie de procédés, pour la mesure de l'une d'elles, l'autre s'en déduisant ensuite par le calcul. Mais il sera évidemment plus rationnel, au lieu de s'attaquer toujours à la même inconnue, de choisir de préférence, dans chaque cas, celle qui offrira le plus de facilités pour l'opération, en réservant la seconde pour l'emploi du calcul. On pourra

même les déterminer directement toutes deux au besoin, en affectant l'emploi de l'équation de continuité à un simple rôle de vérification. De là deux sortes d'évaluations : les *jaugeages*, qui concernent les débits, et les mesures *tachométriques*, relatives aux vitesses ([1]).

117 — Les débits s'expriment ordinairement en litres par seconde, ou encore en hectolitres ou en mètres cubes à l'heure. L'*entretien d'eau* d'une mine se compte en mètres cubes par 24 heures. Toutes ces unités sont faciles à convertir les unes dans les autres.

On en a également imaginé d'autres qui peuvent être appelées des *unités intrinsèques* ([2]). On désigne sous le nom de *pouce d'eau*, ou *pouce de fontainier*, le débit que fournit un orifice circulaire en mince paroi présentant un pouce de diamètre, et une charge de sept lignes sur le centre, c'est-à-dire une ligne sur le sommet. Cette unité représente une dépense de $19^{m3},1953$ en 24 heures.

Pour éviter l'emploi des anciennes mesures, et rattacher directement en nombres ronds, au système métrique, une unité du même genre, de Prony a introduit le *double module métrique*, qui débite exactement 20 mètres cubes en 24 heures. Il le réalisait à l'aide d'un ajutage cylindrique de $0^m,02$ de diamètre, $0^m,017$ de longueur, $0^m,05$ de charge sur le centre.

§ 2

PROCÉDÉS DE JAUGEAGE

118 — Les procédés de mesure varient naturellement avec l'importance du cours d'eau. Nous distinguerons, à cet égard, un certain nombre de cas.

([1]) Boileau. *Traité de la mesure des eaux courantes*, 1854. — De Prony. *Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes*, 1802. — Gueymard. *Recueil de procédés de jaugeage*, 1864, in-8°. — Girard. *Notice sur les jauges de la rivière d'Ourcq*, 1804.

([2]) Telles que sont, par exemple, le *nœud* pour les vitesses marines, le *cheval* pour la puissance dynamique, l'*atmosphère* pour les pressions.

PREMIER CAS. — *Cours d'eau d'importance minime.* — Pour des veines liquides d'un volume absolument restreint, comme c'est souvent le cas des sources minérales, le procédé est à la fois élémentaire et très exact. Il consiste à tout recueillir, et à faire passer la totalité du débit dans des vases calibrés, que l'on n'a plus ensuite qu'à énumérer.

119 — SECOND CAS.— *Cours d'eau d'importance moyenne, et capté.* — Si l'importance de la dépense se refuse à l'emploi du moyen précédent, et que le cours d'eau soit entièrement capté, l'on peut couper le canal d'écoulement à l'aide d'un barrage en planches, présentant, sur son bord supérieur, dix échancrures parfaitement identiques. On recueille à part ce qui passe par l'une d'elles, et l'on apprécie, à l'aide du procédé précédent, cette quantité, qui représente le dixième de l'inconnue. Si son volume est encore trop considérable, on recommence sur elle la même subdivision, et c'est sur le centième du débit cherché que l'on opère directement.

On peut également barrer le lit, supposé d'une largeur suffisante, au moyen d'une mince paroi dans laquelle on a pratiqué une série d'orifices circulaires d'un pouce de diamètre, fermés avec des bouchons. On en ouvre successivement un certain nombre, tant que le niveau montre une tendance à s'élever. Si, au contraire, on le voit s'abaisser, on referme un ou plusieurs orifices, et l'on procède ainsi par tâtonnements jusqu'à ce que le niveau se maintienne, aussi exactement que possible, à une ligne au-dessus des sommets. On est alors certain que chacun de ces pertuis débite comme un pouce de fontainier, et il ne reste plus qu'à multiplier leur nombre par $19^{mc},1953$ pour avoir la dépense en vingt-quatre heures. On peut également employer, pour cette opération, les éléments du double module métrique (n° 117).

Il reste encore la ressource des *compteurs d'eau*. On désigne sous ce nom des appareils composés de capacités connues et mobiles, qui reçoivent l'eau et la déversent en aval, en se vidant par un mouvement spontané qu'enregistre un mécanisme totaliseur. On connaît ainsi, au bout d'une certaine durée, le volume liquide qui a traversé le compteur, ce qui permet d'en déduire le débit par

seconde. Il existe un grand nombre de ces organes, et nous consacrerons à leur description le paragraphe suivant.

120 — Troisième cas. — *Cours d'eau d'une réelle importance, et barré pour l'établissement d'une usine.* — On choisit, pour l'opération, un jour de chômage de l'usine, et l'on ouvre progressivement la vanne de décharge, jusqu'à ce que le niveau reste stationnaire dans le bief de retenue. Ce sera le signe que la vanne dépense alors exactement le débit d'alimentation. Il ne restera plus, pour le connaître, qu'à appliquer la formule (20) des grands orifices rectangulaires.

Cette opération, qui est susceptible d'une assez grande exactitude, exige un temps notable, afin que l'on puisse laisser rétablir complètement la permanence du mouvement après chaque levée de vanne, avant de juger du résultat. Le général Morin a indiqué un procédé plus rapide, moins exact, mais suffisamment approximatif la plupart du temps, pour l'appréciation d'un élément aussi peu constant que le débit d'une rivière suivant les saisons et le régime des pluies. On ouvre alors *en grand* la vanne de décharge, et, à des intervalles réguliers, toutes les minutes par exemple, ou toutes les cinq minutes suivant les dimensions du bief, on observe avec soin le niveau du liquide. On admet alors par approximation que le régime reste permanent pendant chacune de ces durées, sous l'empire de la charge spéciale qui lui correspond, et l'on applique la formule (20) dans ces conditions. On fait ensuite la somme q de tous les volumes ainsi obtenus pendant un intervalle total de temps que je désignerai par t. Mais l'opération n'est pas encore terminée. On a refermé complètement la vanne pour laisser remonter le niveau. Supposons qu'il mette alors un temps t' à revenir exactement au point initial. Ce sera la preuve que le cours d'eau a fini de combler la perte q subie par le bief; et il lui a fallu, pour cela, une durée $t + t'$, car il n'a pas cessé d'alimenter ce bief pendant les deux périodes. On aura donc pour l'expression du débit par seconde :

$$Q = \frac{q}{t + t'}.$$

Un troisième moyen consiste à fermer toutes les vannes de l'usine, en forçant toute l'eau à passer sur son déversoir [1]; on applique alors la formule relative à ce genre d'écoulement (nº 52).

M. l'inspecteur général des mines Jutier a rattaché à ce procédé un ingénieux appareil [2], destiné au jaugeage des lames d'eau qui coulent sur la sole des galeries de mine; problème d'un grand intérêt pour les opérations de la recherche et du captage des eaux thermales. On barre alors la galerie, sans toutefois tendre les eaux à un niveau supérieur aux conditions ordinaires, afin de ne rien changer au régime des pressions qui influencent directement l'émergence (nº 42). On se sert, pour cela, d'une feuille de tôle, dont le bord supérieur porte une échancrure rectangulaire. Une vis micrométrique a son zéro au point pour lequel sa pointe affleure exactement au seuil de ce déversoir en mince paroi. La graduation permettra donc de mesurer avec une grande exactitude l'épaisseur de la lame d'eau, que l'on appréciera en abaissant progressivement la vis, jusqu'à ce que sa pointe arrive à déchirer la surface liquide.

Les procédés de jaugeage fondés sur l'emploi du déversoir ordinaire présentent cet inconvénient que la section du courant ne reste pas, d'un cas à l'autre, semblable à elle-même. M. Thompson de Belfast a cherché à réaliser cette similitude [3] par l'emploi d'une *échancrure triangulaire*. Il propose pour ce cas la formule :

$$Q = Ch^{\frac{5}{2}},$$

avec un coefficient qui varie suivant le rapport de la base b à la hauteur h, et pour lequel il indique les valeurs suivantes :

$$\frac{b}{h} = 2, \qquad C = 1,406;$$

$$\frac{b}{h} = 4, \qquad C = 2,930.$$

(1) M. le colonel Boileau s'étend longuement sur cette question, et sur les détails de pratique qui permettent d'obtenir une exactitude suffisante (*Traité de la mesure des eaux courantes*, p. 48 à 183).

(2) *Annales des mines*, 5e série, t. XIX. p. 475.

(3) Rankine. *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs*. Traduction de G. Richard, p. 180.

121 — QUATRIÈME CAS. — *Cours d'eau d'une réelle importance, non barré.* — Lorsqu'il s'agit d'une rivière, on figure une section transversale au moyen de jalons plantés sur les deux rives, dans un même plan de collimation. On choisira, pour cela, une portion du lit aussi régulière que possible, de manière à autoriser l'hypothèse de la conservation des tranches. On applique alors l'équation (36. p. 112), en évaluant tout à la fois l'étendue de la section et la vitesse moyenne.

Pour déterminer l'aire Ω, on effectue, dans le plan de collimation, une série de sondages, de manière à pouvoir tracer par points un profil suffisamment exact du fond. On relève ensuite, sur ce diagramme, une série d'ordonnées *équidistantes* $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, en divisant la largeur l en un nombre *pair* n de parties égales. Puis l'on applique la formule de quadratures approximatives de Simpson :

$$\Omega = \frac{l}{3n}\Big(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots.$$
$$\ldots. + 2y_{n-4} + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\Big).$$

Pour connaître, d'autre part, la vitesse moyenne u, l'on commencera par mesurer, à la surface et au milieu de la largeur (n° 114), la vitesse *maxima* V, par l'un des procédés tachométriques que nous indiquerons dans le paragraphe 4; puis on en déduira la vitesse moyenne à l'aide de la formule de De Prony (72), ou de celle de Bazin. On peut également rechercher directement la vitesse moyenne par la formule de Kutler [1] :

$$u = \frac{\left(23 + \frac{0,00155}{i}\right)f + 1}{\left(23 + \frac{0,00155}{i}\right)f + \sqrt{\frac{\Omega}{\chi}}}\;\frac{\Omega\sqrt{i}}{f\chi},$$

[1] Captain Allan Cunningham (*Roorkee hydraulic Experiments*, p. 320). — Flamant (*Annales des Ponts et chaussées*, juillet 1882). — Lagasse (*Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, juillet 1883, p. 330).

dans laquelle f désigne un coefficient de rugosité qui dépend de l'état du lit, et peut varier de 0,009 à 0,035.

M. Hirn a proposé un procédé pour la mesure directe de la vitesse moyenne ([1]), lorsque l'on peut trouver, dans le cours d'eau, une travée qui présente une certaine constance pour la section et un fond convenablement uni. On emploie, à cet effet, une cloison légère lestée sur un de ses bords, de manière à raser le fond, et soulevée par des flotteurs sur le côté opposé. Dans cette situation, elle barre le courant, sauf un jeu dont on néglige l'influence, et, par conséquent, elle se trouve entraînée précisément avec la vitesse moyenne.

M. le colonel Boileau a introduit également, pour la mesure directe de la vitesse moyenne, une méthode ingénieuse fondée sur l'emploi des *filets jaugeurs*. Il considère, à cet effet, que ce degré précis de rapidité appartient nécessairement à une certaine nappe déterminée de filets d'égale vitesse. Cette nappe coupe la surface libre suivant deux filets spéciaux, qu'il suffirait de connaître pour n'avoir plus qu'à effectuer, sur l'un d'eux, une mesure tachométrique directe par les procédés du paragraphe 4. Nous ne saurions d'ailleurs entrer, à l'égard de la mise en pratique de ce principe, dans des développements pour lesquels on pourra se reporter au mémoire original ([2]), ainsi qu'aux travaux de Darcy et Bazin ([3]).

122 — CINQUIÈME CAS. — *Grandes rivières et torrents.* — En ce qui concerne les plus grands cours d'eau, l'on commencera par choisir, s'il est possible, les régions où des îles partagent le lit en plusieurs bras, de manière à décomposer l'opération en plusieurs autres plus simples. Pour chacune de ces dernières, on cherchera des sections dans lesquelles le régime paraisse offrir, sinon une complète unité, ce qui serait sans doute assez rare, du moins une série de travées contiguës dont chacune présente une certaine uniformité. On s'attachera alors séparément à ces diverses parties, en appli-

([1]) *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, 1846, n° 94.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXXVIII, p. 680. — Boileau. *Notions nouvelles d'hydraulique*, p. 196.

([3]) *Recherches hydrauliques*, p. 244.

quant à chacune d'elles le procédé du cas précédent, et l'on totalisera tous les résultats.

M. Ritter a indiqué [1], sous le nom de *jaugeage thermométrique* [2], un procédé fort original pour rattacher les uns aux autres les débits des divers affluents d'un même cours d'eau, de manière à n'avoir, après cette détermination de leurs rapports respectifs, qu'à effectuer une mesure directe sur l'un d'eux, en choisissant, pour cela, celui qui présente les conditions les plus favorables. On peut ainsi notamment relier ensemble divers torrents de montagne, auxquels ne sauraient s'appliquer les procédés précédents, tandis que celui-ci s'y adaptera très convenablement. En effet, le mélange des eaux de diverses provenances sera rendu plus intime par leur agitation, tandis qu'en plaine on voit souvent des affluents réguliers cheminer pendant longtemps côte à côte, dans leur lit commun, sans se mélanger complètement.

La méthode en question consiste à observer les températures t, t' des affluents, de débits respectifs Q, Q', ainsi que celle T du mélange produit par leur réunion. On déduit alors de la relation :

$$(Q + Q')\,T = Qt + Q't',$$

le rapport cherché :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{t' - T}{T - t}.$$

(1) *Bulletin du Ministère des Travaux publics*, juillet 1884, p. 73.

(2) Leslie avait déjà proposé une application du thermomètre aux jaugeages, qui paraît beaucoup moins satisfaisante. Il élevait préalablement la température à un degré déterminé, et comparait ensuite les durées du refroidissement dans l'eau stagnante ou dans l'eau courante, pour en déduire une relation avec la quantité de liquide qui agit sur l'instrument dans un temps donné. (Boileau. *Traité de la mesure des eaux courantes*, p. 266.)

§ 3

COMPTEURS D'EAU

123 — Les appareils destinés à la mesure directe du volume de l'eau ([1]) sont extrêmement variés, et nous les rattacherons aux neuf catégories suivantes, d'après les principes sur lesquels ils sont fondés.

Compteurs à bascule. — Dans le compteur Flicoteaux (fig 60), on emploie une auge installée de manière à pouvoir osciller autour d'un axe horizontal. Des butoirs définissent ses positions extrêmes. Cette capacité n'est pas symétrique par rapport au plan vertical de l'axe, de telle sorte que le centre de gravité se déplace, par le remplissage, transversalement à cet axe. Il vient donc un moment où le système bascule de lui-même, en faisant mouvoir un mécanisme enregistreur, dont les indications font connaître le nombre des volumes écoulés pendant un temps donné.

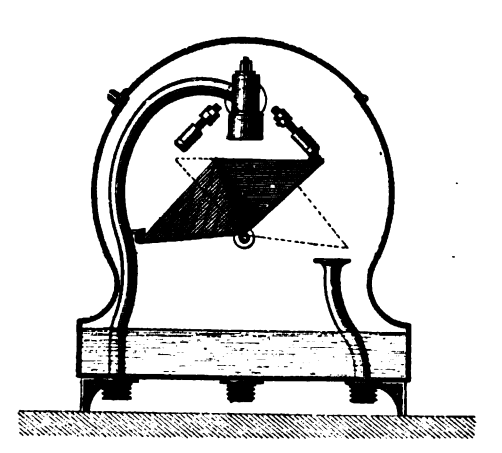


Fig. 60. — Compteur Flicoteaux.

On peut citer encore, dans le même ordre d'idées, les compteurs Fayet ([2]), Piau, Piccard et Chevallez, Rogier et Mothes, Villière ([3]), ainsi que le compteur municipal de la ville de Bordeaux.

([1]) Ch. André. Les compteurs d'eau (*Génie civil*, t. III, p. 229, 244, 275). — *Transactions of the Institution of mechanical Engineers*, 1856.

([2]) *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1878, p. 101.

([3]) Tresca. *Bulletin de la Société d'Encouragement*, 2ᵉ série, t. XV, p. 402.

124 — *Compteurs à tympan.* — Le compteur Casalonga rappelle, par sa construction, la roue élévatoire à tympan [1]. Seulement son fonctionnement est précisément inverse. C'est alors le poids moteur des masses d'eau insérées entre les diverses spirales de l'appareil qui détermine sa rotation en sens rétrograde.

Le compteur Parkinson se rattache au même principe.

125 — *Compteurs à turbine.* — Le compteur Siemens de Rotherham emploie, comme organe essentiel, une petite turbine [2] qui tourne autour d'un axe vertical. La vitesse de régime qui s'établit malgré les résistances développées par la marche elle-même, varie en fonction du travail mis en jeu, c'est-à-dire du débit qui passe dans l'unité de temps, sous l'action de la pesanteur. On peut craindre, à la vérité, que des eaux calcaires, en encrassant les aubes, ne viennent à rétrécir les passages, et à modifier les conditions de l'écoulement, ainsi que la fidélité du tarage de l'appareil.

Les compteurs de Fleury et de Gorman sont fondés sur une donnée analogue.

126 — *Compteurs à palettes.* — Le compteur Halske et Siemens (fig. 61) substitue à la turbine une roue à palettes [3]. Le liquide traverse de bas en haut une grille destinée à retenir les impuretés. Il pénètre par quatre orifices dans le boisseau où tourne la roue à ailettes, et s'échappe par un conduit latéral. Une cloison fixe pénètre assez bas dans l'espace libre, pour s'opposer au mouvement de giration qui aurait tendance à s'y développer. La rotation de l'axe se communique, par l'intermédiaire d'une vis sans fin, à une roue immergée en partie dans l'huile, de manière à servir de releveur pour le graissage. En même temps, elle commande le mouvement d'horlogerie du compteur. Cet appareil débite de plus grands volumes que le précédent, mais il redoute davantage les coups de bélier et l'envasement. Son pivot, plus allégé, s'use moins rapidement. Il ne

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 359, fig. 641.

[2] Voy. chapitre X.

[3] *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1878, p. 102.

saurait, du reste, pas plus que le système à turbine, servir à enregistrer de faibles écoulements.

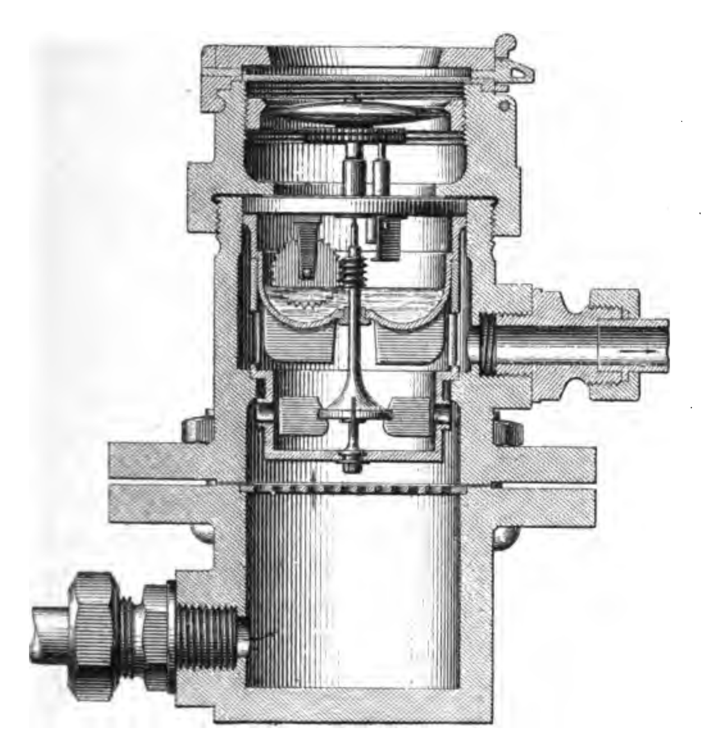


Fig. 61. — Compteur Halske et Siemens.

On peut rattacher au même principe les compteurs Faller, Tylor, Valentin, Zacharias et Germutz.

127 — *Compteurs à hélice.* — Dans le compteur Bonnefonds, l'organe récepteur de l'action de l'eau devient une hélice à plusieurs spires, semblable à une vis d'Archimède.

128 — *Compteurs à étranglement.* — Le compteur *Chameroy* (¹) force l'eau à passer dans un espace légèrement tronc-conique (fig. 62), en soulevant un disque horizontal, de manière à ouvrir un orifice annulaire qui varie avec le débit du courant. Ce mouvement se trans-

(¹) Tresca. *Bulletin de la Société d'Encouragement*, 2ᵉ série, t. XVII, p. 257.

met, par l'intermédiaire d'une tringle traversant un presse-étoupes, à une roulette qui se trouve ainsi plus ou moins éloignée du centre d'un plateau tournant [1]. Dans ces conditions, la rotation de cet organe et les indications du totaliseur se modifient avec cet écartement, et, par suite, avec la dépense. Cet appareil ne saurait convenir pour les petits écoulements, mais il s'adapte bien aux grands débits, et ne produit qu'une perte de charge insensible.

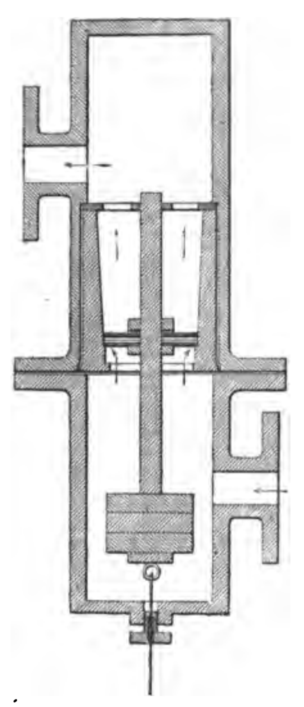


Fig. 62. — Compteur Chameroy.

Le compteur Tavan est disposé d'une manière analogue. Seulement le soulèvement est utilisé pour ouvrir plus ou moins un orifice qui donne passage à un filet d'eau, et c'est le volume de ce dernier que l'on recueille directement afin d'obtenir une appréciation du débit.

129 — *Compteurs à horloge.* — Le compteur Ginoux a été proposé pour servir au contrôle que les municipalités ont besoin d'exercer sur les concessions d'eau faites aux particuliers. Il consiste en un mécanisme d'horlogerie destiné à enregistrer le temps pendant lequel le robinet reste ouvert. Cet appareil ne fournit donc qu'un maximum. C'est au consommateur, dans son propre intérêt, à n'ouvrir son robinet qu'en grand. La variabilité de l'ouverture ôterait d'ailleurs, pour des mesures scientifiques, toute précision aux indications recueillies.

130 — *Compteurs à membrane.* — Les compteurs à membrane se rapprochent, en principe, des appareils à piston, dont nous parlerons dans un instant. Le piston proprement dit s'y trouve remplacé

[1] Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes*, p. 38.

par une poche en caoutchouc, susceptible de s'effacer alternativement dans un sens ou dans l'autre, à peu près comme pour la *pompe des prêtres*, ou le *piston-soupape Letestu* (¹). Ces appareils présentent beaucoup de chances d'usure, et se sont peu répandus.

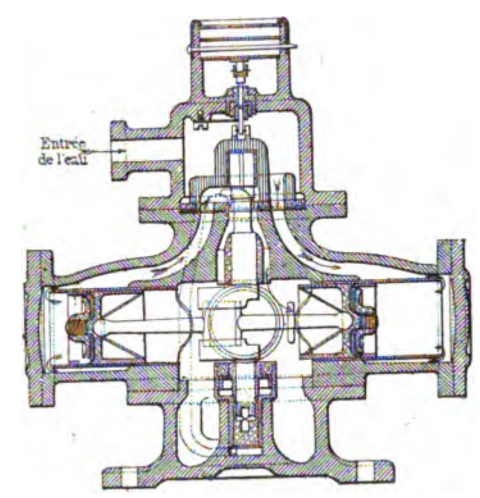


Fig. 63. — Compteur Samain et Badois (coupe verticale).

On peut comprendre dans cette catégorie les compteurs Chambosredon, Clément (²), Dernian, Nicolas et Chamon, Maldant.

131 — *Compteurs à piston.* — Il faut considérer comme les plus sûrs de tous, les compteurs de volume, c'est-à-dire les appareils à capacités déterminées, successivement ouvertes ou fermées, pour le remplissage ou la vidange.

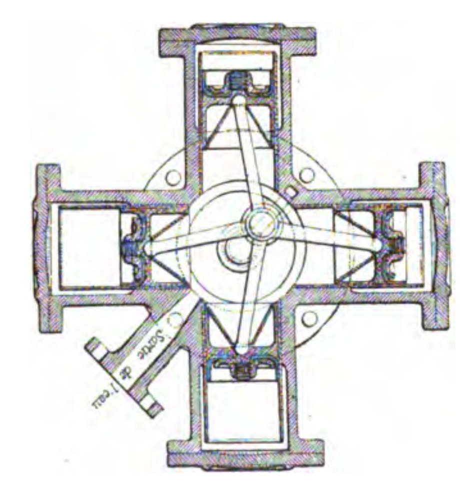


Fig. 64. — Compteur Samain et Badois (coupe horizontale).

Dans le compteur Samain et Badois (³), quatre corps de pompe sont disposés en croix (fig. 63, 64). Leurs pistons s'articulent, à l'aide de quatre bielles, avec un arbre coudé vertical, dont la

(¹) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 264.
(²) Tresca. *Bulletin de la Société d'Encouragement*, 2ᵉ série, t. XII, p. 389.
(³) *Génie civil*, 18 octobre 1884.

rotation actionne en même temps un disque distributeur, manœuvrant quatre tiroirs ordinaires. Le jeu de ces derniers met alternativement les corps de pompe en communication avec l'arrivée de l'eau par la partie supérieure, ou avec le canal de fuite. On a toujours, à un instant quelconque, deux cylindres plus ou moins ouverts à l'admission, et les deux autres à la vidange. Le débouché total d'arrivée ou de fuite varie peu, d'après cela, et l'on évite ainsi les coups de bélier et l'étirage des veines liquides, auxquels on se trouve exposé dans d'autres mécanismes pour le passage du point mort.

132 — Dans le compteur Michel-Frager [1], aujourd'hui très répandu, l'eau est amenée par le canal A (fig. 65), traverse la grille B, enveloppe la pièce de distribution C, se rend, ainsi qu'il va être expliqué, dans les cylindres D, D', et de là à la tubulure d'échappement E. La distribution s'effectue de la manière suivante.

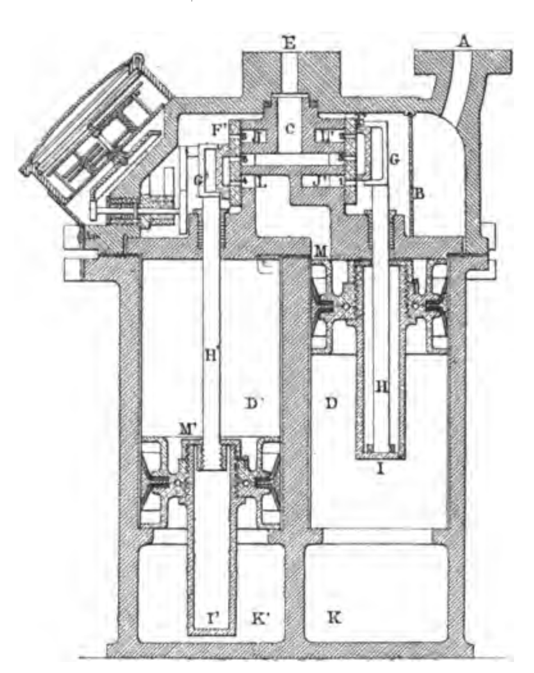


Fig. 65. — Compteur Michel-Frager.

Les glaces F, F' de la pièce de distribution C sont percées chacune de trois orifices : 1, 2, 3; 4, 5, 6. Les tiroirs G, G' n'en peuvent embrasser à la fois, dans l'intérieur de leurs coquilles, que deux seulement. Ces organes sont commandés par les tiges H, H', heurtées en temps

[1] Modèle 1883.

convenable par le fond des pistons creux I, I′, dans leur phase ascendante, ou ramenées vers le bas par la face supérieure de ces pistons, pendant leur course descendante.

La partie J′, qui reçoit les eaux motrices par la lumière 1, communique avec la partie inférieure K′ du cylindre D′. La portion L′ qui se trouve, par l'intermédiaire des lumières 2 et 3, en relation avec le débouché E, se rattache à la partie supérieure M′ de ce même cylindre. Le piston I′ va donc monter. Vers la fin de sa course, il heurte la tige E′, et la relève. A ce moment, la lumière 4, se trouvant dégagée par l'ascension du tiroir G′, mettra les eaux motrices ABG′ en communication, par L, avec la face supérieure M du piston I. Au contraire, les lumières 5 et 6 embrassées par la coquille du tiroir, mettent en relation la partie inférieure K du cylindre D, à travers J et E, avec le débouché. Le piston I va donc descendre. Mais, vers la fin de sa course, il abaissera, par le contact de sa partie supérieure, le pied de la tige I et le tiroir G. Celui-ci réalisera ainsi, pour le piston I′, des conditions inverses de celles que nous avons analysées, et d'après lesquelles ce dernier se trouvait sollicité à monter. Il descendra, par conséquent; et cet échange de fonctions se perpétuera indéfiniment, chaque piston servant par sa propre course à régler la distribution de l'autre.

On peut encore rattacher à la catégorie des compteurs à piston les appareils Berthon-Debenoit, Broquin-Muller-Roger, Deacon, Dépléchin et Mathelin, Dreyer, Frost, Galasse, Greyweldinger, Jacquet, Kennedy, Kern, Lévis, Nasch, Payton [1], Pioz, Roberton et Brisset, Schmid [2], etc. Un grand nombre d'entre eux sont extrêmement ingénieux; mais nous ne saurions, sans troubler les proportions de ce Cours, nous étendre davantage sur ce sujet.

(1) Tresca. *Annales du Conservatoire*, t. VII, p. 657.

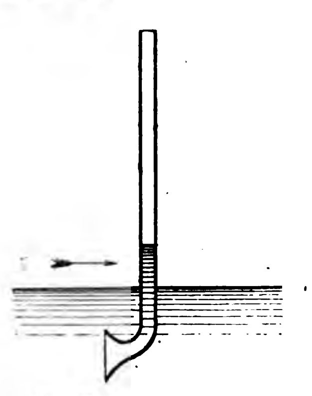
(2) Grosseteste. Essai du compteur Schmid (*Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, avril-juin 1885).

§ 4

MESURES TACHOMÉTRIQUES

133 — *Flotteur.* — Pour connaître la vitesse superficielle d'un cours d'eau, on peut employer le procédé du flotteur. A cet effet, on jalonne deux sections séparées par une portion du lit sensiblement prismatique, de telle sorte que le mouvement soit uniforme dans cette dernière. On mesure, à la chaîne d'arpenteur, la distance qui les sépare. Puis on lance, en amont, un corps flottant tel qu'un papier, un pain à cacheter, présentant peu de prise au vent, et n'ayant qu'un tirant d'eau insignifiant, afin de ne pas pénétrer dans les couches profondes, qui n'ont pas la même vitesse que la surface (n° **114**). On note, à l'aide d'une montre à secondes, les instants du passage de cet objet dans les deux plans de collimation; et le quotient de la distance par le temps écoulé fournit la valeur de la vitesse.

Quand on veut pénétrer dans la profondeur, on emploie de *doubles flotteurs* reliés par un cordeau, dont l'un surnage, tandis que l'autre reste plongé. On peut citer également, dans le même ordre d'idées, les *bâtons lestés* de Kräyenhoff. Mais M. Bazin [1] a montré que ce procédé est inférieur, comme exactitude, à l'emploi du moulinet de Woltmann (n° 139).


Fig. 66. — Tube de Pitot.

134 — *Tube de Pitot.* — On désigne sous ce nom (fig. 66) un petit tuyau ouvert à ses deux bouts, et recourbé à angle droit à l'une de ses extrémités, qui est évasée en forme d'entonnoir. Si l'on présente cette embouchure au courant, les filets devront se dévier de part et d'autre. Il faudra, pour cela, qu'ils subissent de la part de l'obstacle une certaine action, nécessairement

[1] *Annales des Ponts et chaussées*, juin 1884.

accompagnée, de leur part, d'une réaction contraire. De là, un supplément de pression dans l'eau qui occupe l'intérieur du tube, et qui s'y tiendra, pour ce motif, à un niveau supérieur à celui de la rivière.

Cette influence étant comparable, sans être pourtant identique, à celle que nous avons analysée ci-dessus (n° 69), nous pouvons la considérer comme proportionnelle an carré de la vitesse. Aussi admet-on, dans l'usage, que la dénivellation du tube de Pitot est en raison de la hauteur due à la vitesse $\frac{v^2}{2g}$. Du Buat a donné, à cet égard [1], la formule :

$$h = \frac{3}{2}\frac{v^2}{2g},$$

d'où il résulte :

$$v = 3{,}62\sqrt{h}.$$

135 — *Sympiézomètre de Darcy et Baumgarten* [2]. — Imaginons que l'on présente un tube de Pitot à contre-sens du courant ; il se produira, à l'arrière du pavillon, une masse stagnante et tourbillonnante qui éprouvera une dépression (n° 64). Celle-ci se communiquant à la colonne liquide qui se trouve à son contact, en provoquera l'abaissement au-dessous du niveau extérieur. La dénivellation ainsi produite pourra donc encore servir à la mesure de la vitesse.

En disposant l'un à côté de l'autre (fig. 67) deux tubes de Pitot, direct et inverse [3], Darcy et Baumgarten ont pu ajouter ensemble les deux effets précédents, et opérer ainsi

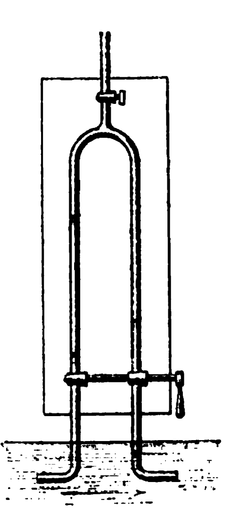


Fig. 67.
Sympiézomètre de Darcy et Baumgarten.

[1] Hydraulique, § 572.

[2] Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon.* — *Annales des Ponts et chaussées*, 3e série, t. XV, p. 351.

[3] Darcy a même employé parfois un tube placé dans un plan perpendiculaire au courant.

sur un total plus important, par conséquent plus exactement mesurable que chacun de ses deux éléments pris séparément ([1]). Ils ont, en outre, remédié à la grande difficulté qu'éprouvait l'opérateur, pour effectuer des lectures dont l'une est à peu près rasante par rapport à la surface liquide, et l'autre placée en contre-bas. Un artifice très ingénieux fournit le moyen de relever les deux niveaux, sans troubler leur différence. A cet effet, les deux tubes sont réunis ensemble à leur partie supérieure. Une tubulure permet d'aspirer avec la bouche l'air intérieur, de manière à créer une raréfaction, que l'on maintient ensuite par la fermeture d'un robinet. Les deux hauteurs liquides, ainsi soulagées par cette dépression commune, s'élèvent à volonté, sans que leur différence soit en rien modifiée.

136 — *Appareil hydrotimétrique du colonel Boileau.* — M. Boileau a imaginé une manière d'augmenter encore davantage l'exactitude des mesures prises avec le tube de Pitot (fig. 68). Le tube recourbé est surmonté d'une partie renflée, que l'on immerge dans le courant jusqu'à une ligne de foi 0 0. Le niveau s'élève, à l'intérieur, de la même quantité qu'avec l'appareil ordinaire. Concevons qu'après avoir isolé le contenu par la fermeture d'un robinet, l'on verse dans un récipient la quantité d'eau qui surmonte le zéro, et que l'on recommence ainsi la même opération n fois de suite. Si l'on mesure alors le volume total, à l'aide de la pesée ou de vases calibrés, on obtiendra une valeur

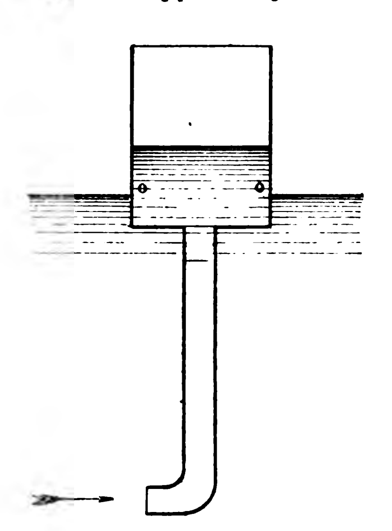


Fig. 68.
Appareil hydrotimétrique du colonel Boileau (figure schématique).

([1]) La formule de mesure est alors la suivante :

$$v = C\sqrt{2g(h + h')},$$

en désignant par C une constante fournie par le tarage direct de l'instrument (n° 141).

moyenne en divisant cette somme par n, et l'on en déduira ensuite la hauteur, en divisant ce quotient par l'aire de la partie renflée. Lors même que l'on voudrait supposer que toutes les erreurs eussent été commises en même sens, leur moyenne serait de l'ordre de chacune d'elles, et sa division par l'aire du renflement réduirait, autant qu'on pourrait le désirer, son influence sur la hauteur, si l'on dispose à volonté du rayon de cette poche. Mais il est clair, en outre, que les erreurs tendront, en général, à se compenser plus ou moins. La moyenne se trouvera dès lors diminuée d'autant, et parfois même complètement annulée. Malgré la complication de l'exécution, ce principe est ingénieux, et M. le colonel Boileau a indiqué, pour sa réalisation, un dispositif dont on trouvera la description à la page 276 de son *Traité de la mesure des eaux courantes*.

137 — *Pendule de Castelli.* — Un quart de cercle gradué (fig. 69) porte un fil à plomb, qui permet d'assurer la verticalité de sa ligne de foi. On suspend, en son centre, un pendule plus dense que l'eau, mais d'ailleurs assez léger pour qu'il éprouve, de la part du courant, une action horizontale comparable à la différence entre son poids et la poussée du liquide. La résultante, qui ne peut être détruite que par la tension du pendule, le maintiendra donc incliné sous un certain angle, et la lecture de l'écart fournira un moyen d'appréciation de la vitesse.

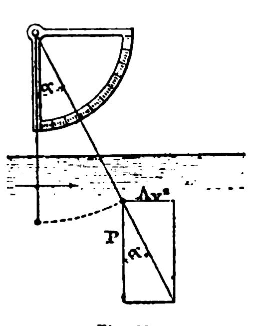


Fig. 69.
Pendule de Castelli.

La relation d'équilibre est facile à établir. Le fil devant se disposer suivant la résultante de l'action Av^2 exercée par le courant, et de la différence F entre le poids de la boule et celui de l'eau déplacée, on a nécessairement :

$$\tan \alpha = \frac{Av^2}{F},$$

d'où :

$$v = B\sqrt{\tan \alpha},$$

en désignant par B un coefficient, que fournira directement le tarage de l'appareil (n° 141).

138 — *Balance de Brunnings.* — La balance de Brunnings [1] est destinée à peser statiquement la force qui est imprimée par le courant sur une palette plane que l'on immerge perpendiculairement à sa vitesse (fig. 70). A cet effet, on relie cet obstacle, au moyen de fils et de poulies, à une petite romaine qui mesure l'effort transmis.

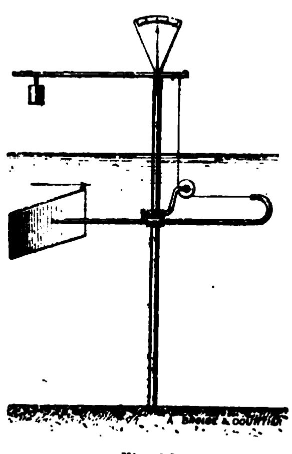


Fig. 70.
Balance de Brunnings.

M. le colonel Boileau a perfectionné cette donnée, et constitué un *hydrodynamomètre* beaucoup plus exact [2].

M. de Saint-Venant a de même proposé l'emploi d'une sorte de balance de torsion, dont le fil supporte, à l'extrémité d'une tige métallique, une sphère plongée dans le courant [3].

139 — *Moulinet de Woltmann.* — Cet appareil [4] a pour organe essentiel (fig. 71) une petite roue analogue à celle des moulins à vent [5], que l'on immerge en travers du courant. Les diverses palettes sont disposées obliquement par rapport au plan général de la roue, et toutes en même sens. Les actions exercées sur elles par le liquide ont donc, par rapport à l'axe, des moments de même

(1) Dix ans avant Brunnings, Gauthey a employé le même principe (Gauthey, *Construction des ponts*, 1779).

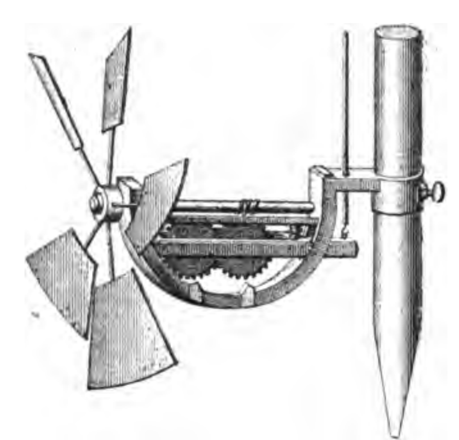
(2) Boileau. *Traité de la mesure des eaux courantes*, 279.

(3) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, XXII, 1846.

(4) Petit. Études sur les courants de l'Escaut (*Annales des travaux publics de Belgique*, XL, 261). — Ildebrando Nazzani. *Misure di velocita nel Tevere*, 1882. — *Annales des Ponts et chaussées*, 1848. — De Lagrenée. Note sur la mesure des vitesses et des débits dans un cours d'eau rapide et profond (*Annales des Ponts et chaussées*, mai 1883). — Boileau. *Traité de la mesure des eaux courantes*, 271.

(5) Du Buat avait employé déjà une petite roue à palettes plongée dans l'eau par sa partie inférieure (*Hydraulique*, § 441). Mais cette méthode ne pouvait servir que pour les filets superficiels.

signe, dont l'ensemble provoque la rotation du système. Ce mouvement irait naturellement en s'accélérant de plus en plus, sans la production des résistances passives dont l'importance croît avec la vitesse (n° 72), de telle sorte que l'on finit par atteindre un certain régime d'équilibre, fonction de la vitesse, et pouvant, par suite, lui servir de mesure.


Fig. 71. — Moulinet de Woltmann.

A cet effet, à l'aide d'une transmission de mouvement, on relie la roue à un compteur-totaliseur, qui enregistre le nombre de tours. Ce mécanisme doit comprendre un embrayage, qui permette d'établir ou de suspendre à volonté la communication. En effet, lorsque l'on plonge l'appareil dans le courant, il ne peut acquérir que progressivement la vitesse type à laquelle il devra ensuite se maintenir. De même, lorsqu'on le sort de l'eau, sa force vive acquise aurait pour résultat de prolonger sa rotation, jusqu'à ce qu'on pût l'arrêter avec la main. Or le compteur enregistrerait tous ces effets, sans que rien distinguât ceux des deux périodes perturbatrices, des résultats de la phase utile, qui se trouveraient entachés par là d'une confusion irrémédiable. Il est donc nécessaire d'immerger l'appareil débrayé. Lorsque la roue a pris un régime uniforme, on pousse le cran qui embraye le compteur, et l'on commence, au même instant, la mesure du temps. On la termine de même au moment précis où l'on débraye le compteur.

M. de Harlacher, en associant au moulinet un enregistreur électrique, est parvenu à recueillir la trace des variations subies par la vitesse en un même point du courant [1].

[1] Von Harlacher. *Die Messungen in der Elbe und Donau, und die hydrometrischen Apparate und Methoden des Verfassers.*

140 — *Loch de Tromelin.* — Une petite roue à ailettes tourne sous l'influence du cours d'eau [1]. Son axe est enveloppé d'un cylindre en bois de gaïac, sur l'une des génératrices duquel se trouve insérée une baguette de cuivre. Un frotteur transmet un courant électrique, à chacun des contacts qu'il subit, pendant la rotation, avec cette génératrice métallique.

Ce système a reçu certains perfectionnements dans les ateliers Bréguet. Le moulinet a été rendu horizontal, de manière à fonctionner pour une altitude mieux déterminée au sein de la masse liquide. En vue de supprimer la résistance opposée par le frotteur, on fait tourner un aimant en fer à cheval autour de l'axe vertical. Lorsque ses pôles se trouvent en face de ceux de nom contraire d'un aimant horizontal, il y a attraction, basculement et fonctionnement du compteur, qui enregistre cette révolution.

141 — *Tarage des appareils.* — A l'exception du flotteur, les appareils que nous venons de passer en revue ne fournissent pas directement la valeur de la vitesse, mais seulement une indication numérique plus ou moins détournée, d'après une fonction que l'on ne connaît même pas exactement à l'avance. Par exemple, on obtient un nombre de millimètres d'eau avec le tube de Pitot, des degrés angulaires pour le pendule de Castelli, des grammes pour la balance de Brunnings, un nombre de tours avec le moulinet de Woltmann. Il reste donc à interpréter de tels résultats, en les ramenant à exprimer un certain nombre de mètres par seconde. C'est ce qu'on appelle le *tarage* de l'instrument.

Le principe, toujours le même, de cette opération consiste à soumettre le système à l'influence d'une succession de vitesses connues, en observant chaque fois le résultat, afin de pouvoir conclure inversement, de chacune de ces lectures, la vitesse correspondante, quand elle se représentera dans des expériences. Cet enregistrement peut être effectué au moyen d'une table jointe à l'appareil, ou d'une graduation de vitesses inscrite directement sur le verre ou sur le cuivre, ou enfin d'une formule empirique capable de représenter

[1] Hillairet (*Génie civil*, III, 198).

les résultats avec une exactitude suffisante. Ces relations sont en général de la forme :

$$v = a + bn,$$

si n représente le nombre de tours indiqué par l'instrument, et a, b deux constantes caractéristiques, variables de l'un à l'autre des exemplaires fabriqués.

Quant au moyen employé pour soumettre l'appareil à des vitesses connues, on le trouve dans l'intervention du mouvement relatif. A l'aide de répétitions d'engrenages, on imprime des vitesses angulaires arbitraires et connues à un bras horizontal, monté sur un pivot qui occupe le centre d'un bassin circulaire. L'indicateur est suspendu à l'extrémité de ce bras ; et l'on admet qu'il subit, de la part de l'eau stagnante, une action identique à celle que lui imprimerait, dans le repos, un courant d'égale vitesse.

Il est très important d'ajouter que cette hypothèse, absolument gratuite, a été reconnue inexacte. Lorsqu'un corps se trouve immergé dans le sein d'un courant, les filets rectilignes sont obligés de se dévier, en s'infléchissant à partir d'une certaine distance. Il subsiste donc, en avant de l'obstacle, une masse d'eau stagnante et tourbillonnante, en forme de coin, que l'on appelle *proue fluide* (fig. 41). Or rien n'établit *a priori* que sa forme doive rester la même, quand les filets sont appelés à courber d'eux-mêmes leurs trajectoires, ou lorsqu'un navire vient fendre, par son mouvement propre, un milieu stagnant, à l'aide de ce coin qu'il pousse devant lui. Le contraire a lieu en réalité, et il en résulte naturellement une différence dans l'effort transmis. Du Buat a constaté que la résistance opposée à un plan mobile par un milieu stagnant est notablement moindre que l'effort exercé par un courant de même vitesse contre un obstacle fixe ([1]).

Nous devons conclure de là que les indications des instruments tachométriques dont le tarage est obtenu par le procédé de la vitesse relative manquent de rigueur. Elles pourront rester suffisantes pour

([1]) 0,77 fois moindre, dans l'expérience exécutée par lui.

la plupart des applications courantes; mais il serait certainement désirable de voir substituer à cette méthode celle de la comparaison avec des appareils-étalons, soigneusement gradués à l'aide de vitesses *absolues* directement connues, telles que celles que l'on peut déterminer expérimentalement au moyen d'aspirateurs, ou de procédés analogues.

SECONDE PARTIE

MOTEURS HYDRAULIQUES

CHAPITRE VIII

THÉORIE GÉNÉRALE DES MOTEURS HYDRAULIQUES

—

§ 1

ÉTABLISSEMENT D'UNE CHUTE D'EAU

142 — Une *chute* hydraulique consiste en une brusque dénivellation subie par un cours d'eau, qui se trouve encaissé entre des constructions appropriées. Parfois la nature en a préparé les éléments dans les pays de montagnes. Dans d'autres cas, il faut créer cette chute de toutes pièces.

On peut y arriver en barrant en totalité une vallée au moyen d'une digue, et la transformant par là en un étang. Des passages spéciaux sont ménagés à travers cette levée, en vue de l'installation des récepteurs.

D'autres fois, on pratique de loin, le long de l'un des contreforts de ce vallon, une dérivation, totale ou particlle, du cours d'eau qui, abandonné à lui-même, en occuperait le thalweg. On lui construit, pour cela, un lit artificiel, suivant un tracé qui diffère peu d'une ligne de niveau du sol, en raison de la faiblesse de la pente, que l'on cherche à réduire au minimum, afin de conserver la plus grande hauteur possible. On peut également, à l'aide de remblais,

d'aqueducs ou d'estacades, couper au plus court, de manière à éviter les contours inutiles de la courbe de niveau. On glaise ou l'on bétonne les traversées perméables.

Aux abords de l'usine, un *bief de retenue* plus ou moins étendu reçoit les eaux, pour en régulariser l'écoulement. Des estacades spéciales servent, au besoin, de défense contre les arbres flottants entraînés par les crues, ou la débâcle des glaces. Deux *bajoyers* ou

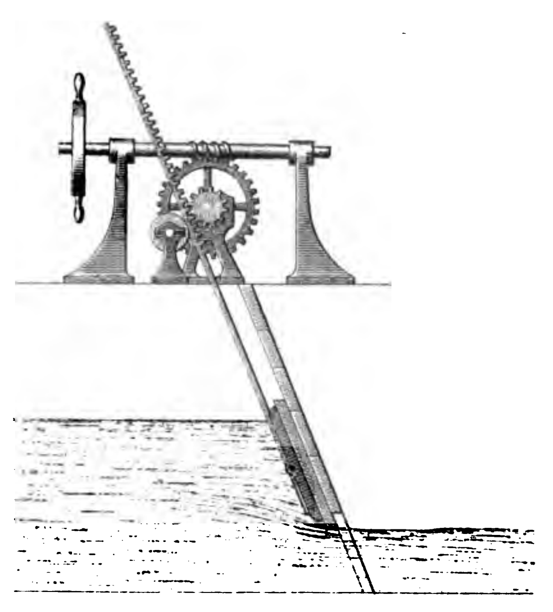


Fig. 72. — Vanne de travail.

murs verticaux comprennent entre eux la roue hydraulique. Des *vannes* ([1]) permettent de régler à volonté la distribution de l'eau. On distingue parmi elles les *vannes de travail*, ou *mouleresses* (fig. 72), pour le service normal; la *vanne de fond*, que l'on établit au point le plus creux, afin de vider le bief au moment des curages

([1]) Certaines vannes ont été combinées de manière à fournir automatiquement un débit constant. On peut citer, à cet égard, la vanne Chaubard (Schlœsing, *Annales des Ponts et chaussées*, 1855. — Bresse. *Mécanique appliquée*, t. II, § 41. — Collignon. *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, t. II, p. 144); celle de M. Maurice Lévy (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 29 novembre 1869. — *Annales des Ponts et chaussées*, décembre 1869, chronique); et celle de M. Parenty (*Génie civil*, t. VIII, p. 142).

ou des réparations; les *vannes de décharge* (fig. 73), qui sont destinées à dépenser, en temps de crue, les plus grandes eaux, et dont on règle l'importance d'après les traditions de la contrée; enfin la *vanne de garde*, située en amont des autres, et permettant de faire passer, quand il le faut, tout le débit au *déversoir*.

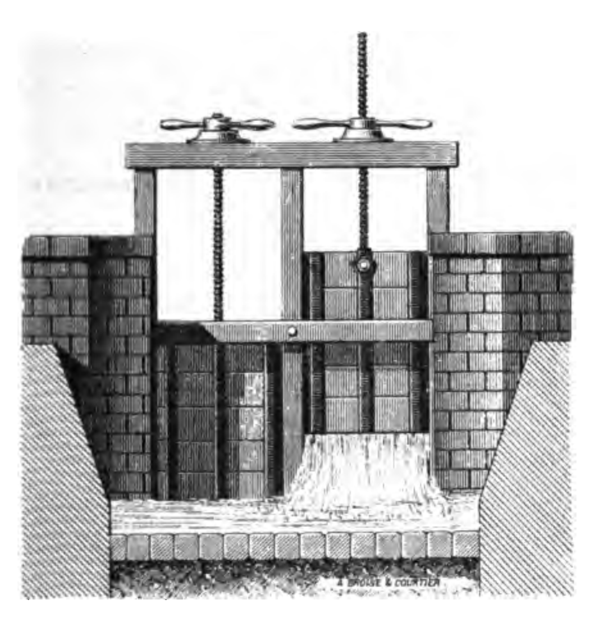


Fig. 73. — Vannes de décharge.

Le seuil de ce dernier, ainsi que sa largeur, sont fixés pour chaque usinier par le service des Ponts et chaussées. Le niveau en est timbré, et son accès doit rester ouvert en tous temps aux agents de cette administration. On détermine également la largeur et la hauteur du vannage de décharge. Le règlement du cours d'eau fixe, d'après cela, pour chaque établissement hydraulique, sa chute motrice. En effet, le plan d'eau supérieur de l'un d'eux ([1]) détermine, en fonction de la pente d'écoulement et de la distance, le niveau inférieur de l'usinier d'amont. L'administration réglemente en même temps le *régime par éclusées*, c'est-à-dire les heures pendant lesquelles chacun doit marcher, lorsque le débit est trop faible pour

([1]) Indicateur du niveau des biefs à distance (*la Lumière électrique*, t. XVII, p. 21

mobiles du récepteur, et par les pressions *propres* du liquide d'amont et d'aval, dans les sections A_0B_0 et A_1B_1.

En ce qui concerne ces dernières, l'action totale exercée sur la surface plane A_0B_0 dans le régime hydrostatique (nº 10) est le produit de sa surface Ω_0 par la pression ϖy_0 développée en son centre de gravité. Son travail sera donc $\varpi y_0 \Omega_0 v_0 \theta$, c'est-à-dire, d'après l'équation de continuité, $\varpi Q y_0 \theta$, ou enfin $P y_0 \theta$. On aura, par conséquent, pour l'ensemble des deux sections d'amont et d'aval :

$$P\theta\,(y_0 - y_1).$$

Si l'on réunit ce terme à l'expression précédente du travail de la pesanteur, on obtient le produit de $P\theta$ par la différence entre $y_0 + z_0$ et $y_1 + z_1$, laquelle représente la dénivellation h des deux surfaces libres dans les canaux d'amenée et de fuite. Il vient ainsi, comme expression réduite de l'ensemble de tous les travaux précédents :

$$P\theta h.$$

144 — Il reste à envisager ceux qui proviennent des aubes mobiles. Nous décomposerons, à cet effet, les forces qu'elles exercent, suivant la normale et une tangente en chaque point; et nous nous occuperons d'abord des réactions normales. Considérons comme juxtaposées, en un même point de la situation initiale de l'aube, une particule métallique m de cette dernière, et une molécule d'eau M. Ces deux points matériels se séparent ensuite, en raison du glissement du liquide sur le récepteur, et nous les retrouvons, à la fin de la période, aux points m' et M'. Ils ont, pour atteindre ces situations, décrit respectivement dans l'espace des trajectoires curvilignes dont les droites mm', MM' représentent les cordes. La réaction normale s'est, pendant ce temps, déviée avec la surface elle-même. Mais, en supposant les aubes assez multipliées pour que la période soit suffisamment courte, nous ferons abstraction de cette déviation, et nous considérerons l'effort mutuel comme constamment perpendiculaire au plan tangent final $M'm'$. Nous négligerons, en outre, les variations qu'a pu subir son intensité, pendant cet intervalle.

Si nous évaluons, dans ces conditions, le travail exercé par la réaction N de l'aube sur le liquide auquel nous appliquons l'équation des forces vives, il faudra multiplier N par la projection de MM′ sur la normale. Si, au contraire, on envisageait à part le travail exercé par l'eau sur le récepteur, travail dont l'expression constitue précisément l'inconnue principale de cette théorie, il nous faudrait multiplier la force n par la projection de mm' sur la normale. Mais on a $N = n$; et, de plus, c'est le même plan, à savoir celui de l'aube, qui sert à projeter à la fois les points M′ et m' sur la normale. Ces deux travaux sont donc égaux en valeur absolue, et ils ne diffèrent qu'en ce que l'un est résistant à l'égard de l'eau, tandis que l'autre est accélérateur pour le récepteur.

Appelons T *le travail moteur recueilli par la machine pendant l'unité de temps;* $T\theta$ sera la valeur commune de ces deux travaux, et nous aurons à inscrire, avec le signe négatif, dans l'équation des forces vives appliquée à la masse liquide, le terme :

$$-\ T\theta,$$

pour représenter le travail résistant que lui oppose le récepteur actionné par elle.

La démonstration précédente ne saurait s'étendre au travail des forces tangentielles. Mais ce terme présente relativement peu d'importance. Il est bien clair, en effet, que, pour commander le moteur, on compte beaucoup moins sur la *friction* qu'il peut éprouver tangentiellement de la part de l'eau, que sur les efforts exercés par elle *d'aplomb,* c'est-à-dire normalement. Ce travail, sans être nul, n'a donc qu'une importance secondaire. Il en est, par suite, de même de celui que les réactions égales et contraires opposent à l'eau, et qui sera évidemment du même ordre, sans que nous soyons, comme tout à l'heure, autorisés à le dire précisément égal.

Nous en rapprocherons le travail des forces tangentielles opposées par les parois fixes, lequel avait été réservé tout à l'heure; et, en même temps, celui des forces intérieures de viscosité.

Nous y rattacherons enfin le *déchet dû aux pertes effectives de liquide;* car nous avons, dans ce qui précède, essentiellement

supposé que l'eau agissait en totalité. Or il n'en est pas toujours ainsi. Dans certains cas, il s'opère un *déversement* prématuré des vases qui la contiennent, avant qu'ils aient atteint le point le plus bas de leur parcours; et, dans d'autres circonstances, une partie du liquide s'échappe par le *jeu*, c'est-à-dire à travers l'espace libre que l'on est obligé de maintenir entre les coursiers fixes et les cloisons mobiles, afin d'éviter des grippements ou des arc-boutements.

Si nous groupons toutes ces influences en un même total, en représentant par T′ la valeur absolue du travail qui leur correspond pendant l'unité de temps, nous aurons à introduire dans l'équation le terme :

$$- T'\theta.$$

145 — Il reste à tenir compte d'une dernière influence, celle des *changements brusques* que subit la vitesse de la veine, dans son parcours au contact des parois fixes ou des parties mobiles de la machine. Il convient de distinguer, à cet égard, les modifications subites dues aux changements brusques de la section offerte à l'écoulement (nº 62), et celles qui résultent du choc de l'eau contre des corps solides (nº 70). Nous avons obtenu, pour chacun de ces deux cas, des énoncés identiques. Si Υ désigne la vitesse perdue, il s'opère chaque fois une perte de demi-force vive marquée par celle qui correspond à cette vitesse, à savoir :

$$- P\theta \frac{\Upsilon^2}{2g}.$$

Nous aurons donc à inscrire dans l'équation un semblable terme à l'occasion de chacun des changements brusques, en nombre quelconque, qui peuvent se produire; c'est-à-dire, pour leur ensemble :

$$- P\theta \sum \frac{\Upsilon^2}{2g}.$$

146 — Nous pouvons actuellement formuler l'équation des forces vives :

$$P\theta \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = P\theta h - T\theta - T'\theta - P\theta \sum \frac{\Upsilon^2}{2g}.$$

On en déduit, en supprimant le facteur θ, et résolvant par rapport à l'inconnue principale :

$$(74) \qquad T = P\left(h + \frac{v_0^2 - v_1^2 - \Sigma \Upsilon^2}{2g}\right) - T'.$$

Telle est la relation fondamentale qui fait connaître le travail recueilli par un récepteur hydraulique quelconque.

On peut lui donner une forme plus simple. En effet, pour que la vitesse v_0 prenne naissance dans le canal d'amenée, on a dû consacrer à sa production une certaine charge η, prélevée sur la hauteur de chute totale H (fig. 74), de telle sorte que :

$$H = h + \eta.$$

La formule (21) qui régit l'écoulement dans un canal rectiligne au sortir de la vanne, nous donne d'ailleurs, pour relier ces deux éléments :

$$\frac{v_0^2}{2g} = \eta.$$

L'équation (74) devient d'après cela [1] :

$$(75) \qquad T = P\left(H - \frac{v_1^2 + \Sigma \Upsilon^2}{2g}\right) - T'.$$

[1] On trouve pour la première fois cette formule fondamentale, ou du moins une relation équivalente, dans le mémoire du chevalier de Borda sur les roues hydrauliques (*Mémoires de l'Académie des sciences*, 1767).

§ 3

DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE

147 — On voit que l'expression du travail comporte comme maximum :

$$T_m = PH,$$

lorsque l'on réduit par la pensée, jusqu'à les annuler, les termes :

$$r_1 = 0, \qquad \Upsilon = 0, \qquad T' = 0.$$

Le travail THÉORIQUEMENT DISPONIBLE *d'une chute d'eau est donc exprimé par le produit de sa hauteur et de son débit en poids pendant l'unité de temps* (¹). Cette formule constitue la première approximation de la valeur vénale de la chute; aperçu qui pourra, bien entendu, se modifier dans chaque cas, d'après diverses circonstances relatives à la nature de l'emplacement, à la proximité des approvisionnements et des débouchés, aux voies de communication, etc.

Le produit PH n'est pas rigoureusement constant d'une saison à

(¹) Je citerai, à cet égard, quelques exemples parmi les plus remarquables.

A Schaffouse, on a percé, en amont de la chute du Rhin, un puits suivi d'un tunne qui aboutit en aval de la cascade. Trois turbines y recueillent une force de 660 chevaux.

La chute de Montmorency, à 11 kilomètres de Québec, présente une hauteur verticale de 80 mètres et une force de près de 900 chevaux. Elle est utilisée pour la production de la lumière électrique, à l'aide d'une turbine animée d'une vitesse de 610 tours par minute (*La lumière électrique*, t. XIX, p. 180).

L'établissement hydraulique de Bellegarde, à la perte du Rhône, comprend une tranchée de 175 mètres de longueur sur 15 mètres de large. On y a utilisé, à l'aide de turbines Jonval, une force de 3780 chevaux, qui ne représente guère que le tiers de la puissance disponible (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, avril 1883, p. 1031. — *The Engineer*, 1ᵉʳ volume de 1874).

La rivière Connecticut est traversée, à Holyoke, par un barrage déterminant une chute de 18ᵐ.30 sur laquelle divers établissements industriels utilisent une force de 15 000 chevaux durant le jour et 8000 pendant la nuit (*Portefeuille économique des machines, de l'outillage et du matériel*, 3ᵉ série, t. VIII, p. 17).

On a formulé, en ce qui concerne la chute du Niagara, des projets encore plus gigantesques. On estime à sept millions de chevaux la puissance disponible de cette cataracte (*Lumière électrique*, t. XVIII, p. 142).

l'autre, mais il se modifie moins cependant que chacun de ses deux facteurs en particulier. Ceux-ci varient, en effet, en sens contraires l'un de l'autre. Si nous partons des valeurs observées au moment de l'*étiage*, le débit P augmentera quand surviennent les crues. Le niveau se relève donc à la fois dans le canal de fuite en aval, et sur le déversoir en amont. Mais la vitesse est grande en ce dernier point, et la lame d'eau y reste toujours mince. Sa faible épaisseur ne peut donc subir que des accroissements insignifiants. Au contraire, le canal de fuite doit être profond, afin que la grandeur de la section ait pour effet de réduire, d'après l'équation de continuité, la vitesse v_1 qui forme l'un des termes négatifs de la formule (75). Ce bief éprouve, d'après cela, des variations en rapport avec son épaisseur. Il se relève, par suite, plus que le niveau supérieur, et la hauteur H qui les sépare se trouve diminuée, conformément à l'énoncé.

148 — Il est important de reconnaître comment on pourra se rapprocher le plus possible de la puissance théorique PH, c'est-à-dire obtenir le maximum du rendement λ, qui a pour expression générale :

$$(76) \qquad \lambda = \frac{T}{T_m} = 1 - \frac{v_1^2 + \Sigma \Upsilon^2}{2gH} - \frac{T'}{PH}.$$

Un premier moyen consistera, ainsi qu'il vient d'être dit tout à l'heure, à réduire la vitesse d'aval v_1, mais non pas assurément jusqu'à zéro, car l'écoulement se trouverait par là supprimé et le récepteur noyé. Il convient donc d'avoir des canaux de fuite larges et profonds, ou des tuyaux d'un très grand diamètre dans les machines qui comportent ce mode d'évacuation.

On devra éviter aux veines liquides les changements brusques, c'est-à-dire les angles vifs ou anfractuosités, et même les courbures trop accusées, qui donnent lieu à la production des remous, destructeurs de force vive (nos 61 et 78). Il conviendra également de supprimer les chocs normaux contre des surfaces solides (n° 70). Les filets devront, pour leur entrée dans le récepteur, se présenter *tangentiellement aux aubes par leur vitesse* RELATIVE. On n'est

même pas limité pour les vitesses Υ comme on l'était pour v_1, et rien n'empêche de s'efforcer de les annuler complètement ([1]). On arrivera par là, non seulement à améliorer le rendement, mais en même temps à soulager le récepteur, que ces chocs répétés finissent par ébranler, en fatiguant tous les assemblages, et qu'ils entretiennent, en outre, dans un état vibratoire particulièrement favorable à la déperdition de la force vive au dehors ([2]).

En ce qui concerne T', si nous passons en revue les nombreuses influences que résume ce terme (n° 144), nous devrons nous attacher à diminuer d'abord les frottements sur les parties fixes, en maintenant en bon état les enduits des maçonneries; à éviter le déversement autant qu'il sera possible, et à réduire la *valeur absolue* du jeu à ce qui est strictement indispensable. Il en sera de même de sa *valeur relative*. Il conviendra, à cet égard, que la lame d'eau ait une épaisseur suffisante, pour que celle que l'on a cru devoir laisser à l'espace libre n'en forme qu'une faible fraction, de manière à atténuer son rôle proportionnel. Il faudra enfin mener assez rondement les récepteurs qui présentent cette particularité, sans quoi le liquide aurait tout le temps de filtrer sans agir ([3]).

149 — Il nous reste à considérer le terme h. Il est de ceux qu'il convient, au contraire, d'augmenter autant que possible. A la vérité, il semble, au premier abord, exactement défini *a priori* par le règlement administratif des déversoirs respectifs de l'usine et de celle qui lui succède en aval (n° 142). Cependant on peut parfois puiser, dans le principe du ressaut, un artifice de nature à augmenter h en dehors de ces limites.

Imaginons, en effet, que l'on ait créé, dans les canaux d'amenée et de fuite, des ressauts très rapprochés du récepteur (fig. 75). Au

([1]) Les turbines, quand elles sont installées avec tous les perfectionnements actuels, fournissent, à cet égard, un excellent modèle.

([2]) Déjà Carnot avait énoncé ces propositions relatives à v_1 et à Υ dans ses *Principes généraux du mouvement et de l'équilibre*.

([3]) Si l'on suppose, en effet, l'allure indéfiniment ralentie, l'eau se tendra en amont à une hauteur suffisante pour déterminer une vitesse capable de débiter tout le liquide à travers le jeu; et si la paroi du bief ne le permettait pas, le liquide passerait par le déversoir. Le cours d'eau se trouverait ainsi dépensé en entier, sans que l'on ait presque rien recueilli de son énergie motrice.

lieu d'opérer avec le niveau A, qui se relie à la manière ordinaire avec le déversoir de l'usine, et le plan B déterminé par celui de l'usinier d'aval, on dispose dorénavant le récepteur entre le niveau A′ de l'amenée directe sur son sommet, et celui B′ de l'évacuation immédiate à son pied. On agit dès lors avec la hauteur motrice h' qui sépare les deux nouvelles surfaces libres, au lieu de h. Le terme positif semble donc augmenté, et, avec lui, le rendement.

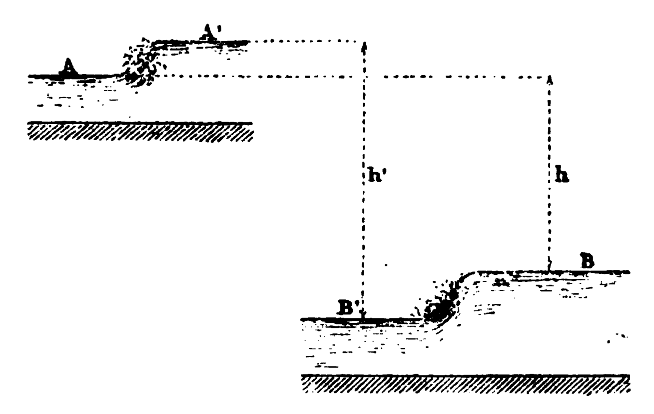


Fig. 75.

Il ne faut pas méconnaître, en effet, qu'il y a là une influence utile, quand elle sera employée avec discernement; mais elle demande à être étudiée de plus près. Nous avons reconnu, en effet, que l'une des conditions essentielles pour la production de ces curieux phénomènes, est une vitesse d'une certaine importance (nº 110). Il est donc nécessaire, pour la production du ressaut B′B, d'augmenter suffisamment v_1. Par conséquent, pour gagner de ce côté sur le terme h, il faudrait perdre inversement par le terme négatif v_1^2, contrairement à ce qui a été expliqué tout à l'heure (nº 148). Ce n'est donc que lorsqu'on se trouvera dans des cas exceptionnels, où des motifs particuliers auront conduit à laisser à v_1 une valeur considérable (¹), qu'il deviendra alors, en effet, très opportun de chercher, au moyen de l'artifice du ressaut, à retirer à l'eau qui abandonne le récepteur, une partie de la force vive

(¹) Comme pour la roue en dessous à aubes planes, et même parfois la roue de côté:

qu'elle emporterait, sans cela, définitivement avec elle. On l'emploiera, au contraire, à relever le courant, en sens contraire de la pesanteur, de B' en B, de manière à permettre de faire travailler la gravité dans l'appareil sur le supplément de hauteur BB'.

Quant au ressaut d'amont, il donne lieu à la même objection, sans que l'on puisse, cette fois, y opposer la même réponse. Pour déterminer, en effet, ce ressaut AA', il faudrait attribuer une valeur suffisante à v_0, et, par suite, à η. Ce serait donc après avoir employé gratuitement une portion de la hauteur de chute à créer une surabondance de vitesse dans le canal supérieur, que l'on entreprendrait, à l'aide de l'artifice du ressaut, de récupérer dans h' cette portion de la hauteur. Il y aurait là un cercle vicieux pur et simple, inutile en théorie, et pratiquement nuisible, à cause des résistances qu'il mettrait en jeu, et des complications gratuites dont il deviendrait l'occasion.

Concluons de ces explications que le ressaut d'amont ne devra jamais figurer dans l'établissement d'un récepteur hydraulique, tandis que celui d'aval pourra, dans certains cas, rendre d'utiles services.

§ 4

CLASSIFICATION DES RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES

150 — Les récepteurs hydrauliques peuvent être classés d'après deux points de vue très différents, suivant que l'on s'attache au caractère cinématique de l'appareil ou à son fonctionnement dynamique.

Au point de vue géométrique, on ne rencontre, comme il est naturel, que les mouvements les plus simples : translation rectiligne ou rotation. Le mouvement rectiligne est nécessairement alternatif. Celui de rotation pourrait, au contraire, être progressif ou alternatif; mais la régularité du premier mode le fait invariablement préférer au second, et le corps tournant joue alors, dans une certaine mesure, le rôle de volant, pour rapprocher de l'uniformité le fonctionnement périodique de l'appareil. Ce n'est d'ailleurs que

dans les cas les plus rares, qu'on l'établit autour d'un axe incliné à l'horizon (¹). L'influence de la pesanteur exige évidemment que l'axe soit vertical ou horizontal.

D'après cela, nous rangerons les récepteurs en trois catégories : 1° les *roues*, qui tournent autour d'un axe horizontal ; 2° les *turbines*, dont l'axe est vertical ; 3° les *machines à piston* (²), dont l'organe récepteur possède une translation rectiligne et alternative.

151 — Le fonctionnement dynamique nous présente également trois modes distincts.

Le premier comprend les récepteurs *à poids*. L'eau effectue alors, en union avec l'appareil, un certain parcours dans le sens vertical, le long duquel la gravité développe du travail. Dans le type le plus net, la roue en dessus, le liquide est déposé sur le sommet de la roue, et, pour ainsi dire, sans vitesse. v_0 et η se trouvent ainsi réduits presque à rien, et h atteint à peu près la valeur totale de H.

La seconde catégorie renferme les récepteurs *à choc*. L'eau est alors préalablement animée d'une vitesse considérable, avec laquelle elle vient heurter normalement les aubes du moteur, pour les chasser devant elle. Dans le type le mieux caractérisé, la roue en dessous à aubes planes, h se réduit à peu près à rien, η atteint en quelque sorte la totalité de la hauteur de chute H, et v_0 le maximum dont il est susceptible, à savoir $\sqrt{2g\mathrm{H}}$ (éq. 17, p. 47). On peut, dès à présent, être assuré que ces appareils seront les plus inférieurs au point de vue du rendement, puisque les chocs occasionnent toujours des pertes de force vive (n° 70).

La troisième classe présente, au contraire, le caractère le plus perfectionné et le plus scientifique. Elle comprend les récepteurs *à réaction*. On admet encore l'eau avec une vitesse importante v_0, en consacrant, à la production de cette dernière, une portion η de la chute qui égale la hauteur H, ou en approche beaucoup. Le fluide

(¹) Certaines turbines ont été installées de cette manière (n° 105).

(²) Nous empruntons cette dénomination aux récepteurs les plus importants parmi ceux qui sont animés d'un mouvement de translation ; mais on trouvera, dans la même catégorie, quelques appareils dans la composition desquels il n'entre pas de piston.

éprouve alors un mouvement relatif à l'intérieur du corps tournant, le long de certaines cloisons directrices. Celles-ci se terminent, pour l'émission du liquide au dehors, dans une direction aussi rapprochée que possible d'être tangente à la circonférence extérieure, mais en sens contraire de la rotation. La vitesse *relative* de sortie w_1 peut donc être considérée, par approximation, comme directement opposée à la vitesse *d'entraînement* u_1 du récepteur. On s'arrange, en outre, pour que leurs valeurs soient égales. Dès lors la vitesse *absolue* v_1, qui est leur résultante, s'annule, suivant le *desideratum* qui a été formulé ci-dessus (n° 148). L'eau se trouve ainsi complètement dépouillée de la force vive dont elle avait été momentanément chargée par la gravité, et qu'elle a communiquée intégralement au récepteur.

Quant à l'ordre dans lequel nous disposerons cette étude, nous adopterons, pour ses grandes divisions, le classement géométrique : roues (chap. IX), turbines (chap. X), moteurs à piston (chap. XI et XII) ; et, dans chacune d'elles, nous suivrons l'ordre dynamique, en traitant successivement des appareils à poids, à choc, et à réaction.

CHAPITRE IX

ROUES HYDRAULIQUES

—

§ 1

ROUE EN DESSUS

152 — *Construction.* — La roue hydraulique qui présente le

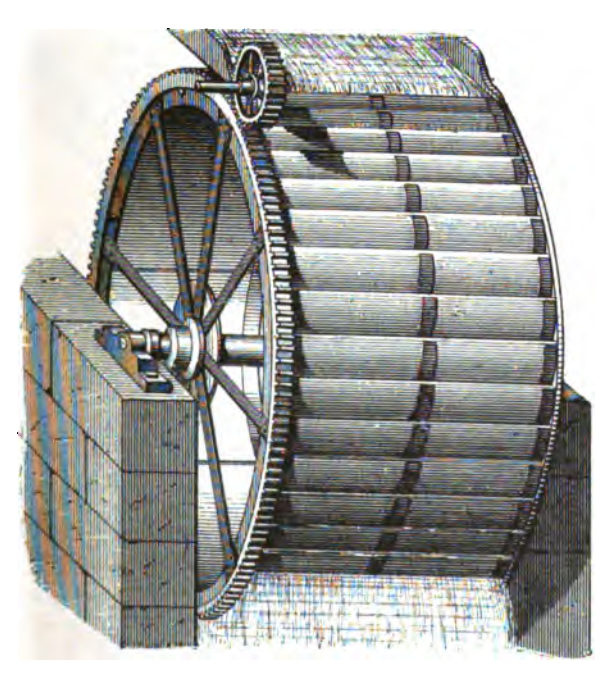


Fig. 76. — Roue en dessus (vue perspective).

plus nettement le caractère du moteur à poids est la *roue à augets*,

ou *roue en dessus* (¹). Le liquide y est admis théoriquement au point le plus haut, et se trouve réparti dans les vases qui garnissent le pourtour de la *jante*, soit en avant, selon le mode le plus

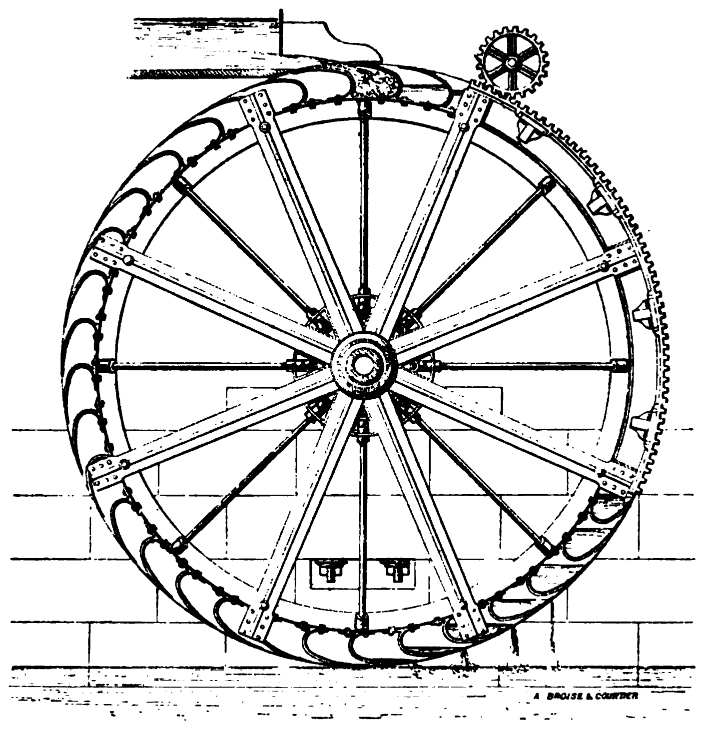


Fig. 77. — Roue en dessus (élévation latérale).

ordinaire (fig. 76, 77, 78), soit en arrière pour les *roues de poitrine*, au moyen du *vannage à persienne* (fig. 79). Les deux mouvements ainsi déterminés sont inverses l'un de l'autre. Certains récepteurs de ce genre, destinés à l'extraction des minerais, qui doit s'effectuer alternativement dans les deux sens, présentent à la fois les deux dispositifs précédents, avec un double vannage dont on ouvre et l'on ferme successivement les deux vannes. Ces roues sont dites *à double aubage*.

Ajoutons que, dans les roues Millot et Straubb (²), l'admission a

(¹) *Oberschlächtige Wasserräder, Overshott Wheels.*

(²) Notes de G. Richard au *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs* de

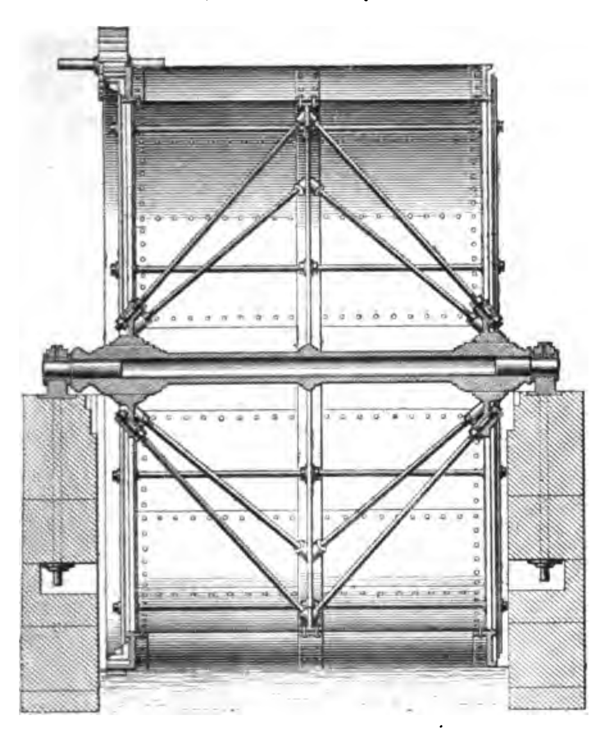


Fig. 78. — Roue en dessus (coupe méridienne).

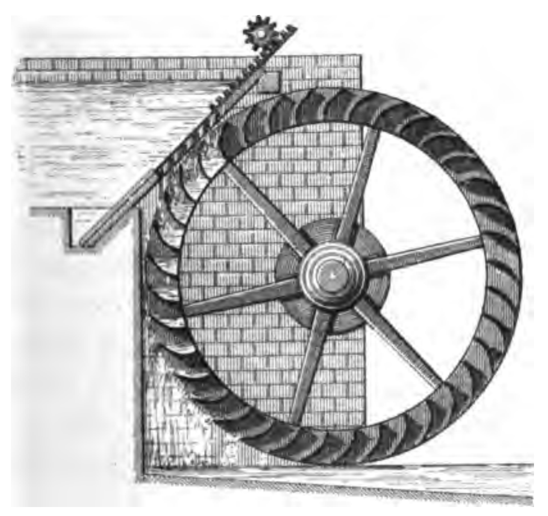


Fig. 79. — Roue en dessus alimentée en arrière.

lieu par la circonférence intérieure (fig. 80). On y trouve, en principe, cet avantage d'avoir des orifices distincts pour l'entrée et pour la sortie du liquide. On peut dès lors combiner chacun d'eux de la

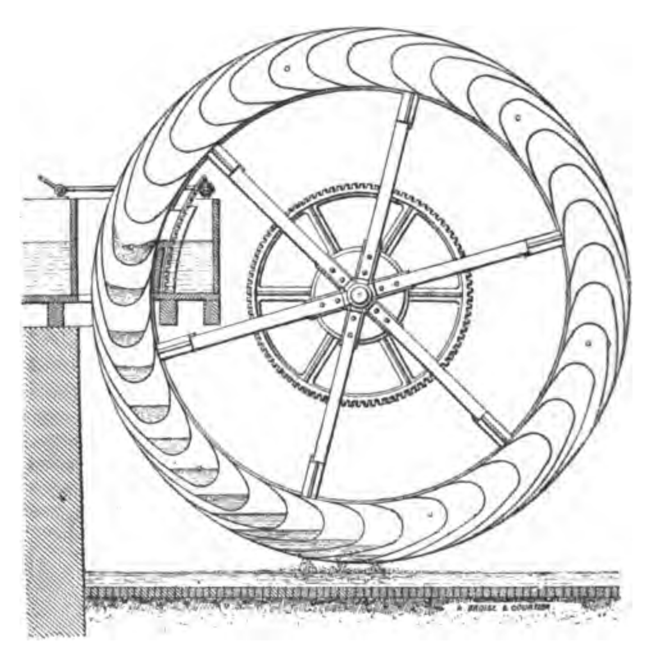


Fig. 80. — Roue en dessus Millot et Straubb alimentée intérieurement.

manière la plus rationnelle en vue de la fonction à laquelle il est appelé, ce qui n'est plus possible dans les conditions ordinaires, où la vidange de l'auget s'effectue par le même orifice que son remplissage.

153 — La hauteur de chute diffère pratiquement très peu du diamètre de la roue. L'écart qui les sépare comprend : 1° une faible hauteur η (fig. 81), destinée à créer la vitesse, très restreinte comme nous le verrons, avec laquelle le fluide est donné sur la roue ; 2° l'épaisseur de la lame d'eau d'amont ; 3° celle du fond du canal d'admission ; 4° le double jeu qu'il est évidemment

Rankine, p. 612. — Vigreux. *Théorie et pratique de l'art de l'ingénieur*, série D, p. 177.

nécessaire de laisser entre la surface inférieure de ce fond et la jante, de même qu'entre celle-ci et le plan d'eau inférieur. Cette dernière surface est d'ailleurs variable avec le régime du cours d'eau. Sous ce rapport, il ne faut pas exagérer le jeu, afin de ne pas perdre sur la chute. Il convient cependant d'éviter que la roue *patouille*, si ce n'est au moment des grandes crues.

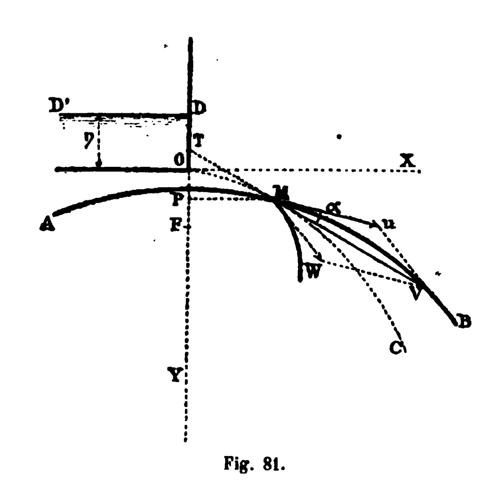


Fig. 81.

La hauteur H de la chute s'écartant peu de celle de la roue, ne saurait être ni très petite, ni très grande. En général, elle reste limitée entre 3 mètres et 10 à 12 mètres, ou même 15 mètres (¹). Les chutes les mieux appropriées à l'emploi de la roue en dessus sont comprises entre 4 et 6 mètres.

154 — *Rendement.* — Si nous reprenons les notations de la formule générale (75), nous voyons que la vitesse v_1 avec laquelle l'eau abandonne le récepteur ne diffère pas de la ***vitesse à la jante u.*** En effet, le liquide ne quitte la roue qu'après s'être mis en repos relatif dans les augets, et s'être, pour ainsi dire, incorporé à eux. On a donc :

$$v_1 = u.$$

Quant à la vitesse perdue Υ, elle constitue intégralement la vitesse relative w avec laquelle l'eau s'insère au point M, puisque celle-ci finit, au bout d'un temps très court, par faire corps avec l'auget. Pour déterminer cette intersection M du cercle AB avec la parabole

(¹) Rankine. *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs*, traduit par G. Richard, p. 187.

OC dessinée par la veine liquide, nous formerons l'équation de cette dernière courbe. L'eau s'échappant de l'orifice O avec la vitesse horizontale $v_0 = \sqrt{2g\eta}$ (éq. 17, p. 47), on a, en projection sur l'horizontale :

$$x = t\sqrt{2g\eta},$$

et, suivant la verticale :

$$y = \frac{1}{2} gt^2.$$

On en déduit, par l'élimination du temps t :

$$x^2 = 4\eta y.$$

Nous voyons par là que le paramètre de cette parabole est 2η. Elle admet donc pour directrice précisément le niveau DD′ du bief supérieur, et son foyer se trouve situé en F à une distance égale de l'origine OF = OD. Rien de plus facile, dès lors, que de construire cette courbe par points et tangentes, pour déterminer avec précision l'intersection M [1]. On y tracera la direction MT de la vitesse v, en prenant OT = OP. Quant à la valeur de cette vitesse, elle s'obtiendra en appliquant l'équation des forces vives depuis le point O, pour lequel la vitesse est $\sqrt{2g\eta}$, jusqu'en M, où elle possède la valeur inconnue v :

$$v^2 - 2g\eta = 2gy,$$

ce qui donne :

$$v = \sqrt{2g(\eta + y)}.$$

Comme l'on connait en même temps la vitesse u à la jante, on

[1] On pourrait également effectuer cette détermination par le calcul, ainsi que celle des tangentes et de l'angle α qu'elles comprennent. Ces deux coniques ayant un axe de symétrie commun, l'on n'aurait à résoudre, pour cela, que des équations du second degré.

déterminera, à l'aide d'un parallélogramme, la direction et la valeur de la vitesse relative w. Nous venons de voir, du reste, qu'elle ne diffère pas de la vitesse perdue Υ. On peut donc écrire, en appelant α l'angle sous lequel se rencontrent les deux courbes :

$$\Upsilon^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha.$$

Si l'on substitue les valeurs de v_1 et de Υ dans la formule générale (75), elle devient :

$$T = P \left\{ H - (\eta + y) + \frac{u\left[\sqrt{2g(\eta + y)} \cos \alpha - u\right]}{g} \right\} - T',$$

et la question est de rendre T maximum. Il faut, pour cela, que cos α soit aussi grand, c'est-à-dire α aussi petit que possible. Il ne saurait d'ailleurs être rigoureusement nul, car, la parabole devenant alors tangente au cercle, le jet liquide ne ferait qu'effleurer la roue sans y pénétrer. Cet angle devra donc conserver une certaine valeur, en rapport avec l'épaisseur de la lame d'eau qui doit s'insérer dans les augets, et qui est, en général, de $0^m,05$ à $0^m,10$. Trop mince, elle obligerait à augmenter démesurément la largeur de la roue, pour dépenser tout le débit du cours d'eau (1); trop épaisse, elle gênerait la sortie de l'air en provoquant de gros bouillons, des éclaboussures, et la perte d'une certaine quantité d'eau.

Si nous acceptons pour α une valeur déterminée, aussi réduite que possible, il y aura lieu ensuite de disposer de la valeur de u, de manière à rendre maxima l'expression :

$$u\left[\sqrt{2g(\eta + y)} \cos \alpha - u\right],$$

où l'on reconnaît le produit de deux facteurs dont la somme est indépendante de u. Nous savons qu'il faut, pour cela, que ces facteurs soient égaux, ce qui donne :

(1) Le débit par mètre de largeur varie en général de $0^{m3},100$ à $0^{m3},150$ par seconde.

(77) $$u = \frac{\cos \alpha}{2} \sqrt{2g(\eta + y)}.$$

Telle est donc la vitesse avec laquelle il conviendra de conduire la roue [1].

Si l'on reporte cette valeur dans celle de T, il vient pour le maximum :

(78) $$T_m = P \left[H - \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2} \right) (\eta + y) \right] - T'.$$

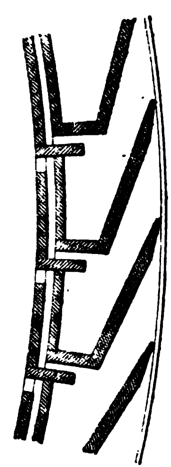
On voit par là que l'on perd, pour l'utilisation de la hauteur de chute H, plus que la moitié $\frac{\eta}{2}$ de la charge affectée à la création de la vitesse initiale v_0. Il y a lieu, par conséquent, de la réduire autant que possible. On restreint ordinairement η entre $0^m,20$ et $0^m,25$. La vitesse v_0 diminuera donc de son côté, et par suite aussi la vitesse à la jante u, qui doit lui être inférieure pour que l'eau puisse s'introduire dans la roue. La conclusion qui se dégage de ces considérations est que *la roue à augets doit être menée lentement.*

155 — *Forme des augets.* — Le parallélogramme des vitesses nous a fait connaître la direction de la vitesse relative. Il convient de l'adopter comme premier élément du profil suivant lequel on courbera la tôle pour construire les augets. Ce n'est pas, cependant. en vue du motif qui a été indiqué ci-dessus (n° 148). Il importe peu, en effet, d'éviter à l'entrée la perte de tout ou partie de w, puisque cette perte ne peut manquer de se consommer dans l'intérieur de l'auget. Mais il est nécessaire d'effectuer nettement l'introduction de la veine, en évitant les rejaillissements. Sauf cette première tangente, le reste du tracé demeure à peu près arbitraire, et seulement astreint à présenter une continuité convenable, ainsi qu'une section partout suffisante pour l'échappement de l'air. M. Fairbairn a

[1] Nous indiquerons plus loin d'une manière générale (n° 249) comment l'on reste maître de conduire un récepteur quelconque à l'allure que l'on juge préférable.

même employé une sortie distincte pour ce fluide (fig. 82); préoccupation qui domine également dans la construction de la roue Millot et Straubb (n° 152).

Le nombre N des augets doit rester compris entre certaines limites. Trop petit, l'auget étranglerait l'entrée de l'eau et l'évacuation de l'air. Trop grand, il augmenterait inutilement le déversement. Imaginons, en effet, que l'on tourne la roue jusqu'à ce que l'un des augets arrive exactement au point pour lequel le liquide affleure au bord, et va commencer à se déverser au dehors si la rotation continue. Arrêtons le moteur dans cette situation, et doublons le nombre des augets en intercalant, au milieu de leurs intervalles, des cloisons semblables aux précédentes. Nous enlèverons ensuite, par la pensée, la moitié de l'eau contenue dans les anciens vases pour la placer dans les nouveaux. Il devient bien clair qu'avec ce mode de fonctionnement, le fluide n'affleure plus dans l'auget considéré, et qu'une rotation supplémentaire sera nécessaire pour le ramener au bord de la tôle. Le point de déversement se trouve donc abaissé, lorsqu'on augmente le nombre N. En général, on détermine ce dernier de manière que l'espacement à la jante reste compris entre $0^m,32$ et $0^m,35$; en tenant compte de ce que N doit être un nombre entier, multiple, pour plus de simplicité, du nombre des rayons de l'embrassure.


Fig. 82.
Augets à sortie d'air.

L'épaisseur de la cloison varie de $0^m,015$ à $0^m,030$ pour le bois, et de $0^m,002$ à $0^m,004$ avec la tôle. L'emploi du métal est donc avantageux sous ce rapport, pour accroître la partie utile de l'espacement.

Outre cette première dimension suivant la circonférence, il en faut assigner une seconde dans le plan de section droite de la roue, à savoir la largeur de la couronne ou la profondeur de l'auget, laquelle reste ordinairement comprise entre $0^m,25$ et $0^m,30$; et enfin une troisième : la largeur de la roue suivant ses génératrices, dont nous allons maintenant nous occuper.

156 — Pour la déterminer, on se donne arbitrairement le *rapport de remplissage* $\frac{1}{k}$; c'est-à-dire que l'on s'impose de n'admettre dans l'auget qu'une quantité d'eau occupant la fraction $\frac{1}{k}$ de la $N^{\text{ième}}$ partie A de la couronne (défalcation faite de l'épaisseur de la tôle). Ordinairement on prend $k = 3$. Il viendra d'après cela, pour l'expression du volume liquide :

$$\frac{Al}{k}.$$

D'autre part, si R désigne le rayon de la roue, $\frac{2\pi R}{N}$ mesure l'arc qui passe pendant la durée θ de la période, avec la vitesse u. On a donc, pour exprimer cet intervalle :

$$\theta = \frac{2\pi R}{Nu}. \tag{79}$$

Or, la dépense en volume est, par unité de temps, $\frac{P}{\varpi}$ ou $\frac{P}{1000}$. Il s'écoule ainsi, pendant le passage d'un auget, la quantité d'eau :

$$\frac{2\pi RP}{1\,000 Nu}.$$

En égalant les deux expressions de ce volume, on tire de cette relation :

$$l = \frac{\pi k RP}{500 NAu}.$$

Cette largeur ne dépasse, dans aucun cas, 5 mètres. On ne doit pas redouter d'ailleurs de donner, sans exagération, une certaine masse à la roue, afin qu'elle fasse volant, en régularisant la rotation par son moment d'inertie. Lorsque la largeur devient importante, on la soutient par des embrassures intermédiaires. Dans

le type Marozeau ([1]), elles sont au nombre de deux, avec un cloisonnement correspondant dans les augets, et trois vannages indépendants. Dès lors, suivant la variation du débit, on donnera l'eau sur la totalité de la roue, ou dans les deux tiers extrêmes, ou seulement dans la partie médiane.

157 — *Déversement.* — La forme que prend l'eau dans les augets a été déterminée par une recherche antérieure (n° 37). Nous avons reconnu qu'elle y dessine des cylindres de révolution, ayant pour axe commun C (fig. 8, p. 38) une parallèle à celui O de la roue, située à la hauteur $\frac{g}{\omega^2}$ au-dessus de ce dernier.

Nous trouvons dans cette circonstance un nouveau motif de conduire lentement la roue en dessus. En effet, quand ω augmente, OC diminue rapidement, et le centre C s'abaisse jusque dans le voisinage du récepteur. Les arcs de cercle décrits autour de ce centre, à partir des divers points de la jante, se rapprochent donc de la verticale, et l'eau, ainsi redressée sous des pentes trop accusées, se trouve prématurément projetée hors des augets. Pratiquement, la vitesse à la jante u varie de 1 mètre à $1^m,50$ ([2]).

158 — La connaissance de la surface libre va nous permettre de déterminer avec précision les deux limites pour lesquelles commence et finit le déversement. A cet effet, on tracera, par approximation, une droite MN (fig. 83) qui comprenne entre elle, la jante et le contour de l'auget, une aire LMN égale à celle que doit y occuper

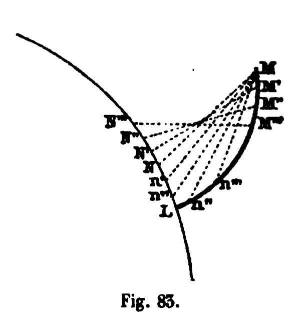
([1]) Cette combinaison très judicieuse a été introduite par M. Marozeau pour une roue de côté (*Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, t. XVIII, n° 86).

([2]) Prenons, comme exemple de conditions tout à fait extrêmes, le diamètre minimum de 3 mètres (n° 153), et la plus grande valeur $1^m,50$ de u. On aura alors :

$$\omega = \frac{u}{R} = 1, \qquad OC = g = 9^m,81;$$

c'est-à dire environ 6 fois le rayon. Les surfaces seront encore assez convenablement rapprochées de l'horizontale. Mais il suffirait de doubler la vitesse u pour que la valeur de OC tombât à $2^m,45$; ce qui placerait le centre du profil à moins de 1 mètre au-dessus du sommet de la roue. On arriverait alors, pour l'eau, à des inclinaisons absolument inadmissibles.

l'eau, d'après le rapport de remplissage $\frac{1}{k}$ que l'on s'est fixé. Si l'on confond avec leurs cordes chacun des arcs de cercle qui forment, à chaque instant, le profil liquide, ces diverses droites MN, M'N', M''N'',... envelopperont une courbe définie par cette condition que l'aire LMN, LM'N', LM''N'',... comprise au-dessous de chacune de ses tangentes reste constante. Lorsque cette droite parviendra, dans son mouvement par rapport à l'auget, à la position MN, le déversement sera sur le point de commencer.


Fig. 83.

Pour connaître la situation que devra, pour cet instant, occuper le vase, nous commencerons par tracer, avec le rayon $\frac{g}{\omega^2}$ une circonférence sur laquelle devra nécessairement se trouver le centre commun C (fig. 84) de tous les profils circulaires. Figurant en L'M'

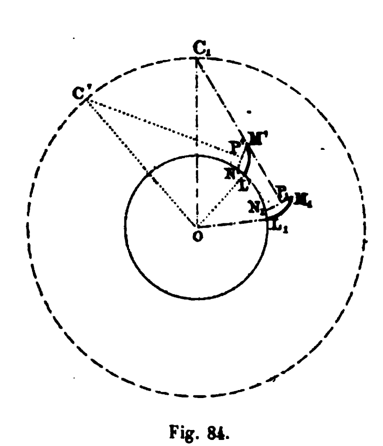


Fig. 84.

une position quelconque de l'auget, ainsi que la droite M'N' déterminée comme il vient d'être expliqué, on élève, sur le milieu P' de cette dernière, la perpendiculaire P'C'. Comme elle doit passer par le centre de l'arc de cercle M'N', ce point ne pourra être qu'en C'. Mais c'est en C_1, à la verticale de O, qu'il devrait se trouver. Cet

écart nous montre que la position L'M' qui a été choisie au hasard se trouve relevée à tort, vers la gauche, de l'angle $C'OC_1$. Si donc on la reporte vers la droite, d'un angle $L'OL_1 = C'OC_1$, l'on obtiendra, en $L_1M_1N_1P_1C_1$, la véritable situation qu'occupe, au commencement du déversement, la figure mobile L'M'N'P'C'.

159 — A partir de cet instant, le niveau de l'eau est formé par des arcs de cercle que nous continuons à confondre avec leurs cordes **M*n*'**, **M*n*''**, **M*n*'''** (fig. 83), passant toutes par le bord M de l'auget, et laissant au-dessous d'elles des arcs indéfiniment décroissants. Le déversement prend fin lorsque cette droite s'identifie avec la tangente en M. La perpendiculaire élevée sur son milieu n'est autre, à ce moment, que la normale au point M, laquelle nous est rigoureusement connue (n° 155).

Pour déterminer la position qu'occupe alors l'auget, nous opérerons comme tout à l'heure. Figurant en L''M'' (fig. 85) une situation quelconque de ce profil, nous tirerons la normale extrême M''C''. Le tracé nous montre dès lors que la figure se trouve trop à gauche

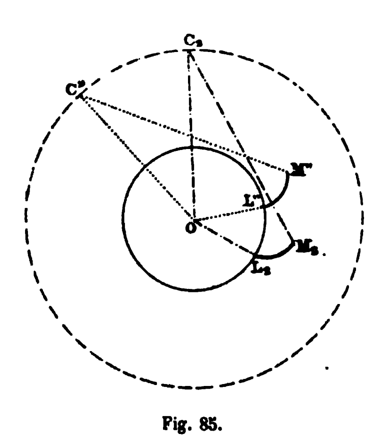


Fig. 85.

d'un angle $C''OC_2$, et doit, par conséquent, être tournée d'une égale amplitude vers la droite. Prenant donc un angle $L''OL_2 = C''OC_2$, nous aurons en $OC_2M_2L_2$ la situation qu'occupe, à la fin du déversement, la figure mobile OC''M''L''.

160 — Il devient maintenant possible d'évaluer l'influence exercée sur le rendement par le phénomène du déversement. A cet effet, après avoir représenté sur un même diagramme (fig. 86) les positions extrêmes M_1L_1, M_2L_2 qui viennent d'être déterminées, on marquera, par appréciation, le centre de gravité G_1 de l'aire $M_1L_1N_1$ occupée par l'eau au commencement de cette phase. Quant à celui G_2 de l'aire finale, au moment où elle s'annule, il se confond avec le point M_2. Cela fait, on trace par tâtonnement une suite de posi-

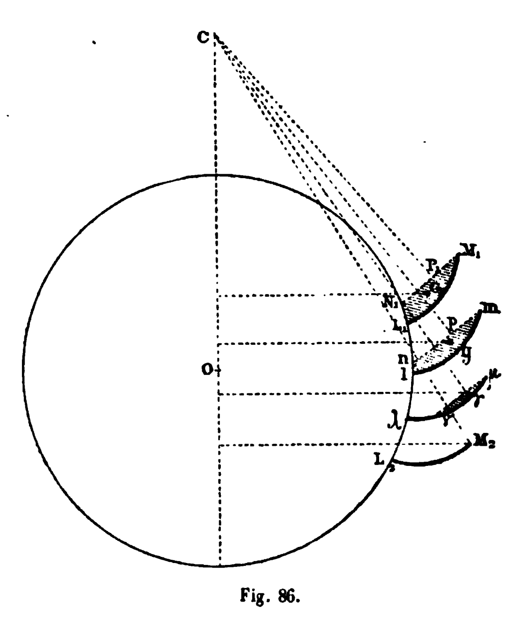


Fig. 86.

tions mln, $\mu\lambda\nu$,... avec leurs centres de gravité respectifs g, γ,... en s'arrangeant de telle sorte que ces divers centres G_1, g, γ,... G_2 soient uniformément espacés suivant la verticale, de manière à diviser la dénivellation G_1G_2 en un nombre *pair* de parties égales [1]. Nous relèverons les altitudes de ces points au-dessus du plan d'eau inférieur, et nous représenterons par z la valeur variable de cette ordonnée, qui a pour limites z_1 et z_2. Enfin l'on appréciera de même les valeurs successives des aires correspondantes $M_1L_1N_1$, mln, $\mu\lambda\nu$,...

[1] Il est inutile, d'après cela, de faire remarquer que le diagramme 86 n'a rien de commun avec la représentation effective de la roue; car, pour celle-ci, les augets se trouvent uniformément répartis *sur la circonférence*, et non *suivant la verticale*.

en désignant par p la valeur variable du poids de l'eau, qui est proportionnel à ces surfaces.

Cela posé, nous commencerons par remplacer, dans la formule (78), le terme H, qui représente la hauteur le long de laquelle s'exerce l'action de la pesanteur sur le débit total P, par la portion $H - z_1$ de cette hauteur qui est parcourue *à plein*. Nous passerons sous silence la travée z_2, suivant laquelle il ne subsiste plus rien dans les augets. Il ne restera donc plus qu'à introduire, dans le second membre, l'expression du travail de la pesanteur appliqué au poids p, continuellement décroissant, le long de la hauteur $z_1 - z_2$.

Ce travail élémentaire s'exprime, pour un auget unique, à l'aide du produit de p par la valeur absolue $-dz$ de la hauteur parcourue. Le travail total sera donc l'intégrale définie de $-pdz$ entre les limites z_1 et z_2, ou, si l'on veut, celle de $+pdz$ prise entre les limites interverties z_2 et z_1 :

$$\int_{z_2}^{z_1} pdz.$$

Cette expression se calculera au moyen de la formule approximative de Simpson (n° 121), d'après l'évaluation des poids successifs p qui correspondent aux points de division marqués *en nombre pair* sur la verticale $z_1 - z_2$.

Il ne reste plus qu'à multiplier ce résultat, relatif à un auget unique, par le nombre m de ces vases que la rotation amène à passer en un même point pendant l'unité de temps, puisque le travail T est rapporté à cette même durée. Or, s'il passe m augets dans cet intervalle, le temps θ de la période sera $\frac{1}{m}$. On a donc (79) :

$$m = \frac{1}{\theta} = \frac{Nu}{2\pi R},$$

et le terme de correction devient :

$$\frac{Nu}{2\pi R} \int_{z_2}^{z_1} pdz.$$

En même temps, nous remplacerons, pour plus de clarté, le symbole T'. par T'', pour mieux marquer que ce nouveau terme est dorénavant exempt de l'effet du déversement, et se réduit aux autres influences que nous groupons ordinairement avec lui dans T' (n° 144).

Au moyen de ces diverses modifications, l'expression (78) de T_m deviendra enfin :

$$(80) \qquad T_m = P\left[H - z_1 - \frac{1+\sin^2\alpha}{2}(\eta + y)\right] + \frac{Nu}{2\pi R}\int_{z_2}^{z_1} p dz - T''.$$

Le rendement $\frac{T_m}{PH}$ d'une roue en dessus bien établie doit atteindre au moins 0,70 à 0,80. On arrive même à 0,90 dans les meilleures conditions. Mais si les préceptes indiqués par la théorie précédente sont négligés dans l'exécution, et si notamment la roue est menée trop vite, on voit ce coefficient fléchir rapidement.



161 — *Roue à manteau.* — Pour supprimer le déversement, on

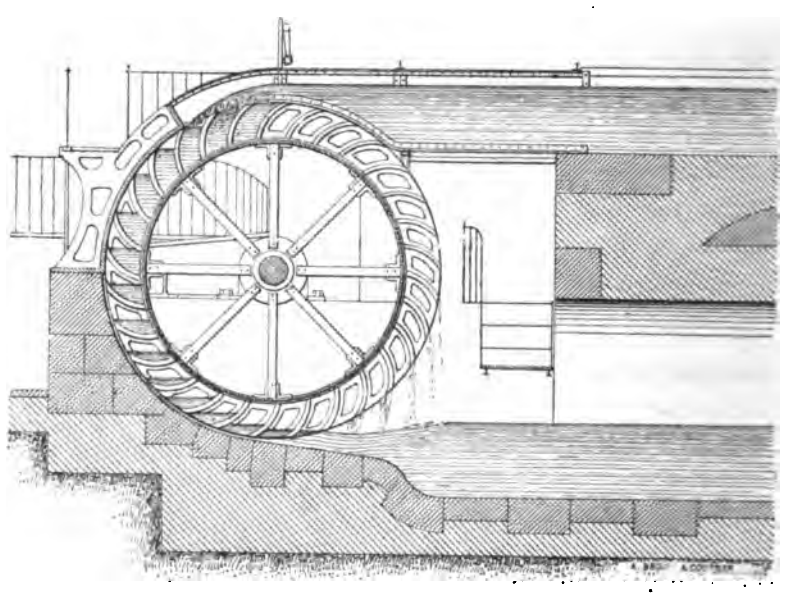


Fig. 87. — Roue à manteau.

a imaginé d'emboiter une partie de la roue dans une sorte de

coursier, qui prend le nom de *manteau* (fig. 87). L'on n'a plus alors à redouter, en fait de pertes d'eau, que l'influence du jeu, particulièrement sensible dans ce récepteur en raison de la lenteur de sa rotation, mais évidemment moindre cependant que si le liquide pouvait être projeté librement.

M. l'ingénieur en chef des Ponts et chaussées Duponchel a fait remarquer [1] que le manteau a pour effet d'évacuer l'eau au point le plus bas dans une direction horizontale directement opposée à celle suivant laquelle le fluide est donné sur le sommet. La veine est donc obligée, avec le dispositif ordinaire, de se retourner sur elle-même dans le bief inférieur, pour reprendre son cours en sens contraire. De là une indécision, un trouble nuisibles, principalement lorsque la roue patouille au moment des crues. M. Duponchel supprime cet inconvénient en disposant la roue AB (fig. 88) à angle droit sur le canal supérieur d'amenée CA et le canal inférieur de fuite A'D. De cette manière, le parcours CABA'D de l'eau reste continu et sans rebroussements.

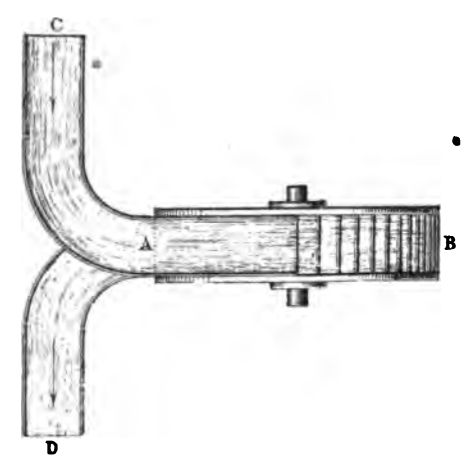


Fig. 88.

On peut également citer (fig. 89) un mécanisme assez original proposé par le même inventeur, en vue d'utiliser, avec ce type de récepteur, une hauteur de chute trop grande pour se prêter à l'emploi d'une roue unique. L'auteur fractionne alors cet intervalle en deux travées égales, dont chacune est desservie par une roue spéciale. Ces deux machines sont disposées l'une au-dessus de l'autre, et mises en communication de mouvement à l'aide de bielles

[1] Duponchel. Notice sur un nouveau système de roues hydrauliques (*Annales des Ponts et chaussées*, 6e série, 1883, p. 247). — Haton de la Goupillière (*Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. X, p. 397).

et de manivelles qui assurent leur synchronisme. Le manteau de l'une donne l'eau sur le sommet de l'autre. Les augets de celle-ci sont disposés en sens inverse de ceux de la première, et le liquide se meut

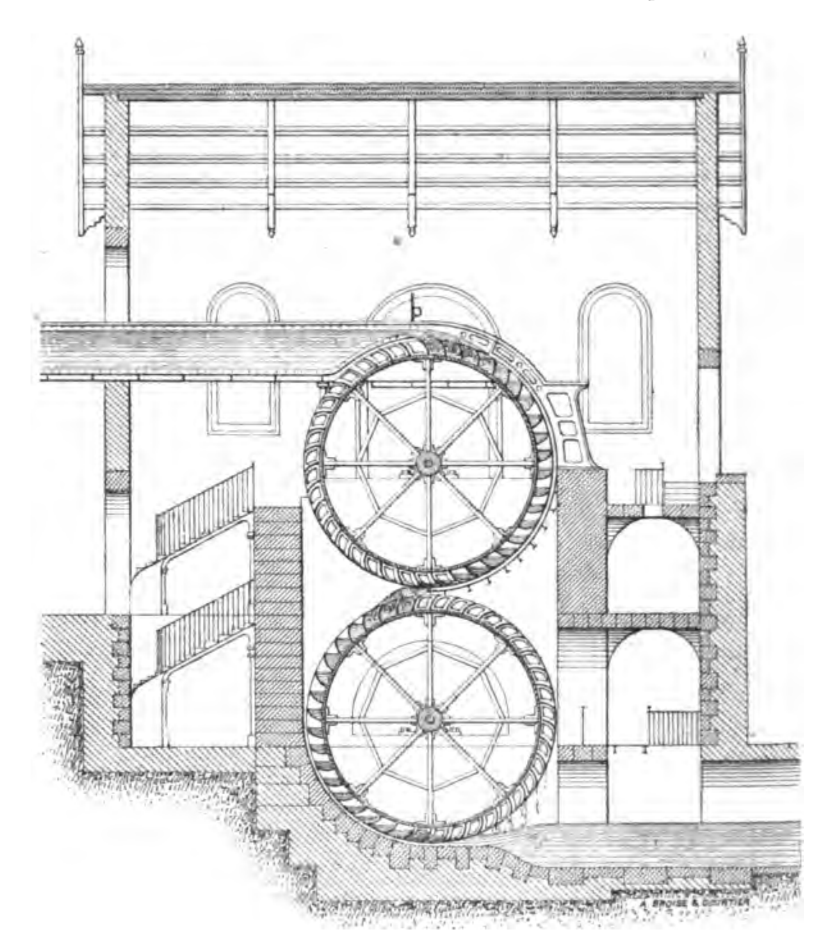


Fig. 89. — Roues superposées Duponchel.

encore sans rebroussement. Cette combinaison est ingénieuse, mais compliquée, et une simple turbine fournirait, sans doute, une solution plus avantageuse.

162 — *Chapelet hydraulique.* — Citons encore, parmi les types exceptionnels, le chapelet hydraulique. Les augets, au lieu de

faire partie d'un corps tournant, sont alors adaptés à un système articulé analogue à une noria, mais fonctionnant en sens inverse de celui de cet appareil. Ils sont munis de clapets de fond, qui retombent d'eux-mêmes, au moment où le vase se renverse en passant sous la poulie inférieure. On permet ainsi la rentrée de l'air, et l'on évite le soulèvement de l'eau qui se produirait, sans cela, comme dans une ventouse. On remplace aussi les augets par de simples palettes engagées dans une colonne cylindrique (fig. 90).

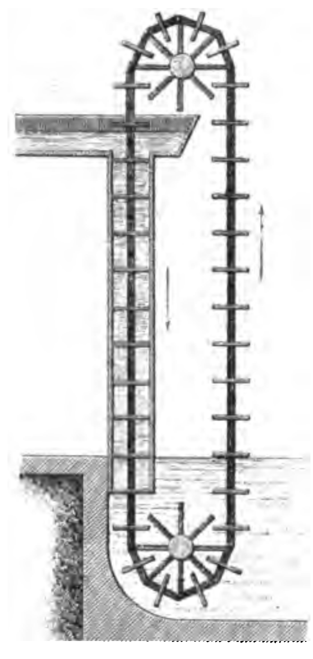


Fig. 90. — Chapelet hydraulique.

Avec ce dispositif, le déversement se trouve radicalement supprimé, quelle que soit la hauteur. Mais, en revanche, les frottements et les chances de dérangement de ces nombreuses articulations compensent, et au delà, l'avantage réalisé. Ce récepteur ne se recommande que par l'exiguïté de ses dimensions horizontales, en vue d'emplacements spéciaux. On peut citer, par exemple, son application à la création de chutes motrices à l'aide de trous de sonde destinés à fournir des puits absorbants [1].

163 — *Roue hydro-aéro-dynamique Callès.* — Je mentionnerai encore, parmi les dérivés de la roue à augets, une conception plus originale assurément que recommandable au point de vue du rendement, et destinée par son auteur à la transmission de la force à distance au moyen de l'air comprimé [2].

Une roue à augets est entièrement immergée au sein d'une masse d'eau. Une tuyère plate admet, à sa base, l'air comprimé. Celui-ci

[1] Système Hanriau (Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, I, 149. — Haton de la Goupillière. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. III, p. 1).

[2] Armengaud aîné et fils. *Les progrès de l'industrie*, t. I, pl. 64.

vient se loger sous les godets renversés qui occupent une des moitiés de la circonférence. Il exerce donc, de ce côté, une série de forces ascendantes qui déterminent la rotation. L'air se dégage en bulles lorsque les augets approchent de la surface, en même temps que de nouveaux godets se remplissent de ce fluide à la partie inférieure. On obtient ainsi un fonctionnement inverse, de tous points, de celui de la roue hydraulique ordinaire. Mais il est évident que le brassage de l'eau qui est produit par cette giration continue, déterminerait des résistances passives considérables, et qu'il existe des moyens beaucoup plus simples et plus fructueux pour utiliser le transport de la puissance à l'aide de l'air comprimé.

§ 2

ROUE DE CÔTÉ

164 — *Roue radiale.* — La roue de côté [1], comme l'indique

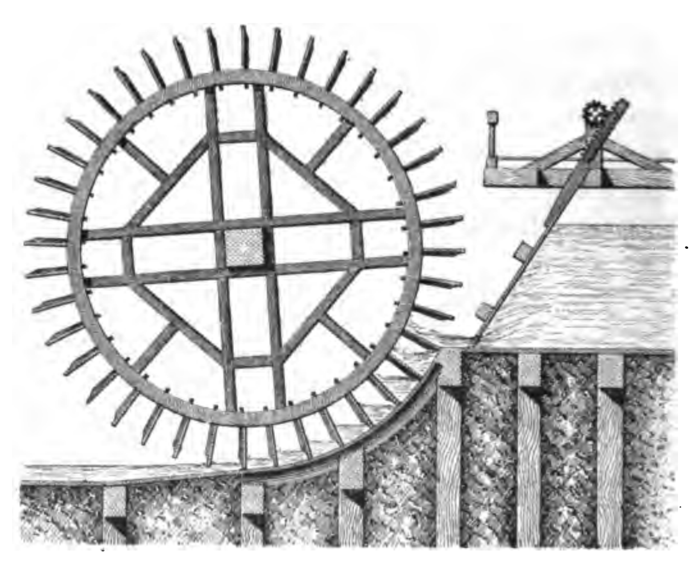


Fig. 91. — Roue de côté radiale.

son nom, reçoit l'eau latéralement (fig. 91), et forme, quant à

[1] *Mittelschlächtige-Wasserräder, Breast Wheels.*

l'action *immédiate* de la pesanteur, un intermédiaire entre la roue en dessus, pour laquelle cette influence est prépondérante, et la roue en dessous, dans laquelle elle s'annule et se trouve remplacée par l'effet de la vitesse préalablement acquise au sortir de la vanne.

Le liquide n'est plus contenu dans des vases solidaires avec la roue, mais dans des capacités de nature mixte, constituées à la fois par les *aubes* mobiles du récepteur et par le coursier fixe. Un certain jeu est donc nécessaire, et, pour ce motif, on se trouve conduit à imprimer à la roue une vitesse assez notable (n° 148); ce qui établit, dès l'abord, une différence caractéristique entre elle et la roue à augets.

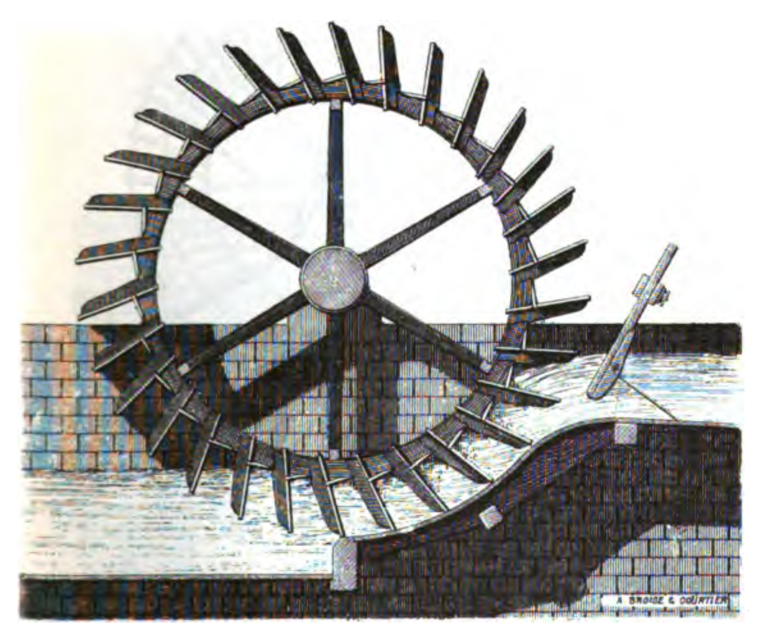


Fig. 92. — Roue à goitre.

Le coursier circulaire de maçonnerie se prolonge d'un côté, en amont, par un emboîtement métallique qui présente la même courbure, et de l'autre, en aval, par un plan incliné de 1 ou 2 mètres de longueur, destiné à entretenir la vitesse v_1, pour faciliter le dégorgement de la roue. Celui-ci est suivi lui-même d'un appro-

fondissement subit avec élargissement, afin de provoquer le ressaut (n° 149), lorsque la valeur laissée à v_1 se trouvera suffisante; circonstance dont il ne pouvait être question pour la roue à augets.

Les aubes sont *radiales*, c'est-à-dire disposées suivant les rayons [1]. On les soutient au moyen de *coyaux*. Elles ne sont pas complète-

[1] Il existe cependant des variétés différentes. Dans la *roue à goître*, ou *Kropfrad* (fig. 92), elles sont disposées obliquement de manière à se retirer de l'eau presque verticalement, en évitant de relever le liquide et de le projeter en avant, ce qui occasionnerait une résistance (Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 131).

Dans la roue Sagebien (fig. 93), on adopte l'inclinaison opposée, pour des motifs qui seront expliqués plus loin (n° 168).

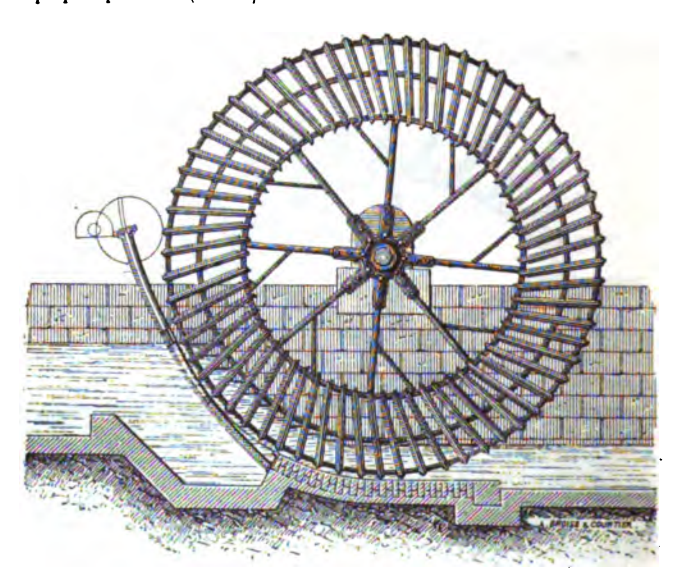


Fig. 93. — Roue Sagebien.

Dans la roue Delnest (fig. 94), on forme les aubes de deux parties symétriques qui cessent d'être, comme dans les cas précédents, parallèles à l'axe, afin de se présenter progressivement à l'action impulsive de la lame d'eau, au lieu d'en recevoir l'impression d'un seul coup, ce qui détermine la production de pulsations et de vibrations nuisibles. Le régime périodique se rapproche par là beaucoup plus de l'uniformité (*Revue universelle des mines et de la métallurgie* de Cuyper, 1868, p. 220).

Dans la roue Mary (fig. 95 et 96), les cloisons avaient la forme de calottes sphériques ou ellipsoïdales, et parcouraient un coursier analogue à la surface du tore. Une rainure pratiquée à travers la voûte permettait le passage des bras qui portaient ces cuillers. La vitesse atteignait $1^m,30$ (Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 133. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1845. — Vigreux. *Théorie et pratique de l'art de l'ingénieur*, série D, p. 251).

ment foncées le long de la couronne, afin que l'air puisse s'échapper

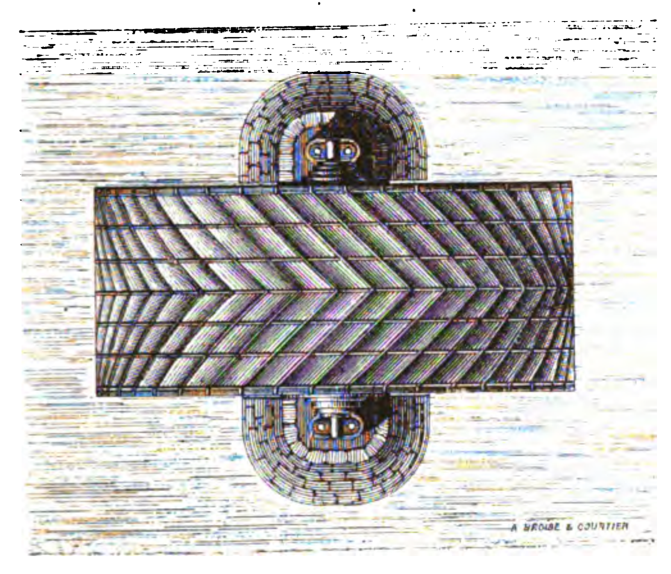


Fig. 94. — Roue Delnest.

de ce côté, sans quoi il ne trouverait d'issue que par le point d'entrée,

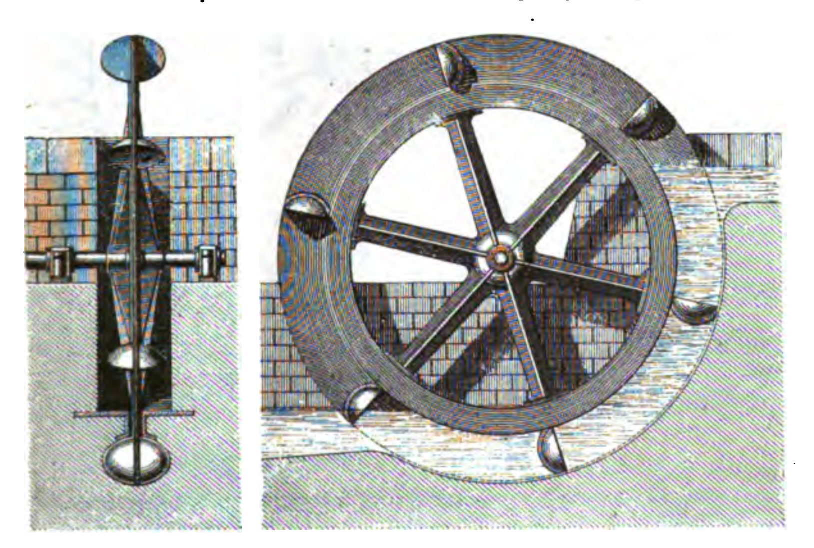


Fig. 95 et 96. — Roue Mary (élévations antérieure et latérale).

en gênant l'insertion du liquide dans la roue. Une fonçure partielle

est pourtant nécessaire, afin de briser la lame d'eau, si celle-ci tend à aller trop loin ([1]).

Pour tâcher, au contraire, d'user par l'influence de la gravité la force vive d'entrée, sans qu'elle se perde dans un terme de la forme $\frac{\Upsilon^2}{2g}$, il est nécessaire que ces aubes présentent à la veine liquide un plan incliné *ascendant*, et, pour cela, que l'eau soit donnée au-

([1]) Pour éviter de perdre cet excès de vitesse, et par conséquent la partie de la chute employée à le produire, on raccorde, d'après Bélanger, au moyen d'un pan coupé à 45 degrés, l'aube et la fonçure qui sont assemblées à angle droit (fig. 97). Le liquide se dévie alors sans s'écraser d'une manière aussi directe, et monte sur cette rampe, en

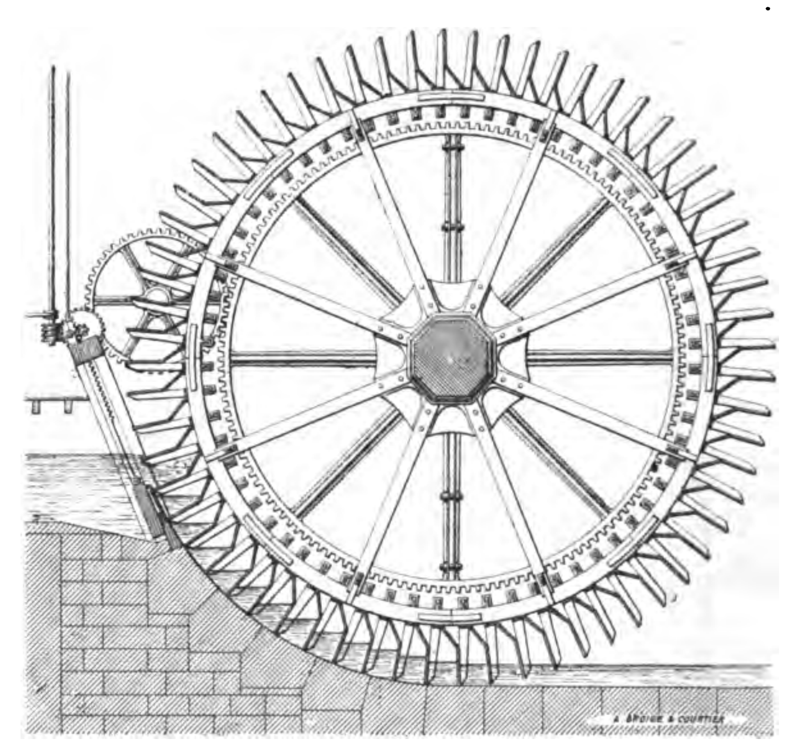


Fig. 97. — Roue Bélanger.

perdant progressivement sa force vive par l'action de la pesanteur. Il la recouvre ensuite en redescendant sous la même influence, et transmet alors cette énergie au récepteur.

Cette disposition, limitée aux roues en bois, a inspiré, pour les récepteurs métalliques, le type de la roue Waddington, dont les aubes sont courbes, se raccordant tangentiellement avec la couronne intérieure, et normalement avec la circonférence intérieure, à l'inverse de ce qui a lieu dans la roue Poncelet (§ 181).

dessous de l'axe de la roue. La hauteur de chute H se trouvera donc restreinte par cette condition d'une manière bien plus étroite encore que pour la roue en dessus. Ses limites les plus favorables sont un maximum de $1^m,50$ et un minimum de 1 mètre; mais on peut s'en écarter sans trop d'inconvénients. Le diamètre du récepteur sera proportionné à cette hauteur. Il doit être au moins de $3^m,50$ et dépasse rarement le double.

165 — Il est également indispensable de disposer de la valeur de la vitesse de manière à éviter le choc à l'entrée, en présentant, suivant le rayon, la vitesse relative w_0. Le parallélogramme des vitesses sera, par suite, un rectangle (fig. 98), ce qui exige la condition:

$$u = v_0 \cos \alpha = \cos \alpha \sqrt{2g\eta}. \tag{81}$$

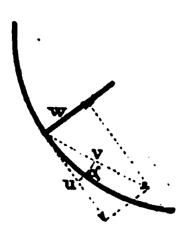


Fig. 98.

Telle est donc la vitesse avec laquelle devra être conduit ce récepteur. En général, on adopte la valeur $\alpha = 30°$, que l'on réalise à l'aide du *col de cygne* destiné à diriger sur la roue la veine liquide au débouché de la vanne. Il vient dans ce cas :

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2g\eta} = 1,732 \sqrt{2g\eta}. \tag{82}$$

Si, pour mettre les choses au pis, nous faisons abstraction de ce que l'on aura pu regagner, à l'aide de la gravité, sur la vitesse relative w_0, en considérant celle-ci comme intégralement perdue, nous aurons, dans ce même rectangle :

$$\Upsilon = w_0 = u \operatorname{tang} \alpha.$$

Remarquons d'ailleurs que l'eau quitte la roue avec une vitesse v_1, égale à celle u des aubes entre lesquelles elle se trouve emprisonnée après la disparition de la vitesse relative :

$$v_1 = u.$$

Nous aurons donc, pour la valeur la plus favorable du travail, en reportant ces expressions dans la formule générale (75) :

$$T_m = P\left(H - \frac{u^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}\tan^2\alpha\right) - T'$$

$$= P\left(H - \frac{u^2}{2g}\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) - T',$$

c'est-à-dire (éq. 81) :

$$(85) \qquad T_m = P(H - \eta) - T'.$$

On voit par là que la totalité de la hauteur η se trouve perdue pour le rendement. De là une considération qui se trouve en opposition avec la précédente (n° 164), en ce qui concerne ce paramètre. Il faudra donc éviter de tomber dans l'exagération quant à la tendance à accélérer la roue, et, par suite, à augmenter la vitesse v_0, ou $\sqrt{2g\eta}$, qui doit être encore supérieure à u.

166 — Le mode d'insertion de la lame d'eau ne présentera une précision suffisante qu'à la condition que le nombre des aubes ne soit pas trop restreint. Sans cela, leur intervalle s'accroissant outre mesure, l'eau finirait par tomber dans le vide pour regagner l'aube qui se dérobe de plus en plus loin. Si pourtant ce nombre devenait excessif, les intervalles seraient trop rétrécis au point de vue de l'introduction du liquide. On adopte, à cet égard, un multiple du nombre des rayons de l'embrassure tellement choisi, que le passage, déduction faite de l'épaisseur de l'aube, reste compris entre une fois et demie et une fois et un tiers l'épaisseur de la veine. Cette dernière varie de $0^m,20$ à $0^m,27$; et celle des aubes de $0^m,02$ à $0^m,03$.

La hauteur des aubes, c'est-à-dire la largeur de la couronne, ne dépasse guère $0^m,70$. Avec de trop grandes dimensions, on risque d'encombrer la région centrale. Pour éviter cet inconvénient, on a, dans le type Pihet, disposé de deux en deux des aubes longues et d'autres plus courtes.

La largeur de la roue ne doit pas dépasser 5 mètres. Elle se trouve en relation, d'après l'équation de continuité, avec l'épaisseur de la lame d'eau, sa vitesse v_0, et l'importance du débit. La dépense par mètre de largeur varie pratiquement de $0^{m^3},3$ ou $0^{m^3},4$ pour les roues lentes à $0^{m^3},5$ ou $0^{m^3},8$ pour les plus rapides.

Quant à la veine qui s'écoule sur le coursier et finit par s'échapper de la roue, on maintient son épaisseur entre $0^m,15$ et $0^m,50$. Trop faible, elle attribuerait une influence excessive au jeu (n° 148); trop grande, elle exposerait les aubes, au moment de leur émersion, à relever le liquide pour le projeter en avant, en déterminant par là gratuitement une résistance nuisible.

167 — Les valeurs attribuées à ces deux éléments permettent de formuler explicitement une partie du travail perdu T' qui figure dans l'équation (83), à savoir celui qui est consommé par le frottement du courant sur le coursier.

Nous savons que cette force est proportionnelle à la surface mouillée, et que, par mètre carré, elle a pour valeur (p. 154, note 2) :

$$\frac{2}{5} U^2,$$

si nous désignons par U la vitesse *moyenne*. Nous avons vu de même (éq. 75, p. 185) que cette dernière est les $\frac{4}{5}$ de la vitesse *de fond*, laquelle se confond ici avec la vitesse à la jante u. L'expression précédente peut donc s'écrire :

$$\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\right)^2 u^2,$$

ou enfin, d'après la formule (82) :

$$\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{3}{4}\, 2g\eta = \frac{16}{15}\, g\eta.$$

D'autre part, si nous appelons λ la longueur développée du coursier, l sa largeur, e l'épaisseur de la lame d'eau, le périmètre mouillé sera $l + e$, et la surface mouillée $(l + 2e)\lambda$. La force effective de frottement aura donc pour valeur :

$$\frac{16}{15} g\eta (l + 2e)\lambda,$$

et son travail par unité de temps :

$$\frac{16}{15} g\eta\lambda (l + 2e) u.$$

Si l'on en fait disparaître la vitesse u en fonction du débit en poids

$$P = \varpi leu,$$

cette expression deviendra définitivement :

$$\frac{16g}{15\varpi} \frac{(l + 2e)\lambda\eta}{le} P = 0,010466 \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{l}\right) \lambda\eta P.$$

Nous modifierons donc l'équation (83) en représentant par T'' le travail des autres influences secondaires, et écrivant :

$$(84) \quad T_m = P \left\{ H - \eta \left[1 + \frac{\lambda}{100} \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{l}\right) \right] \right\} - T''.$$

Nous trouvons dans cette formule de nouveaux motifs de chercher à réduire η, et, en même temps, de ne pas trop diminuer l'épaisseur e de la lame d'eau. On a vu le rendement $\frac{T_m}{PH}$ de roues de côté bien établies s'élever jusqu'à 0,90. Cependant il dépasse difficilement 0,70 et s'abaisse fréquemment à 0,65.

168 — *Roue Sagebien.* — Dans la *roue Sagebien* (fig. 93), appelée aussi *roue siphon* ou *roue vanne* (1), l'inventeur s'est proposé de modifier le type normal de la roue de côté, de manière à pousser aussi loin que possible la réduction du terme η (éq. 84), spécialement pour les faibles chutes dont cette hauteur risquerait de devenir une fraction trop importante. On est arrivé, en effet, à utiliser, avec ce dispositif, des hauteurs de chute absolument minimes, de $0^m,30$ par exemple, bien qu'elles puissent, dans d'autres cas, s'élever jusqu'à $2^m,50$.

La réduction de η a pour conséquence celle de v_0, et, par suite, celle de la vitesse u, qui lui est nécessairement inférieure. Cette donnée s'abaisse, avec la roue Sagebien, jusqu'à $0^m,70$ ou $0^m,60$. Dans ces conditions, la vitesse perdue Υ se réduit presque à rien, car on ne saurait perdre beaucoup sur une vitesse v_0 déjà si faible.

Grâce à une inclinaison analogue à celle du *Kropfrad* (fig. 92), mais inverse quant au sens de la rotation, les aubes descendent dans l'eau d'amont presque verticalement, en la découpant en tranches sans qu'elle change, pour ainsi dire, de niveau. Ce n'est que peu à peu qu'elle s'abaisse par la rotation des aubes, et sans agitation; à tel point que l'on a vu des courants, stratifiés en amont par la superposition d'eaux claires ou troubles, présenter encore le même caractère après avoir traversé la roue.

L'épaisseur de la lame d'eau est considérable, et hors de comparaison avec celle que nous avons indiquée pour la roue de côté rapide. C'est précisément afin de compenser l'influence de la lenteur. Sans cela, en effet, cette allure aurait pour résultat d'exagérer l'importance de la perte d'eau à travers le jeu, si la valeur relative de ce dernier devenait notable. On arrive ainsi à débiter, malgré cette lenteur caractéristique, $0^{ms},6$ à $0^{ms},7$ par mètre de largeur et par seconde.

(1) Sagebien. *Expériences sur la roue hydraulique Sagebien*, 1866, in-8°. — Sagebien. *Notice sur la roue Sagebien*, Lacroix, 1866. — Tresca (*Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 2e série, t. XVII, p. 193). — Tresca (*Annales du Conservatoire*, t. VIII, p. 634). — Leblanc et de Hennezel (*Annales des Ponts et chaussées*, t. XV, 1858). — Laffineur. *Traité de la construction des roues hydrauliques*, 1867. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXXVI, 1308. — Vigreux. *Théorie et pratique de l'art de l'ingénieur*, série D, p. 204. — Dwelshauvers-Dery (*Revue uni-*

Une telle épaisseur s'oppose à ce que l'on adopte une inclinaison capable de faire entrer les aubes dans l'eau tout à fait verticalement. Elles présenteraient alors une tendance trop marquée à relever le liquide au moment de leur émersion. On adopte un terme moyen entre ces deux points de vue, en disposant les aubes sous un angle de 45 à 50 degrés par rapport à la surface de l'eau, à leur point d'entrée. La pente reste alors assez prononcée à la sortie; mais, grâce à la lenteur du régime, le liquide a le temps de s'écouler sur ce plan incliné, au fur et à mesure que le relèvement tendrait à se produire.

On a soin de terminer les aubes par de petites aubettes effacées en arrière du mouvement de rotation, dans le but de ne pas présenter de surfaces mobiles sous un angle aigu qui risquerait, à la moindre irrégularité, d'amener des arc-boutements et des ruptures.

M. Sagebien est arrivé ainsi à constituer un excellent récepteur qui est, entre tous, celui pour lequel on a observé les rendements les plus élevés. On a cité exceptionnellement le chiffre de 0,93; et l'on peut arriver facilement à ceux de 0,85 et 0,90. Il ne faut pas toutefois perdre de vue, par compensation, que la grande lenteur de ce récepteur risquera d'exiger, pour la réalisation d'une allure convenable des opérateurs, un supplément d'engrenages dont les résistances passives devront entrer en ligne de compte.

169 — *Roue Straubb.* — La donnée de ce moteur [1] est à peu près la même que celle de la roue Sagebien, avec cette différence que l'on y réalise rigoureusement l'émersion verticale de l'aube à sa sortie du liquide. Concevons, à cet effet, une circonférence concentrique à la roue et exactement tangente à la surface libre de l'eau d'aval, et prenons, pour profil des aubes, des développantes de ce cercle. Il est de la nature de ces courbes de rester normales à la tangente horizontale de leur développée, dans toutes les positions que leur fera prendre la rotation. On peut, en raison de cet avantage, mener ce récepteur un peu plus vivement que la roue Sagebien.

verselle des mines et de la métallurgie, 1er vol. de 1874, p. 8). — Hirsch (*Rapports du Jury international sur l'Exposition de* 1878, groupe VI, cl. 54, p. 350).

[1] Notes de G. Richard au *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs* de Rankine, p. 611.

§ 3

ROUE EN DESSOUS A AUBES PLANES

170 — *Roue à palettes.* — Si l'on abaisse progressivement par la pensée, dans la roue de côté, le niveau d'insertion de l'eau motrice jusqu'au point le plus bas de la circonférence, on obtient la *roue en dessous* (1). Il en existe deux types profondément différents l'un de l'autre : la *roue à aubes planes*, qui fonctionne uniquement par le choc, et la *roue à aubes courbes* ou *roue Poncelet*, qui est un récepteur à réaction.

Dans l'une comme dans l'autre, l'action *immédiate* de la pesanteur a disparu. La gravité n'intervient plus que pour créer préalablement la vitesse d'admission, laquelle atteint alors le maximum dont elle est susceptible :

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Mais cette vitesse initiale, ou mieux, la force vive qui lui correspond, se trouve très inégalement utilisée par l'un ou l'autre de ces deux appareils. Nous étudierons d'abord la roue à aubes planes, dont le type se rapproche, plus que l'autre, de la roue de côté.

Une vanne de fond (fig. 99) donne l'eau sur un plan incliné très court, destiné à entretenir la vitesse v_0 pour atteindre l'emboîtement de la roue dans un coursier circulaire, lequel se prolonge jusqu'au point le plus bas de la circonférence (2). Cet arc doit être assez étendu pour embrasser deux intervalles, c'est-à-dire trois aubes, au moment précis où l'une d'elles se présente à l'entrée, tandis que la troisième parvient à l'extrémité. De cette manière, il existe toujours un compartiment complètement fermé, dans lequel l'eau se trouve maîtrisée, et obligée d'épouser la vitesse de la roue. A

(1) *Unterschlächtige Wasserräder*, *Undershott Wheels.*

(2) Ce dispositif a été introduit par Smeaton (*Recherches expérimentales sur l'eau et le vent*, 24). — Arthur Morin. *Expériences sur les roues hydrauliques*, 1836.

cet arc de cercle succède un second plan incliné, strictement suffisant pour éloigner convenablement de l'appareil le phénomène du ressaut, ou du *bouillon*, à la production duquel ce récepteur se prête

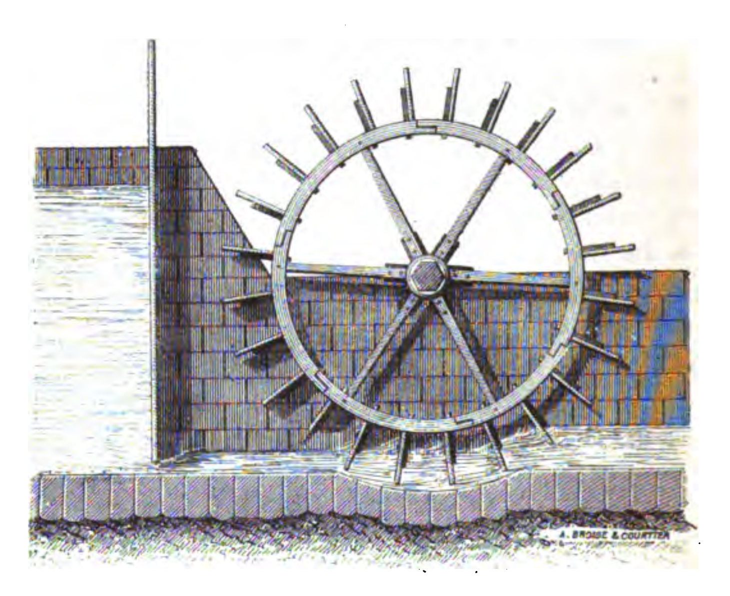


Fig. 99. — Roue en dessous à aubes planes.

mieux que tout autre, en raison de la vitesse importante que l'on se trouve forcé de laisser au liquide à sa sortie.

171 — Cette vitesse v_1 ne diffère pas, ainsi que nous venons de le dire, de celle u des aubes, entre lesquelles le liquide se trouve emprisonné :

$$v_1 = u.$$

Le choc est direct, et il a pour effet d'abaisser, de v_0 à u, la valeur de la vitesse. Il s'ensuit donc, pour l'expression de la vitesse perdue :

$$\Upsilon = v_0 - u.$$

Nous tirerons, d'après cela, de la formule générale (75) :

$$T = P\left[H - \frac{u^2 + (v_0 - u)^2}{2g}\right] - T'$$

$$= \frac{P}{2g}\left[v_0^2 - (2u^2 + v_0^2 - 2uv_0)\right] - T',$$

et enfin :

$$(85) \qquad T = \frac{P}{g} u (v_0 - u) - T'.$$

Le terme principal de cette expression étant le produit de deux facteurs dont la somme est égale à la constante v_0, son maximum correspond à l'égalité de ces facteurs :

$$u = v_0 - u,$$

d'où l'on déduit :

$$(86) \qquad u = \frac{v_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}.$$

Telle est donc théoriquement l'allure la plus avantageuse que l'on puisse imprimer à la roue. Cependant, comme le terme T' n'a pas été pris en considération dans cette évaluation, il n'y a pas lieu de s'étonner que l'observation directe ait indiqué, à cet égard, une valeur un peu différente :

$$(87) \qquad u = \frac{2}{5} v_0 = \frac{2}{5}\sqrt{2gH}.$$

Si toutefois, pour plus de simplicité, nous continuons le calcul avec l'expression théorique (86), en la reportant dans celle de T, nous trouverons comme travail maximum :

$$T_m = \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{4} - T',$$

c'est-à-dire [1] :

$$T_m = \frac{1}{2} PH - T'. \tag{88}$$

Ainsi donc, même en dehors de l'influence nuisible du terme T', le maximum du travail utilisé ne saurait atteindre que la moitié seulement de la quantité disponible. En d'autres termes, cette roue perd inutilement plus de la moitié de la puissance de la chute. Dans la pratique, son rendement $\frac{T_m}{PH}$ ne dépasse pas $\frac{1}{3}$, et peut même descendre au-dessous de 0,30 pour des machines médiocrement établies.

172 — Avec ce récepteur, la hauteur de chute n'est plus directement liée aux dimensions de la roue, comme dans les cas précédents ; elle peut présenter, au contraire, une certaine élasticité. Le diamètre reste ordinairement compris entre 3 et 5 mètres. L'espacement des palettes varie de $0^m,35$ à $0^m,40$; et leur hauteur, de $0^m,60$ à $0^m,70$.

Cette valeur assez considérable est nécessitée par le gonflement qu'éprouve, dans le coursier circulaire, la lame d'eau. Celle-ci n'a, au sortir de la vanne, que $0^m,15$ à $0^m,20$ d'épaisseur; mais, en raison de sa brusque diminution de vitesse, de v_0 à u, son épaisseur doit se modifier, pour obéir à l'équation de continuité :

$$le_0v_0 = leu,$$

$$e = \frac{v_0}{u} e_0.$$

Cette épaisseur sera donc doublée d'après l'équation (85), et même, si l'on emploie la formule (86), amplifiée dans le rapport de 5 à 2.

Ce relèvement de l'eau malgré la pesanteur provoque évidemment

[1] Si l'on emploie la valeur (87), on obtient ce résultat à peine différent :

$$T_m = 0,48\,PH - T'_1$$

un travail négatif, qui vient en défalcation de l'effet utile du récepteur. On a donc tout intérêt à le réduire autant que possible. Il conviendra, par suite, puisqu'il est proportionnel à l'épaisseur de la lame d'eau, de restreindre celle-ci, en augmentant, dans le rapport inverse, la largeur de la roue, sans toutefois tomber à cet égard dans l'exagération.

173 — *Roue pendante.* — En vue de soustraire la roue *de côté* aux irrégularités apportées dans son fonctionnement par le régime des crues, M. Baron avait imaginé une *roue suspendue* [1]. Les paliers destinés à supporter ses tourillons étaient reliés, au moyen de bielles et d'engrenages, à un treuil qui permettait de les relever ou de les abaisser à volonté. Ce système était fort compliqué.

On obtient une solution bien plus satisfaisante du même *desideratum*, en supposant ces paliers installés sur un flotteur. C'est le cas des roues en dessous à aubes planes que l'on destine à recueillir, non plus, comme dans le cas précédent, la force vive produite directement sur un point par la création d'une chute, mais celle qui se trouve longuement accumulée dans l'eau d'une rivière, comme résultante de l'antagonisme entre la pesanteur et les résistances passives de l'écoulement. Un tel récepteur prend le nom de *roue pendante sur bateau.*

Son fonctionnement n'a pas, pour cela, changé de nature, et il reste exprimé par la relation (85), avec cette circonstance toutefois que le facteur P reste, au fond, inconnu. Ce ne saurait être, en effet, le plus ordinairement, le débit total de la rivière, qui peut avoir une grande largeur et renfermer des parties absolument soustraites à l'influence du récepteur. Ce ne sera pas davantage celui d'un cours d'eau idéal auquel on attribuerait, par la pensée, la largeur même de la roue, comme s'il était compris entre des bajoyers. Ses parois ne sont plus solides, et pour permettre à une partie de l'eau, ainsi troublée dans son régime rectiligne, de s'échapper latéralement, les filets voisins devront eux-mêmes se dévier de proche en proche. Or une force spéciale est pour cela nécessaire ; elle s'accompagnera

[1] Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 128.

nécessairement d'une réaction égale, qui se transmettra jusque sur les aubes et y développera du travail. On doit donc admettre que la roue se trouve influencée, dans une proportion qui décroît progressivement comme intensité, par les parties du courant situées plus ou moins au large; et il devient impossible, dans ces conditions, de fixer *a priori* la valeur de P.

On admet, à cet égard, une hypothèse qui a été introduite par Poncelet pour combler cette lacune. Ce poids est considéré comme proportionnel, à la fois à la surface immergée A de la palette, et à la vitesse v_0 du cours d'eau. On conçoit, en effet, que, suivant son degré de rapidité, celui-ci amènera un plus ou moins grand nombre de molécules à influencer le récepteur, chacune pour son compte, suivant la théorie précédente. Nous poserons donc :

$$P = CAv_0.$$

en attribuant, avec Poncelet, à la constante C une valeur comprise entre 800 et 850.

Dans ces conditions, la formule (85) devient :

$$T = \frac{CAv_0}{g} u (v_0 - u) - T'.$$

Sa discussion reste identique à celle du cas précédent, et conduit théoriquement à mener la roue avec une vitesse moitié moindre que celle de la rivière (éq. 86). Il vient, dans cette hypothèse :

$$(89) \qquad T_m = \frac{CA}{4g} v_0^3 - T'.$$

Le travail recueilli varie donc à peu près comme le cube de la vitesse. Il deviendra, par suite, insignifiant, si la rivière ne présente pas un degré suffisant de rapidité. Il ne saurait, du reste, être ici question de rendement, puisque le total disponible, auquel il faudrait, pour cela, rapporter l'effet utile recueilli, reste en quelque sorte indéterminé avec la largeur du lit.

174 — Le diamètre de la roue, nécessairement limité par les conditions toutes spéciales de son emplacement, est, en général, de 4 ou 5 mètres. Sa largeur ne saurait dépasser 3 mètres. La hauteur des aubes reste ordinairement comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ du rayon.

L'espacement des palettes est déterminé de manière qu'il y ait toujours à la fois deux palettes immergées, et, par conséquent, trois au moment de l'immersion de l'une, coïncidant avec la sortie d'une autre. Cette règle, identique à celle qui concerne les roues emboîtées dans un coursier (nº 170), n'est cependant pas due au même motif, puisque le coursier a disparu. Elle a pour but d'assurer le fonctionnement de la totalité du liquide, amené avec une vitesse v_0 sur une roue que l'on suppose maintenue, d'après ce qui précède, à l'allure $\frac{v_0}{2}$. Dans ces conditions, en effet, une goutte d'eau M (fig. 100), située en avant de l'aube AA′ à

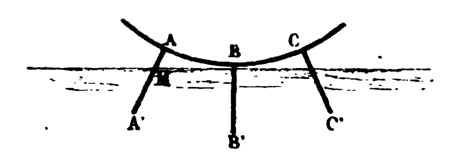


Fig. 100.

l'instant de l'immersion de cette dernière, décrira le chemin AC pendant le temps que la palette BB′ mettra à parcourir l'intervalle moitié moindre BC, qui sépare sa position actuelle de celle de sortie. La particule liquide pourra donc rattraper l'aube qui la précède, et agir sur elle en raison de leur différence de vitesse, avant que celle-ci, par son émersion, échappe définitivement à cette action. Il en sera d'ailleurs de même *a fortiori* pour toutes les molécules comprises, à l'instant initial, entre M et BB′.

175 — Je passerai encore brièvement en revue quelques récepteurs, que l'on peut considérer comme dérivés de la roue pendante ordinaire. Ils se sont peu répandus, en réalité, car leur originalité dépasse, pour la plupart d'entre eux, l'utilité du but poursuivi.

Avec la roue Morosi, les aubes sont munies de joues latérales évasées de manière à faciliter l'engouffrement des filets, en gênant leur déviation vers le large. Nous avons vu, en effet (p. 105, note 2), qu'il résulte de cette disposition un accroissement de l'effort transmis au récepteur.

176 — Dans la roue Deparcieux, les palettes étaient inclinées sur le rayon, en restant parallèles à l'axe, à peu près comme pour la roue à goître (fig. 92). Le but restait le même, et tendait à gêner la déviation des filets, non plus latéralement, mais en dessous. Les aubes avaient été, à la suite d'expériences comparatives [1], disposées sous un angle de 30° par rapport au rayon.

177 — La roue Michel [2] est formée de deux circonférences égales (fig. 101), animées de vitesses angulaires identiques, en raison de la liaison que l'on établit entre elles à l'aide de trois roues dentées égales. Imaginons que l'on gradue uniformément la première de ces circonférences, et qu'on l'abaisse par la pensée, d'un mouvement de translation verticale, jusqu'à la position occupée par la seconde. Les trajectoires des points de division seront, comme dans toute translation rectiligne, des droites égales et parallèles. Nous les réaliserons matériellement au moyen d'aubes, articulées chacune en ses deux extrémités. Cela

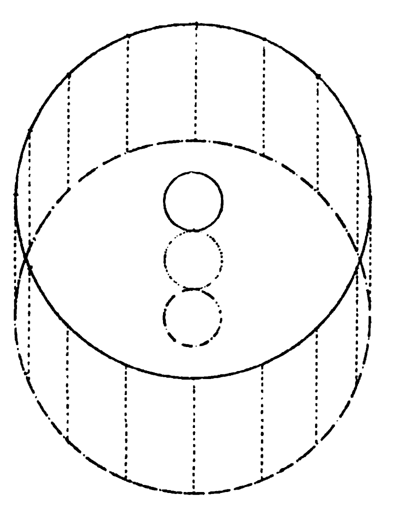


Fig. 101. — Roue Michel (figure schématique).

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1750.

(2) Cet appareil n'est cité ici que pour mémoire, car il n'a été employé que comme *propulseur* (n° 208, note), à bord du Nilus, et non comme *récepteur*. Cependant l'analogie m'engage à le rapprocher des précédents, en raison de l'originalité qu'il présente au point de vue cinématique.

posé, un tel système sera évidemment susceptible de prendre un mouvement dans lequel, chaque jante tournant sur son centre, les palettes resteront rigoureusement verticales, coupant l'eau directement pour y pénétrer, déterminant avec ce fluide une action mutuelle exactement horizontale, et enfin émergeant verticalement sans relever le liquide.

178 — La *chaîne hydraulique* de Roman (fig. 102) a été destinée par son auteur, d'une part à réaliser l'effort horizontal, et,

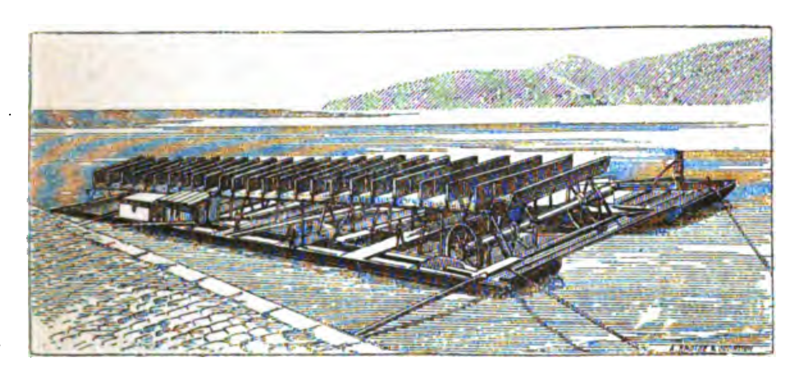


Fig. 102. — Chaîne hydraulique de Roman (vue d'ensemble).

de l'autre, à prolonger le séjour des palettes dans l'eau plus qu'on ne saurait l'obtenir d'une simple rotation ([1]). On peut, par la pensée, faire dériver ce récepteur de la roue en dessous à aubes planes, en ce qui concerne la direction horizontale, de la même manière que le chapelet hydraulique (fig. 90) se déduit, quant au sens vertical, de la roue à augets.

L'appareil se compose de deux chaînes sans fin, qui sont formées de maillons longs, reliés entre eux, au moyen de boulons d'articulation, par des paires de maillons courts. Ces dernières, à l'aide de l'œillet ménagé dans leurs intervalles, engrènent avec les pointes des roues de support (fig. 103). Les maillons longs portent, de deux en deux, des palettes dont la perpendicularité est maintenue par des systèmes d'équerres et d'étançons.

([1]) Pierron. *Génie civil*, t. V, p. 359.

M. Roman a observé qu'après le premier choc supporté par l'aube au moment de son immersion, la vitesse du courant se rétablit suffisamment dans les intervalles, en raison des actions latérales, pour rester capable d'imprimer aux autres palettes un effort égal aux

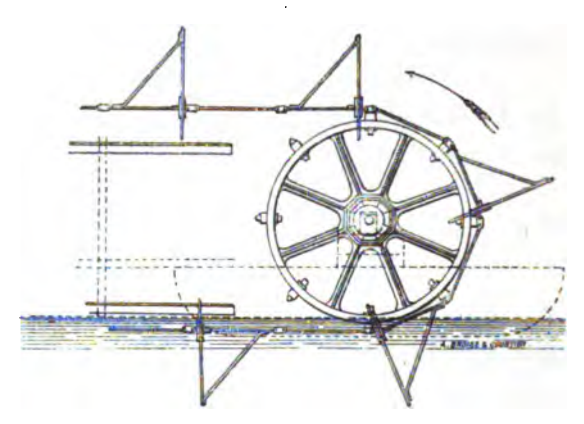


Fig. 103. — Chaîne hydraulique de Roman (poulie de retour).

trois quarts environ du premier, pourvu que l'espacement atteigne $1^m,50$. Si donc n désigne le nombre des aubes immergées, le travail total s'obtiendra en multipliant l'expression (89) par le coefficient :

$$1 + \frac{3}{4}(n-1) = \frac{3n+1}{4},$$

et déterminant convenablement la valeur de la constante C.

M. Zschische (1) et M. Brush (2) ont proposé, chacun de leur côté, des récepteurs analogues au précédent.

179 — *L'hydromoteur Iagn* est constitué (fig. 104, 105) par une double chaîne de parachutes (3). Ceux-ci sont formés d'une toile à voile, maintenue par six tirelles qui l'empêchent de se retourner. Chacune des deux chaînes enroulées sur le tambour-récepteur va

(1) *La Nature*, 1er mars 1884.
(2) *Annales de la Société des sciences industrielles de Lyon*. 1884, p. 100.
(3) Pierron (*Génie civil*, t. V, 361). — Poillon (*La Nature*, 24 janvier 1885, p. 115). — *Annales de la Société des sciences industrielles de Lyon*, 1884, p. 104.

passer sur une poulie de retour, installée en aval au moyen d'un flotteur, et revient à contre-courant. Pour éviter le *mou* des chaînes et leur rapprochement, on maintient l'écartement des poulies de



Fig. 104. — Hydromoteur Iagn (élévation).

retour au moyen d'une prolonge, garnie elle-même de quelques parachutes, et terminée par des planchettes obliques qui subissent, comme un gouvernail, un effort dirigé de biais. On peut craindre cependant que, dans les cours d'eau peu profonds, les appareils

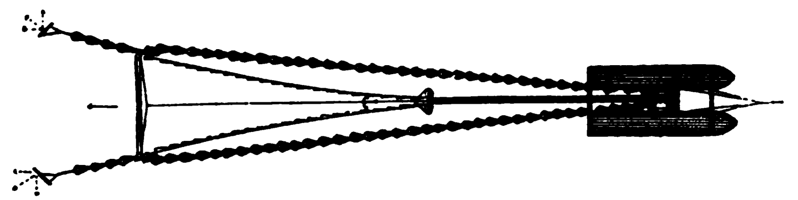


Fig. 105. — Hydromoteur Iagn (plan horizontal).

ne frottent sur le fond, en se détériorant rapidement. A la remonte, ils s'aplatissent complètement, et des mesures directes ont montré qu'en cet état ils ne supportent plus qu'une résistance égale au centième de l'effort moteur à la descente.

Les expériences les plus récentes ont indiqué, pour l'expression du travail ainsi recueilli :

$$(90) \qquad T = 0{,}32\,A v_0^3,$$

si A désigne la totalité des maîtres-couples des parachutes. La vitesse de marche la plus convenable a paru être la suivante :

$$(91) \qquad u = \frac{v_0}{3}.$$

180 — La *roue flottante* de Colladon [1] consiste en une tonne

[1] Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 137.

qui s'élève ou s'abaisse avec le niveau du courant (fig. 106, 107). La rotation de ce flotteur, et de la roue dentée qui en est solidaire, se transmet, par l'intermédiaire d'un pignon, à une roue d'engrenage

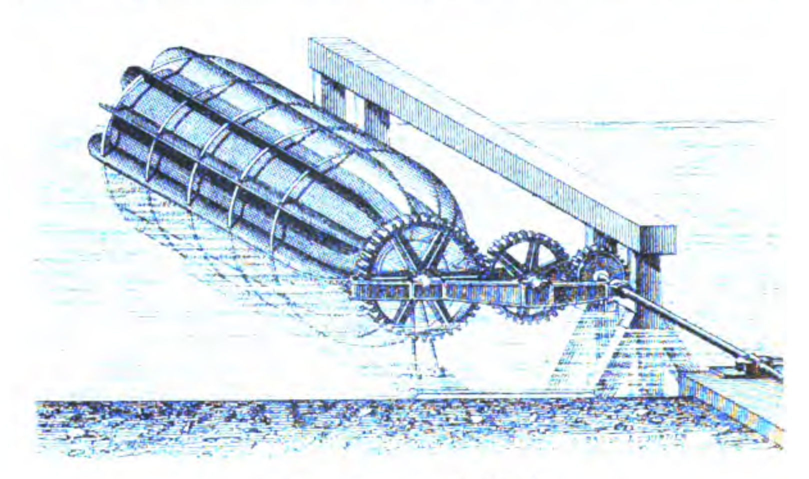


Fig. 106. — Tonne flottante Colladon.

montée sur l'arbre de couche [1]. Un coursier noyé est destiné à diriger le mieux possible les filets liquides sur la roue. Il constitue, avec la bielle qui porte le train de roues dentées, un parallélo-

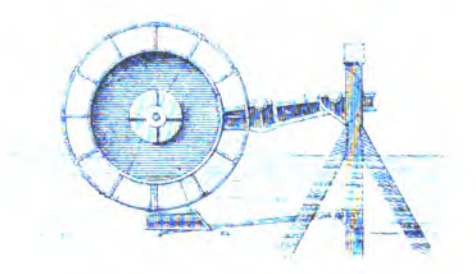


Fig. 107. — Tonne flottante Colladon.

gramme articulé permettant les variations de niveau du récepteur.

L'*hélice flottante* de Colladon est formée d'une tonne analogue à la précédente, mais disposée en long, et non plus en travers du

[1] Lorsque le moteur est destiné à l'élévation de l'eau, on peut supprimer le train d'engrenages, et adapter directement, à la roue flottante, la pompe spirale de Wetmann (Armengaud aîné et fils, *Progrès de l'industrie*, vol. I, planches 107, 108).

courant. Elle porte des surfaces hélicoïdales. Celles-ci subissent l'influence du courant, d'après un mode d'action que l'on peut définir, en principe, comme étant à celui de l'hélice propulsive des navires ce que le fonctionnement de la roue en dessous réceptrice est à celui des roues à aubes de la navigation. On peut également le rapprocher du moulinet de Woltmann (n° 139), en tenant compte, bien entendu, de la différence qui sépare un appareil de précision, construit avec délicatesse, d'un organe robuste destiné à la transmission de grandes forces.

§ 4

ROUE PONCELET

181 — La *roue en dessous à aubes courbes*, appelée aussi *roue Poncelet*, du nom de son inventeur [1], est formée d'une série de cloisons qui s'implantent dans la couronne normalement à sa circonférence, et se raccordent à peu près tangentiellement avec celle de la jante (fig. 108). Au sortir de la vanne de fond, un canal courbe, dont nous déterminerons plus loin le profil, amène le liquide sur la roue, qui s'emboîte ensuite, jusqu'au point le plus bas de son contour, dans un coursier circulaire, suivi lui-même d'un approfondissement brusque du lit.

Ce changement de profondeur n'est pas destiné, comme pour la roue à aubes planes (n° 170), à créer un ressaut, qui exige toujours un certain degré de rapidité (n° 110, p. 180). Il n'en saurait être ici question, puisque le but des appareils à réaction est précisément de déposer, autant que possible, l'eau sans vitesse à sa sortie (n° 151). C'est précisément en vue de permettre, malgré la lenteur

[1] *Mémoire sur les roues hydrauliques verticales à aubes courbes mues par-dessous*, 1827. — Didion. *Étude sur le tracé des roues à aubes courbes*, 1870. — Morin. *Hydraulique*, p. 231. — Ordinaire de la Colonge. *Notice sur le moulin de Salles*, Bordeaux, 1855. — Résal (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 6 décembre 1869). — Armengaud (*Génie industriel*, VII, 50, 88, 152, 210). — Krafft. *Roue hydraulique à aubes courbes*, 1859. — Redtenbacher. *Theorie und Bau der Wasserräder*, 1858. — Redtenbacher. *Resultate für den Maschinenbau*, 1852, p. 141. — Weissbach. *Lehrbuch der Ingenieur und Maschinen Mechanik*, 1851, p. 292. — Fairbairn. *On Waterwheels*, 1840, p. 19.

de cet écoulement, un dégorgement convenable du bief inférieur,

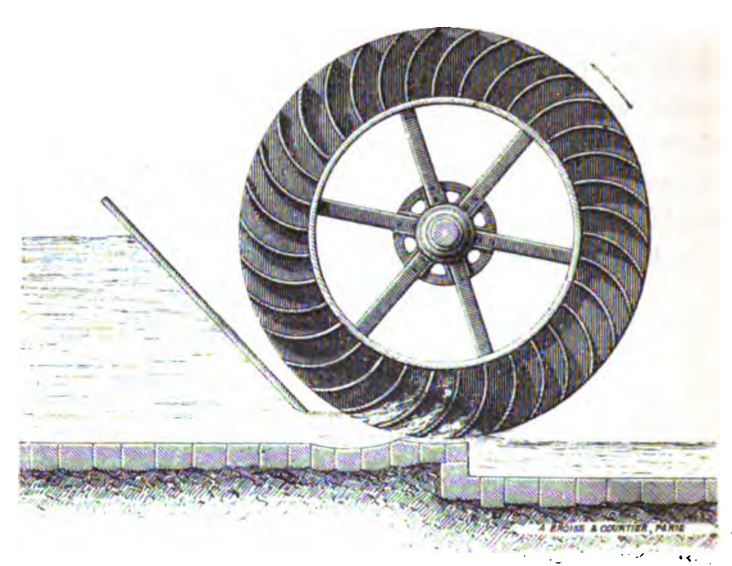


Fig. 108. — Roue Poncelet.

en rachetant, par l'importance de la section, ce qui manque du côté de la rapidité.

182 — Suivons, par la pensée, le mouvement d'une molécule d'eau, *comme si elle était seule*. Elle se présente avec une vitesse absolue v_0 tangentiellement à la roue et à l'aube. Elle entre ainsi sans choc, et perd peu à peu sa force vive en gravissant la pente, sans qu'il se produise nulle part de phénomènes brusques. On supprime donc l'influence des vitesses perdues, et nous pouvons poser, dans la formule générale (75) :

$$\Upsilon = 0.$$

La vitesse relative à l'entrée w_0 s'obtiendra en faisant la différence de la vitesse absolue v_0, qui est tangente à la roue, et de la vitesse d'entraînement u, avec laquelle se dérobe la jante :

$$w_0 = v_0 - u.$$

Appliquons au mouvement relatif, dont w_0 constitue la vitesse initiale, le théorème des forces vives, jusqu'à l'instant où la molécule se représente au même orifice, pour sortir avec une vitesse finale w_1. Si nous négligeons la différence de niveau entre les deux positions qu'occupe ce point dans l'espace, laquelle est peu importante, puisque tout se passe dans la région inférieure de la roue, le travail de la pesanteur disparaîtra. Celui du frottement ne mérite pas d'être pris en considération, pour un aperçu aussi sommaire. Il reste encore, d'après la théorie des mouvements relatifs, à joindre aux forces réelles la force centrifuge. Mais, dans le cas actuel, son travail est nul, quelle que soit la trajectoire (n° 34), puisque les deux extrémités du déplacement se trouvent à la même distance de l'axe. En somme donc, tous les travaux ayant disparu, l'accroissement de force vive s'annule de son côté, ce qui donne :

$$w_1 = w_0 = v_0 - u.$$

Cette nouvelle vitesse relative est encore tangente à l'aube et, par suite, à la roue, mais en sens contraire de la précédente. La vitesse absolue v_1 sera donc la différence entre celle d'entraînement u de l'aube et la vitesse relative w_1, avec laquelle le mobile recule sur cette aube :

$$v_1 = u - w_1 = u - (v_0 - u) = 2u - v_0.$$

Or, le but que l'on poursuit dans les appareils à réaction, ainsi que nous venons de le rappeler, est de faire en sorte que la vitesse absolue soit nulle, afin d'éteindre la force vive emportée inutilement par l'eau. Nous poserons par conséquent :

$$2u - v_0 = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$(92) \qquad u = \frac{v_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}.$$

188 — Telle est donc la vitesse avec laquelle il conviendra de mener la roue. On remarquera que cette condition est identique

à celle qui a été trouvée pour la roue à aubes planes (éq. 86). Ces deux sortes de roues en dessous, si différentes au fond, présentent ainsi le même avantage de dépenser beaucoup d'eau en marchant à grande vitesse. Le débit par mètre de largeur peut, dans la roue Poncelet, atteindre 1 mètre cube. Pratiquement, on a reconnu, pour la meilleure vitesse de régime, une valeur un peu différente :

$$(93) \qquad u = 0,55\,v_0 = 0,55\sqrt{2gH},$$

ce qui s'explique facilement par l'imperfection de la théorie précédente qui, appliquée à une molécule comme si elle était seule, ne constitue évidemment qu'un simple aperçu.

Si nous conservons, pour plus de simplicité, la valeur théorique (92) qui annule v_1, il ne restera, de l'expression (75) de T, que les termes :

$$(94) \qquad T_m = PH - T'.$$

Ainsi donc, sauf les influences secondaires qui se trouvent résumées dans le terme T', nous obtenons, comme limite théorique de l'effet utile de la roue à aubes courbes, précisément le maximum absolu PH dont est susceptible la puissance de la chute (n° 147), et dont nous ne pouvions réaliser que la moitié avec la roue à palettes (éq. 88, p. 260). En réalité, le rendement $\frac{T_m}{PH}$ des roues Poncelet bien établies varie entre 0,50 et 0,65. Il est donc à peu près double de celui du récepteur à aubes planes (n° 171).

184 — Il importe de déterminer, d'après les formules précédentes, la hauteur qu'il sera nécessaire de donner aux cloisons, pour qu'elle permette à la gravité d'user librement la force vive initiale.

Appliquons, pour cela, le théorème des forces vives au mouvement relatif qui a pour vitesse initiale w_0, c'est-à-dire $v_0 - \frac{v_0}{2}$, d'après l'équation 92, ou enfin :

$$(95) \qquad w_0 = \frac{v_0}{2}.$$

Nous prendrons comme instant final celui pour lequel le mobile s'arrête, au point le plus haut de son parcours. Sauf l'influence de la force centrifuge, cette équation montre, comme on le sait, que le corps s'élève à la *hauteur due* $\frac{w_0^2}{2g}$, c'est-à-dire (95) $\frac{1}{4}\frac{v_0^2}{2g}$, ou enfin $\frac{H}{4}$. L'influence de la force centrifuge tend, à la vérité, à refouler quelque peu le mouvement, en réduisant cette élévation. Mais il existe, en sens inverse, une action bien autrement efficace. Il est, en effet, nécessaire de remarquer qu'au lieu de cette molécule unique, que considère la théorie précédente, nous nous trouvons en présence d'une nappe liquide lancée le long de l'aube, et dont la partie postérieure, qui ne saurait s'arrêter en même temps que la tête de colonne, puisqu'elle n'est pas encore arrivée à la hauteur voulue pour cela, poussera les premières tranches au delà du point que nous venons de déterminer. On ne peut que par appréciation faire la part de cette influence, et l'on se borne, dans la pratique, à remplacer $\frac{H}{4}$ par $\frac{H}{3}$ comme largeur de la couronne. Il est d'ailleurs inutile de garnir celle-ci d'une fonçure.

On voit par là que la hauteur de chute ne saurait être considérable sans entraîner, pour la roue, à des dimensions exagérées. Elle ne dépasse pas, en général, 2 mètres. Quant au diamètre, il peut varier entre 3 et 7 mètres.

185 — L'aperçu théorique qui nous a servi de base, nécessite un second correctif pour ce qu'il a de trop absolu. L'aube ne saurait, en effet, être rigoureusement tangente à la circonférence, sous peine de supprimer tout passage à la lame d'eau. Un certain angle α est, à cet égard, nécessaire.

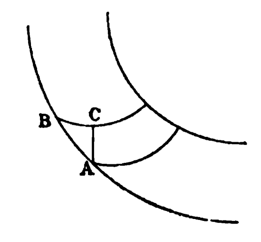


Fig. 109.

Représentons en effet (fig. 109) les aubes consécutives qui partent des points A et B, séparés l'un de l'autre par l'arc :

$$AB = \frac{2\pi R}{N}.$$

en appelant R le rayon de la roue, et N le nombre des aubes. La largeur du débouché sera marquée par la normale AC, abaissée de l'extrémité de l'une de ces deux aubes sur la seconde. Si l'on assimile, par approximation, la figure ABC à un triangle rectangle, elle fournit la relation :

$$AC = AB \sin \alpha.$$

L'usage est de prendre $\alpha = 30°$, ce qui donne :

$$AC = \frac{\pi R}{N}.$$

Pour que la vitesse relative w_0, qui doit être dirigée suivant l'aube, rencontre le cercle sous un angle de 30°, il faut que la vitesse absolue v_0 aborde ce dernier avec une inclinaison de 15°. On a, en effet, en rapprochant les égalités (92) et (95) :

$$u = w_0,$$

ce qui montre que le parallélogramme des vitesses est un losange, et que la diagonale en est la bissectrice (fig. 110).

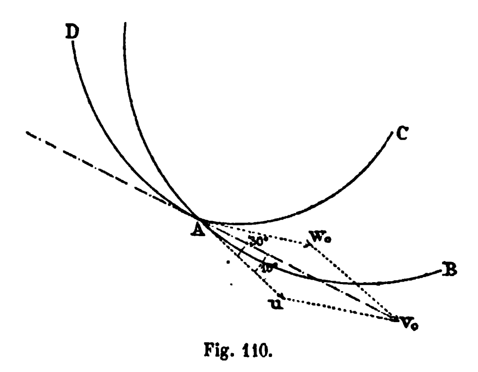


Fig. 110.

186 — Cela posé, admettons que, sur le faible parcours qui sépare, de la roue, le débouché de la vanne, il n'y ait pas de variation sensible de la vitesse, par conséquent de la section, ou enfin de

l'épaisseur de la lame d'eau. Toutes les nappes élémentaires qui la constituent donneront alors, par leurs profils, des courbes *parallèles*, c'est-à-dire des développantes d'une même développée, ayant toutes le même système de normales. Si l'on envisage, pour chacun de ces filets, *sa dernière normale*, au point où il rencontre la roue, l'ensemble de ces droites reproduira naturellement tout le système des normales de cette famille de courbes. Il enveloppe donc la développée cherchée. Or, on demande que chaque filet atteigne la circonférence de la roue sous une inclinaison de 15 degrés. Sa dernière normale devra, pour cela, faire avec le cercle un angle de 75 degrés. La développée en question est donc l'enveloppe des droites qui font avec une circonférence un angle constant, c'est-à-dire évidemment (fig. 111) un cercle concentrique ayant pour rayon R sin 15°, ou 0,259 R, ce qui revient sensiblement à $\frac{R}{4}$. Mais l'un de ces filets suit immédiatement le fond du coursier curviligne d'amenée (fig. 108). Concluons donc que ce dernier présente pour profil la développante d'un cercle qui a pour rayon le quart de celui de la roue.

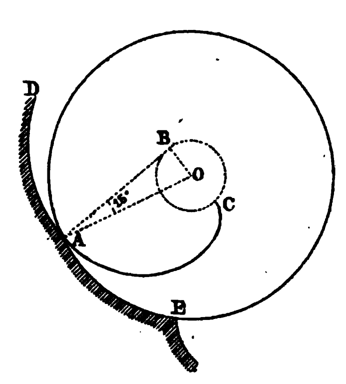


Fig. 111.

CHAPITRE X

TURBINES

§ 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ROUES A AXE VERTICAL

187 — Les récepteurs assujettis à tourner autour d'un axe vertical se prêtent moins facilement que les roues à axe horizontal à l'action *immédiate* de la pesanteur. Pour quelques-uns même, comme la turbine Fourneyron (n° 191), le parcours de l'eau est ri-

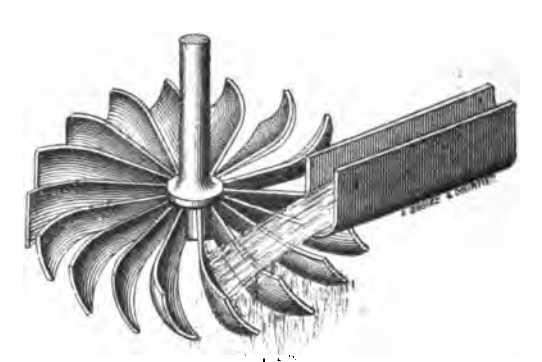


Fig. 112. — Roue à cuillers.

goureusement horizontal. Dans d'autres, tels que la turbine Fontaine (n° 190), le liquide traversant de haut en bas l'épaisseur de l'appareil, sa trajectoire possède une projection verticale propre au développement direct du travail de la gravité, mais d'une manière relativement très effacée. Nous pouvons dire, d'après cela,

que la première catégorie (n° 151), celle des moteurs à poids proprement dits, disparaît d'elle-même. Nous ne rencontrons donc que les deux autres, à savoir les récepteurs à choc ou à réaction.

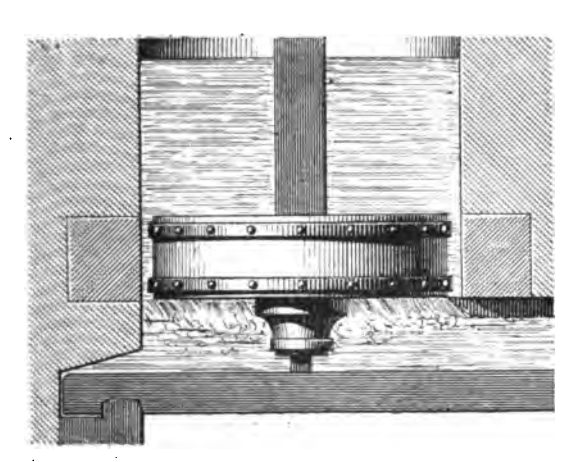


Fig. 113. — Roue à cuve (élévation).

Le choc a été, en effet, employé sous cette forme ([1]), et a donné

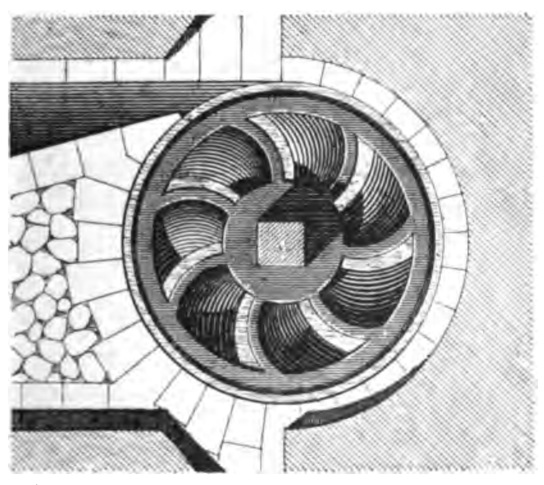


Fig. 114. — Roue à cuve (plan horizontal).

naissance à divers appareils appelés *rodets*, *roues à cuillers*, *à cuve*, *moulins à trompe*, *à cannelle* (fig. 112, 113, 114), auxquels

([1]) Bélidor. *Architecture hydraulique*, t. I, ch. I. — Daubuisson. *Hydraulique*, p. 442.

on peut joindre la *roue Adamson*. Ces moteurs ont aujourd'hui complètement disparu. Outre que le principe du choc y conservait son infériorité fondamentale (n° 151), son mode de réalisation s'y compliquait encore, en raison de la nouvelle situation de l'axe. On était tombé à des rendements de 0,20 ou 0,25 qui, dans les plus mauvaises conditions, s'abaissaient encore jusque dans les environs de 0,10. Il serait donc bien inutile de nous arrêter aujourd'hui à la théorie de semblables machines.

188 — Le mode de fonctionnement par réaction reste, par suite, le seul pratique dans ces conditions; son emploi est déjà ancien, car on le rencontre dans le tourniquet hydraulique, qui a été réalisé en grand sous le nom de *roue de Segner* (fig. 115). Un tuyau vertical amenait l'eau suivant l'axe lui-même, et se ramifiait en six ou huit rayons horizontaux, recourbés à leur extrémité tangentiellement à un cercle. Les effets de recul donnaient lieu, par rapport à l'axe, à des moments de même signe, dont l'ensemble déterminait la rotation du système.

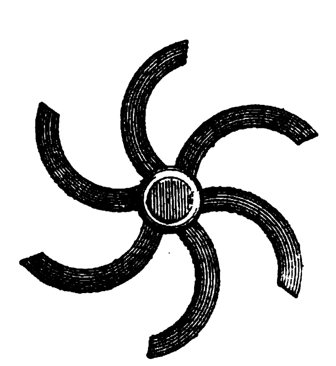


Fig. 115. — Roue de Segner (plan horizontal).

De Mannoury d'Ectot a simplifié cette donnée dans son *levier hydraulique* (fig. 116), en le réduisant à deux bras diamétralement opposés ([1]).

Dans les *danaïdes* ([2]) et les *roues en poire* ([3]), on obtenait un effet semblable à l'aide de canaux à double courbure.

La *roue d'Euler* ([4]) et plus tard la *turbine Burdin* ([5]) se rapprochent progressivement des dispositifs actuels, qui font enfin leur

([1]) *Journal des mines*, 1813.
([2]) Rapport de Carnot (*Journal des mines*, t. XXXIV, p. 213). — Burdin (*Annales des mines*, 1836, p. 504).
([3]) Bélidor. *Architecture hydraulique*, 668.
([4]) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1750 et 1754.
([5]) *Annales des mines*, 3e série, t. III, 1833.

première apparition en 1823, entre les mains de Fourneyron ([1]).

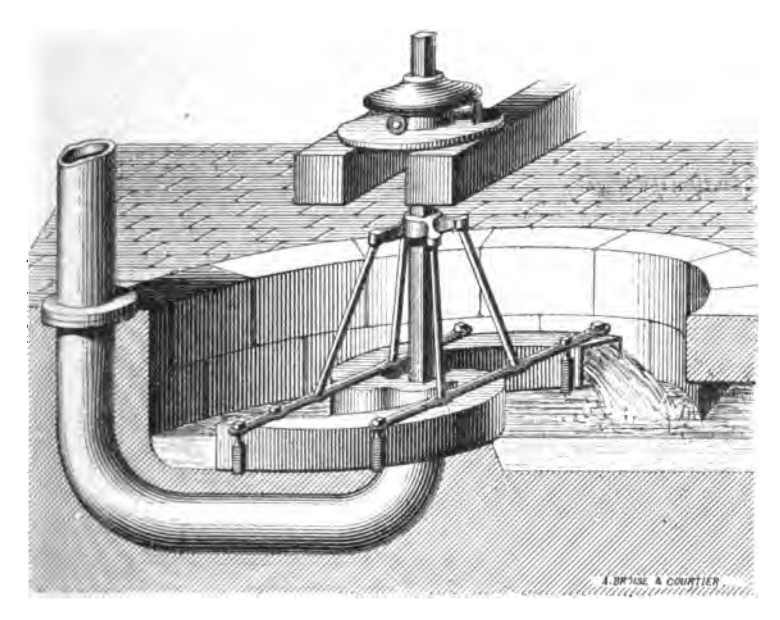


Fig. 116. — Levier hydraulique de Mannoury d'Ectot.

([1]) M. G. Richard a publié sur les turbines, dans le journal *la Lumière électrique* (1883, p. 25, 38, 74, 102, 139, 170, 204, 232, 401, 434), une série d'articles très intéressants, que j'ai largement mis à contribution. Je suis heureux de saisir cette occasion pour signaler, en outre, l'utile concours que m'a fourni cet habile ingénieur, en me procurant, sur divers sujets, de nombreux renseignements. La plupart des sources suivantes relatives aux turbines se trouvent citées dans les articles dont je viens de parler.

Vallet. *Construction des turbines*, Dejey, 1875. — Combes. *Recherches théoriques et expérimentales sur les roues à réaction ou à tuyaux*, Paris, 1843. — Gérard. Mémoires divers. — Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*. — Armengaud (*Publication industrielle*, I, IV, VI, XI, XXI, XXII, XXIII, XXV). — H. Mangon. *Machines agricoles*, 1875. — Morin. *Leçons de mécanique pratique*, II. — Bresse. *Cours de mécanique appliquée*, II. — Callon. *Cours de machines*, I. — Oppermann (*Portefeuille des machines*, 1858, 1859, 1872, 1876). — Fliegner. Théorie des turbines à réaction (*Deutscher Ingenieure*, 1879, p. 459). — Lehmann. Théorie des turbines (*ibidem*, XXIII, 31). — Lehmann. Turbine Girard (*ibidem*, XXV, 258). — Seemann. Essai d'une turbine (*ibidem*, XXVI, 301). — Redtenbacher. *Theorie und Bau der Turbinen mit Taffeln*. — Atterberg. Theory for Turbine Waterwheels (*Van Nostrand*, *Engineering Magazine*, février 1882). — Towbridge. *Turbine Wheels*, *Van Nostrand*, New-York, 1879. — Donaldson. *Waterwheels*, Spon, Londres. — Cullen. *Horizontal and vertical Waterwheels*, Spon, Londres. — Emerson. *Testing of Waterwheels and Machinery*. Weaver Springfield, Ohio. — Francis. *Lowel and hydraulics Experiments*. Van Nostrand. — Glynn. *The Power of water*, Lockwood, Londres. — Perry. *Fluid motors*, Cassell, Londres. — Turnbull. On Waterwheels and Turbines (*Transactions of Institution of Engineers and Shipbuilders*

§ 2

DISPOSITIFS FONDAMENTAUX

189 — Dans toute turbine, on peut distinguer deux parties essentielles : le *distributeur* et le *récepteur* proprement dit. Le premier consiste en une couronne, généralement symétrique sur toute sa circonférence ([1]), le long de laquelle des *contre-aubes fixes* subdivisent la masse liquide en courants partiels, qu'elles dirigent vers des compartiments analogues du récepteur. Celui-ci, toujours symétrique, est lui-même cloisonné par une série *d'aubes mobiles*, destinées à dévier les filets pendant leur traversée, de manière à leur attribuer, à la sortie, une vitesse relative sensiblement égale et opposée à celle d'entraînement, conformément au principe des appareils à réaction (n° 151).

Nous baserons sur la forme des aubes une classification des turbines. Dans une première catégorie, les trajectoires liquides peuvent être considérées comme situées sur des cylindres concentriques, de manière que la distance à l'axe reste invariable. Nous les appellerons turbines *parallèles*. Dans les autres, le mouvement n'a plus de composante parallèle à l'axe, et s'effectue dans un plan de section droite. Si le rayon va en augmentant, on obtient les turbines *centrifuges*, et, quand il diminue progressivement, les turbines *centripètes*. Nous réunirons, sous les noms de turbines *mixtes* et de turbines *composées*, certains types dans lesquels plusieurs des caractères précédents se trouvent réunis.

in Scotland, 19 décembre 1882. — Efficiency of Turbines as affected by Form of Gate (*American Machinist*, 23 décembre 1882, p. 6). — Turbines for small Industries (*Scientific American Supplement*, 14 avril 1883, p. 6056).

([1]) On rencontre, sous ce rapport, quelques exceptions. La *turbine rurale* de Canson n'est alimentée que par deux points diamétralement opposés (Bonnet. Étude sur la turbine Canson, 1870, in-8°. — Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 412).

La *roue à injection extérieure* de Poncelet ne diffère pas de la roue verticale de même nom, que l'on aurait, par la pensée, couchée sur le côté. On alimente en un seul point de la circonférence, au moyen d'un coursier latéral, et l'eau s'échappe par le centre en traversant la couronne de part en part, au lieu de prendre le mouvement alternatif qui est caractéristique de la roue en dessous à aubes courbes (Résal. *Traité de mécanique générale*, IV, 46).

190 — *Turbines parallèles* (1). — *Type Fontaine.* — Le corps

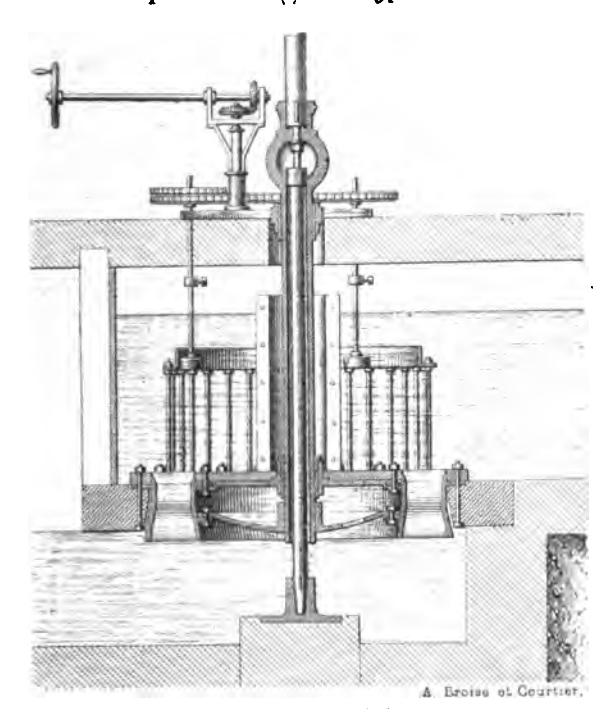


Fig. 117. — Turbine Fontaine (coupe verticale).

de la turbine Fontaine (fig. 117) est relié à un arbre creux, à l'aide d'un système de bras, ou d'une cuvette continue qui présente l'avantage de moins brasser le liquide, si l'appareil est noyé. Ce fourreau coiffe, à sa partie supérieure, le sommet d'une colonne immobile. Il repose sur cette crapaudine au moyen d'un pivot (2). Le liquide traverse le ré-

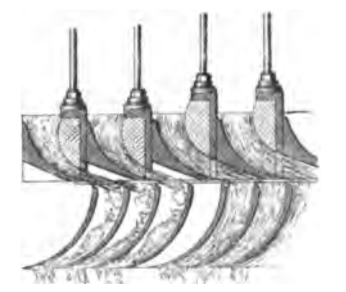


Fig. 118. — Turbine Fontaine (coupe cylindrique développée).

(1) Turbines Bourgeois, Burdin, Euler, Girard, Valet.

(2) On peut employer avantageusement le *pivot à échelons*, qui permet de répartir, sous la forme de couronnes superposées, une surface d'appui aussi grande que l'on voudra, en vue de soulager le métal, tout en conservant, pour les frottements, des bras de levier sensiblement moindres qu'avec un disque unique.

cepteur de haut en bas. Les aubes ont la forme de conoïdes droits, décrits par une génératrice horizontale, qui s'élèverait en s'appuyant à la fois sur l'axe vertical et sur des courbes directrices tracées sur un cylindre de révolution. La figure 118 représente les transformées de ces lignes, obtenues par le développement du cylindre.

Le rendement des turbines Fontaine ne dépasse guère 0,70 en pleine marche.

191 — *Turbines centrifuges* (¹). — *Type Fourneyron.* — Un axe vertical (fig. 119, 120, 121) porte, par son pivot, sur une crapau-

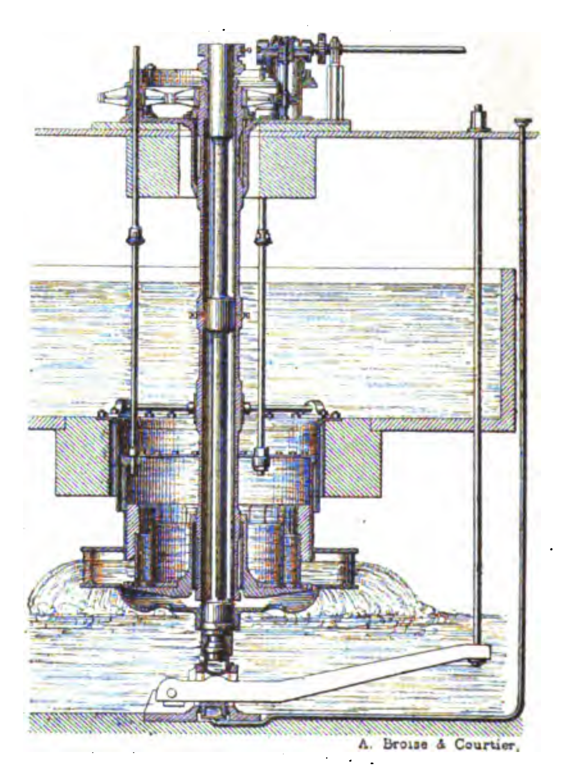


Fig. 119. — Turbine Fourneyron coupe verticale).

dine. Celle-ci est recouverte d'une cloche, que l'on maintient pleine d'huile dans le but de réaliser un graissage continu. Pour com-

(¹) Turbines Boyden, Canson, Dufort, Koster, Nagel et Kaemp, Shiele, Trent.

penser les pertes, on y refoule le corps gras au moyen d'une petite pompe actionnée par le récepteur lui-même, ou en se servant de la simple pression hydrostatique d'un tube, lequel devra être plus élevé que le niveau du bief d'aval, afin de tenir compte de la différence des densités. L'arbre moteur porte, à l'aide d'un système de bras ou d'une cuvette complète, le corps de la turbine. Un *tuyau porte-fond* enveloppe l'axe vertical et supporte, comme l'indique son nom, le fond du distributeur ; celui-ci présente une série de cylindres verticaux formant les contre-aubes directrices.

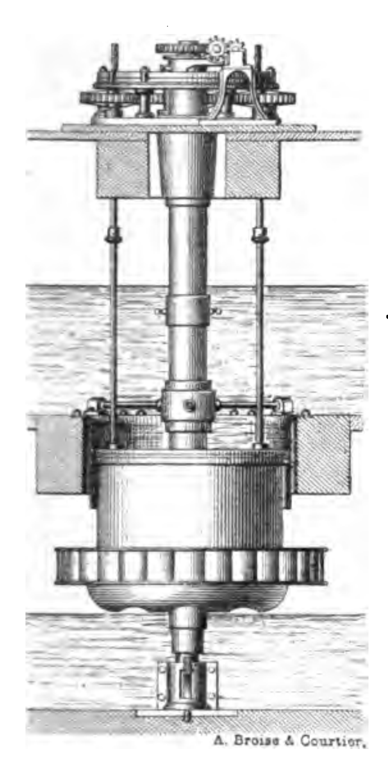


Fig. 120. — Turbine Fourneyron (élévation).

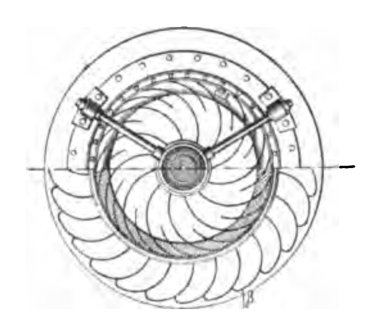


Fig. 121. — Turbine Fourneyron (coupe horizontale).

La roue elle-même a ses deux fonds, supérieur et inférieur, réunis par des aubes cylindriques. La section du puits d'amenée doit être au moins quadruple du débouché offert par le récepteur.

Le rendement de la turbine Fourneyron atteint souvent 0,80 ; mais il s'abaisse rapidement lorsque le débit se réduit d'une manière notable, pendant les basses eaux.

192 — *Turbines centripètes* (¹). — *Type Thomson.* — La tur-

(¹) Turbines Hett, Mac-Connell (fig. 123), Stout Mills et Temple.
Decœur. Turbines centripètes (*Bulletin de la Société d'encouragement pour l'indus-*

bine *vortex* du professeur James Thomson [1] réalise, en Amérique, le type centripète, depuis une trentaine d'années. L'eau est amenée (fig. 122) par le conduit A dans la couronne B, et pénètre, à travers les passages C, à l'intérieur de la roue D. Elle est ensuite évacuée par l'intervalle E, à la fois vers le haut et vers le bas. Des becs mobiles jouent à charnière sur les extrémités des directrices, auxquelles

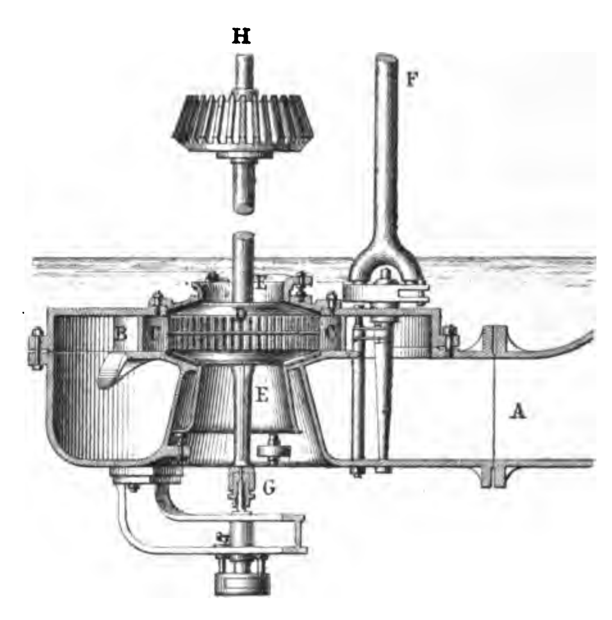


Fig. 122. — Turbine Thomson (coupe verticale).

ils servent de partie terminale, variable à volonté. Tous ces becs, solidaires entre eux, sont manœuvrés à l'aide de l'arbre F, de manière à modifier arbitrairement la section offerte au courant. La crapaudine G en bronze, graissée par une rainure de l'arbre H, tourne sur un pivot d'acier.

Le rendement de la turbine Thomson a été évalué par M. Emerson à 0,80.

trie nationale, juin 1877, p. 272. — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs*. — *Engineering*, 10 décembre 1880 et 24 novembre 1882. — *Iron*, 27 octobre 1882. — Richard (*La lumière électrique*, janvier 1883, p. 139).

(1) James Thompson. *Comptes rendus de la réunion de l'Association Britannique* de 1852.

Le système centripète, dont la première idée paraît due à Poncelet, présente l'avantage de diminuer le tourbillonnement de l'eau à sa sortie, en la mettant en contact avec la partie de l'appareil qui est animée de la moindre vitesse de giration. En outre, le récepteur acquiert, dans une certaine mesure, la propriété de régulariser lui-même son allure. Si, en effet, par une diminution subite des

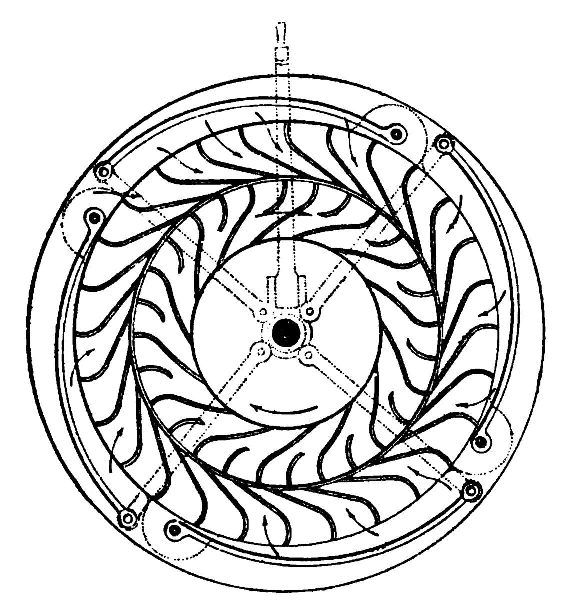


Fig. 125. — Turbine centripète Mac-Connell (coupe horizontale).

résistances, il a tendance à s'emporter, la force centrifuge s'accroît comme le carré de la vitesse de rotation, et ralentit le mouvement de l'eau vers le centre, d'une manière plus marquée qu'auparavant. La pression exercée sur les aubes se trouve donc diminuée, et par suite aussi le travail transmis. L'inverse se produira pour un accroissement des résistances. Dans les turbines centrifuges, cette faculté de régularisation se trouve, au contraire, remplacée par une aggravation des irrégularités.

193 — *Turbines mixtes* (¹). — *Type Risdon.* — Les turbines

(¹) Turbines Alcott, Burnham, Cornick (*turbine Hercule*), Houston, Pery et Taylor, Success, Swain, Tait, Tyler, Victor, Wemple.

mixtes présentent les dispositifs les plus variables. L'écoulement y est le plus souvent centripète, mais avec une composante parallèle à l'axe, et il en résulte, pour les aubes, des courbures compliquées.

Dans la turbine Risdon, l'eau est amenée par les directrices A (fig. 124, 125) sur les aubes dont le premier élément B se présente

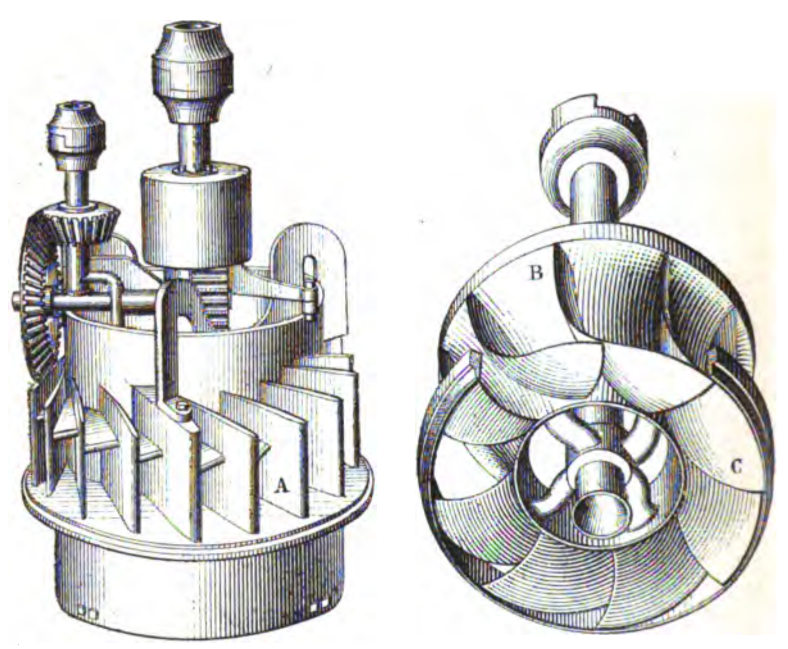


Fig. 124. — Turbine Risdon (élévation).

Fig. 125. — Turbine Risdon (vue perspective).

presque radialement. A partir de ce point, une double courbure entraîne le liquide dans la profondeur, et il sort en C presque tangentiellement au mouvement de rotation. Cette disposition a pour but d'éviter les engorgements.

Le rendement de la turbine Risdon atteint, d'après M. Emerson, 0,85 et aurait même dépassé 0,90 [1].

[1] Il convient sans doute d'apporter certaines réserves dans l'enregistrement des brillants rendements des turbines américaines, si l'on veut les rapprocher de celles de l'ancien continent. En effet, si l'on compare les formules de jaugeage de Francis, souvent employées aux États-Unis, avec celles de Poncelet et Lesbros, qui sont adoptées en

194 — *Turbines composées.* — *Type Leffel.* — Nous distinguerons à part, sous le nom de *turbines composées* [1], des appareils dans lesquels les trois combinaisons fondamentales, au lieu de s'amalgamer d'une manière plus ou moins confuse, conservent leur individualité dans un dispositif qui est, en quelque sorte, constitué par la juxtaposition de deux dispositifs simples.

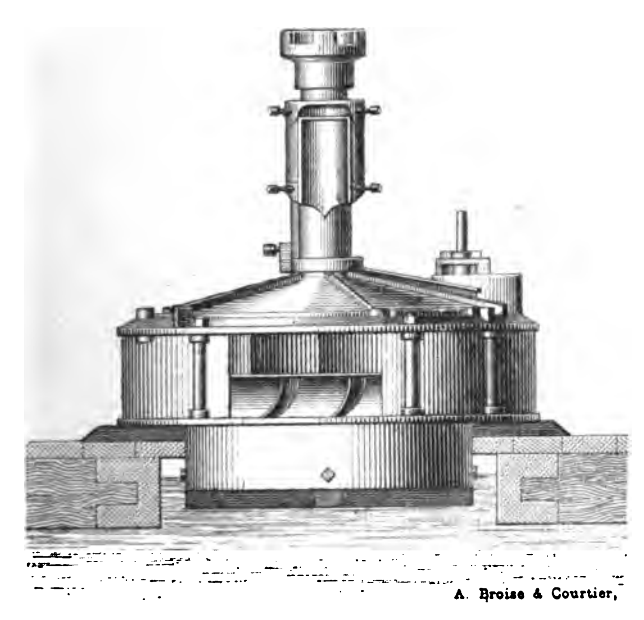


Fig. 126. — Turbine Leffel (élévation).

La turbine Leffel [2] peut servir de type à cet égard (fig. 126). On y voit deux roues venues de fonte ensemble. Dans la première, une moitié du débit agit suivant le mode parallèle, et, dans l'autre, la seconde moitié présente le fonctionnement centripète. On renferme ordinairement cet ensemble (fig. 127) dans une enveloppe

France, on reconnaît la nécessité de corrections qui peuvent atteindre, dans certains cas, 20 pour 100. On verrait ainsi des rendements dépassant 0,90 tomber au-dessous de 0,75 (Richard. *La lumière électrique*, 1883, p. 402).

[1] Turbines Blackstone, Walsh.

[2] M. James Leffel de Springfield (Ohio) annonce avoir livré plus de 10 000 de ces appareils, représentant une force totale qui approche de 500 000 chevaux. Cette énonciation permet de se faire une idée de l'énorme développement qu'a pris, aux États-Unis, la force hydraulique sous la forme des nouvelles turbines.

sphérique en fonte (*Globe casing*), munie de deux regards pour faciliter la surveillance, et d'un *trou d'homme* avec autoclave pour les réparations.

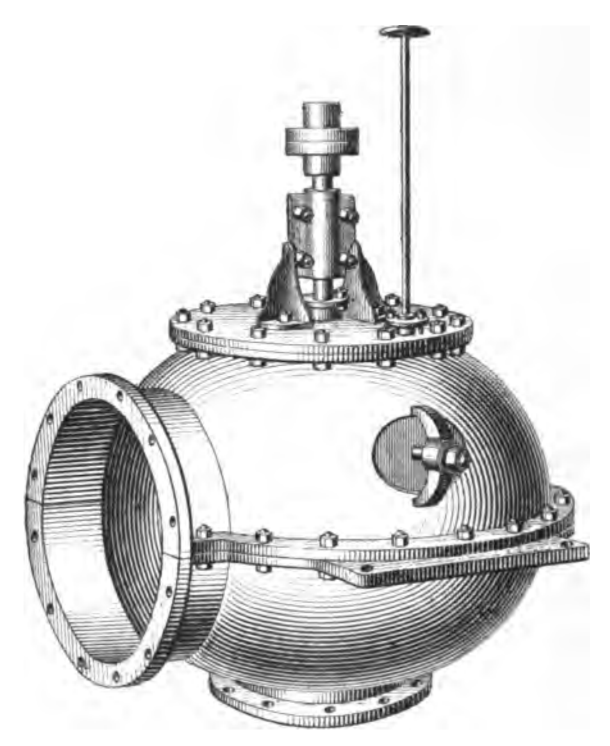


Fig. 127. — Turbine Leffel (enveloppe sphérique).

Le rendement de la turbine Leffel paraît varier, suivant les circonstances, entre 0,65 et 0,80.

§ 5

MODES D'INSTALLATION

195 — Lorsque l'on a fait choix de l'un quelconque des types précédents, il reste à fixer son mode d'installation, ce qui comporte encore un grand nombre de solutions distinctes.

L'emplacement le plus simple en principe, mais non le plus avan-

tageux, consiste à disposer la turbine *à fleur d'eau* par rapport au bief d'aval. On perd alors, par cette cascade, une partie de la chute pendant les sécheresses, tandis que la turbine patouille au moment des crues.

On préfère, pour éviter ces inégalités, le *type noyé*, dans lequel le récepteur tourne sous l'eau, et même sous la glace en hiver, tandis qu'il se trouverait alors paralysé par la congélation, avec

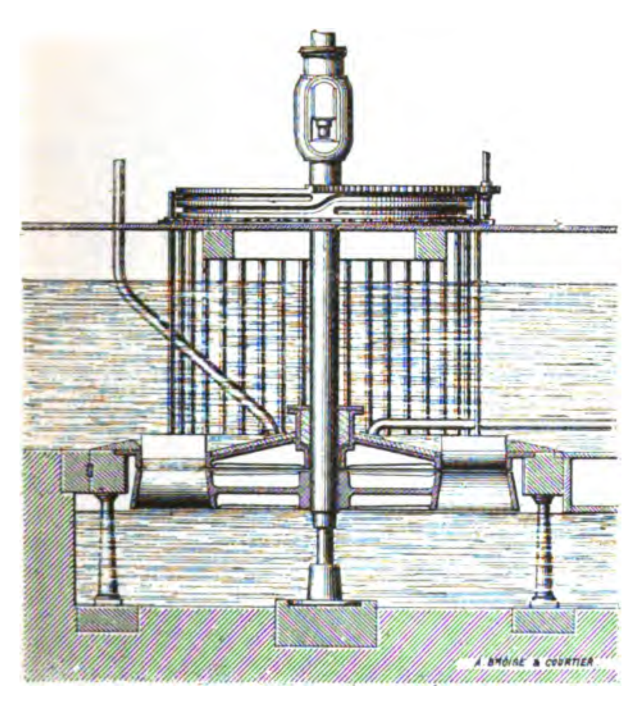


Fig. 128. — Turbine hydropneumatique Girard-Callon.

le mode précédent. Il est inutile d'avertir que l'on ne saurait attendre, de ce genre d'emplacement, un supplément de hauteur de chute. On peut bien, il est vrai, considérer la hauteur motrice comme accrue de toute la profondeur de l'installation en contre-bas; mais, en même temps, la contre-pression qui s'oppose à la sortie du liquide n'est plus alors limitée à la pression atmosphérique. Il s'y ajoute, par compensation, cette même hauteur d'eau. Son influence disparaît donc en théorie; mais on sait bien qu'en

réalité toute complication se traduit inévitablement par une aggravation des résistances passives.

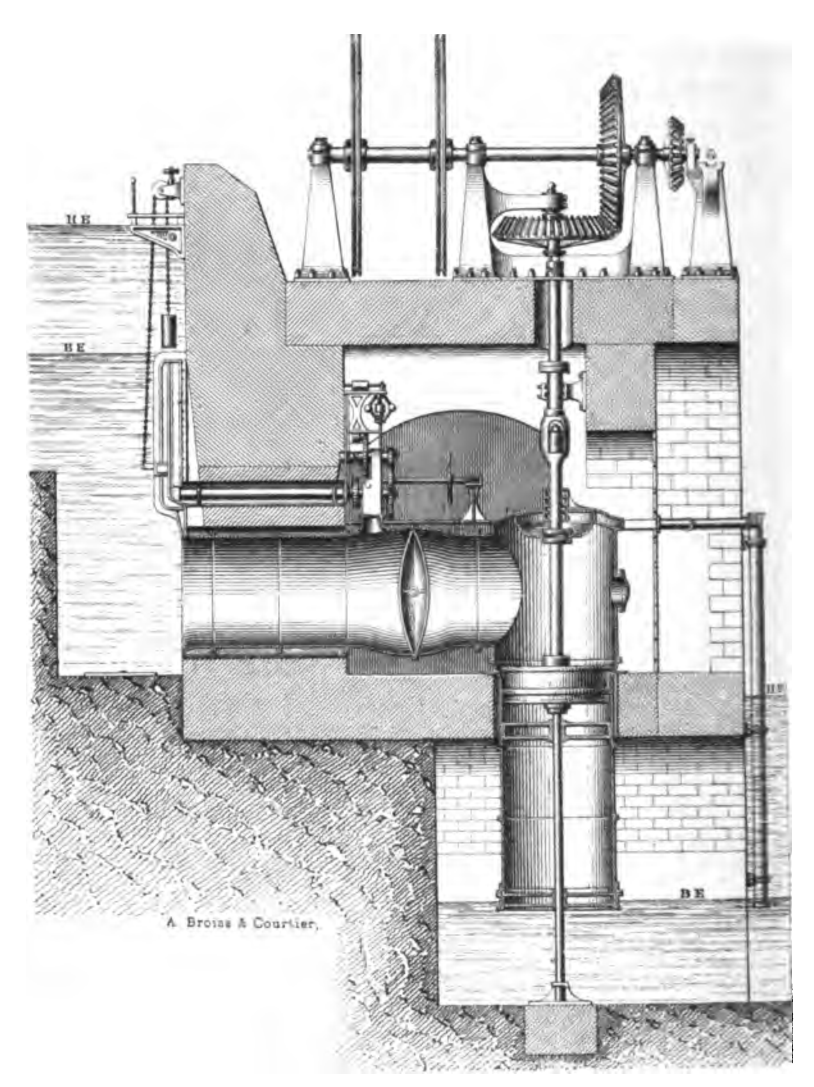


Fig. 129. — Turbine suspendue (coupe verticale).

L'une des plus importantes provient de ce que la rotation de la roue au sein du bief inférieur entretient celui-ci dans un état de tourbillonnement très favorable à la déperdition de la force vive.

Pour remédier à cet inconvénient, Girard a introduit le *système hydropneumatique*, dans lequel la turbine, bien qu'installée en contre-bas du bief inférieur, reste cependant dégagée du contact du liquide (fig. 128). Elle se trouve, en effet, sous une cloche remplie d'air comprimé, à une tension supplémentaire marquée par cette hauteur d'eau. Cet air, à la vérité, ne tarderait pas à disparaître par dissolution ou par entraînement mécanique; mais on a soin d'entretenir son approvisionnement à l'aide d'une petite pompe foulante, qui est actionnée par la turbine elle-même.

En partant d'un point de vue diamétralement opposé, Jonval a créé le *type suspendu*, souvent appelé turbine Kœcklin [1]. La roue est alors située dans une sorte de tour ou de puits métallique, à un niveau intermédiaire entre les deux biefs (fig. 129). Il est bien clair que l'on ne perd pas, pour cela, toute la partie de la chute qui se trouve au-dessous du récepteur. On peut encore, comme dans le cas précédent, admettre que la hauteur motrice se trouve effectivement diminuée de cette portion; mais, en revanche, au lieu de la pression barométrique, on n'a plus, pour s'opposer à la sortie de l'eau, que cette même tension diminuée de la dépression qui est provoquée par la suspension de la masse liquide au-dessus du niveau inférieur. L'avantage de cette disposition consiste dans les facilités qu'elle procure pour les réparations. Il suffit, à cet égard, de fermer la vanne en laissant tout passer au déversoir, et l'on peut alors aborder la turbine par dessus et par dessous.

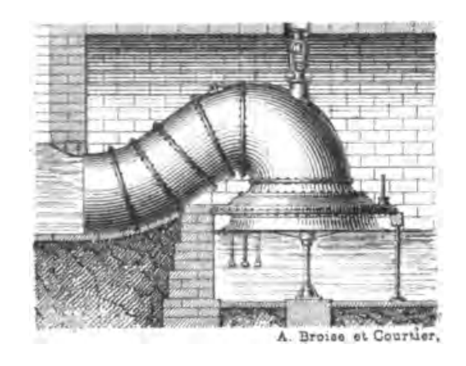


Fig. 130. — Turbine à siphon (éléavtion).

Le *type à siphon* [2] est destiné, avec les très faibles chutes, à re-

[1] Léauté. Sur un perfectionnement applicable à la turbine Jonval (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 9 avril 1883, p. 1031).

[2] Girard. *Réalisation de très grands siphons*. — Armengaud. Turbine de Noisiel (*Publication industrielle*, t. XXII). — Oppermann. Turbine de Genève (*Portefeuille des machines*, 1872).

lever l'eau pour en améliorer la distribution (fig. 130). C'est encore une disposition qui, comme les précédentes, ne saurait théoriquement ajouter ni perdre quant à la hauteur motrice effective. Elle permet seulement d'utiliser des chutes excessivement réduites, telles que 0m,30.

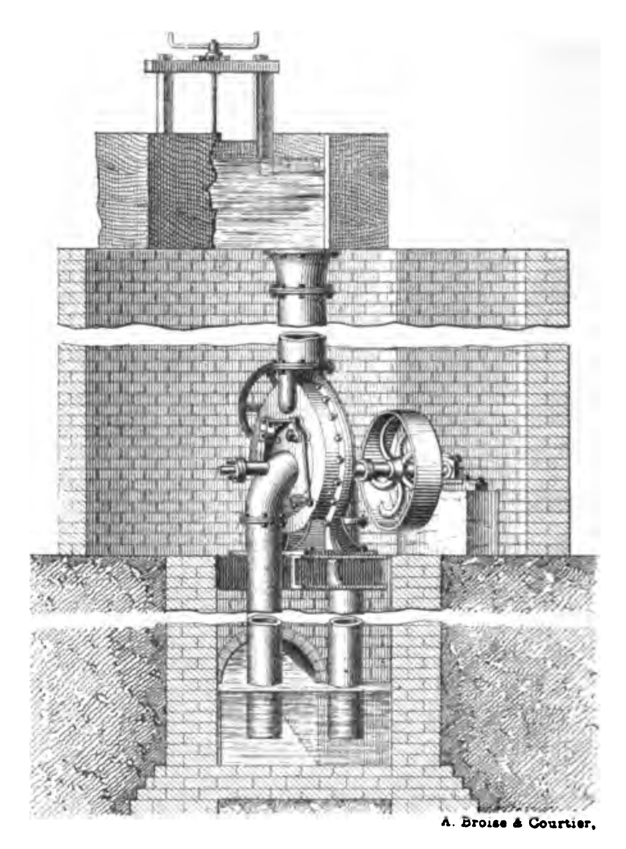


Fig. 131. — Turbine Thomson à axe horizontal (élévation).

Le *type à sous-pression* de Cadiat [1] admet l'eau en charge sous une cuvette renversée, dans le but de soulager les supports par cette pression ascendante. On a employé, dans le même ordre d'idées, un effet dynamique de refoulement, en prélevant la puissance nécessaire sur celle du récepteur; ou, inversement, une succion

[1] Armengaud. *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 302.

ou dépression exercée au-dessus de la surface supérieure. Un résultat analogue se trouve encore réalisé dans la turbine Nagel et Kaemp [1], dont l'admission se fait par-dessous, de manière à alléger le pivot. Ce dispositif se prête, en même temps, à l'utilisation de chutes aussi minimes que l'on voudra. On est ainsi descendu jusqu'à $0^m,15$.

Le *type à axe horizontal* (fig. 131), le *type à axe incliné*, rarement employés, l'ont été cependant quelquefois, en vue de convenances spéciales pour la transmission du mouvement [2]. La *roue-hélice* de Girard, installée dans ces conditions à l'usine de Noisiel, a 6 mètres de diamètre, 1 mètre de chute, une vitesse de 15 tours par minute et une force de 180 chevaux [3].

§ 4

VANNAGE

196 — *Généralités.* — Il serait impossible de régler avec précision le régime d'une turbine, si l'on ne possédait un moyen d'y tenir compte des variations qu'éprouve le débit du cours d'eau. C'est ce que l'on appelle le *vannage*, et il en existe plusieurs sortes [4].

L'équation de continuité :

$$Q = \Omega v,$$

lorsque le premier membre vient à changer de valeur, exige que l'un au moins des facteurs Ω ou v se modifie corrélativement. Il est

(1) Richard (*la Lumière électrique*, 1883, p. 434).

(2) Girard (*Turbine à axe horizontal et à libre déviation*, 1863). — Turbine Bell (*la Nature*, 1883, p. 83). — Meunier (*Portefeuille économique des machines*, 2e série, t. VIII, p. 150).

(3) Richard (*la Lumière électrique*, janvier 1883, p. 43). — Oppermann (*Portefeuille des machines*, 1858 et 1868).

(4) La plupart du temps, le vannage est manœuvré à la main. S'il prend beaucoup d'importance et exige trop de force, on le commande au moyen d'une petite turbine spéciale, que l'on engage au moment voulu.

inutile, pour plus de simplicité, de les faire varier à la fois tous les deux. Or nous avons tout intérêt à laisser v constant. En effet, le bon fonctionnement de l'appareil réclamera, comme nous en avons eu déjà tant d'exemples ([1]), une certaine vitesse spéciale que la théorie nous fera connaître. C'est, par suite, le facteur Ω qu'il convient, de préférence à v, de rendre variable à volonté; c'est-à-dire la section *totale* offerte à l'écoulement du cours d'eau.

Ceci même peut se faire suivant deux modes distincts. On peut donner au distributeur, soit un nombre constant d'orifices variables, soit un nombre variable d'orifices constants. Avec le premier système, le vannage s'abaisse dans son ensemble, de manière à diminuer à volonté la section vive de toutes les aubes également. Pour l'autre, des organes indépendants ouvrent *en grand*, ou ferment *complètement*, un nombre arbitraire de ces orifices. Ce nombre est toujours pair; car on s'attache, en vue de conserver la symétrie de la distribution, à procéder par couples d'aubes diamétralement opposées.

Il est facile de comprendre que ce dernier mode est préférable au précédent. En effet, une fois que l'un de ces débouchés a été constitué suivant toutes les règles, au point de vue de son meilleur fonctionnement, il agit ou il cesse d'agir, mais, quand il fonctionne, c'est toujours dans les mêmes conditions. Au contraire, avec le premier système, les orifices sont dénaturés par le jeu variable du vannage, et les relations que l'on s'était attaché à établir entre leurs éléments se trouvent complètement troublées. Il se développe notamment, dans les anfractuosités ainsi produites, des remous qui déterminent une déperdition importante de force vive.

Pour ces motifs, on tend de plus en plus à s'en tenir aux vannes indépendantes; mais alors une dernière précaution est encore nécessaire, pour conserver à ce système ses qualités, lorsque le récepteur doit être installé au-dessous du plan d'eau inférieur. Si, en effet, il se trouve directement noyé au sein de l'eau du bief, il se produit dans ce milieu un trouble très fâcheux. Au moment où une aube ouverte est amenée par la rotation dans un certain plan méridien,

([1]) Voy. les équations 77, 82, 87, 91, 95.

l'écoulement refoule le liquide environnant, et détermine un courant dans cette direction. Une aube fermée venant à lui succéder, l'alimentation cesse brusquement. Le liquide déjà en mouvement tendrait à s'éloigner encore en raison de la vitesse acquise; mais il sera promptement ramené en arrière par le jeu des pressions, et tout juste pour recevoir le choc d'un nouveau jet fourni par une aube libre, que la rotation amène dans le plan en question. De là une extrême agitation et un ensemble tumultueux de mouvements désordonnés, absolument contraires à un bon régime. Si l'on suppose, au contraire, que le fonctionnement ait lieu dans l'air, il s'y produira assurément des effets du même genre, mais ils n'affecteront qu'un fluide d'une densité incomparablement moindre, et d'une constitution élastique, de telle sorte que, pour cette double raison, les chocs y perdront toute importance. La conclusion qui ressort de ces explications est donc que le système des vannes indépendantes, pour les turbines noyées, exige, comme corollaire indispensable, leur *hydropneumatisation* (n° 195).

197 — *Moyens d'exécution.* — Arrivons maintenant aux moyens mis en œuvre pour la réalisation des principes précédents.

Dans le système du vannage unique, on gouverne, à l'aide

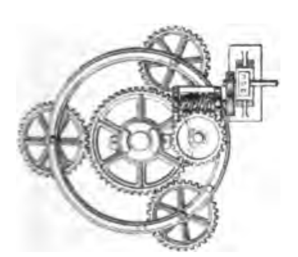


Fig. 132.
Vannage à engrenages (plan horizontal).

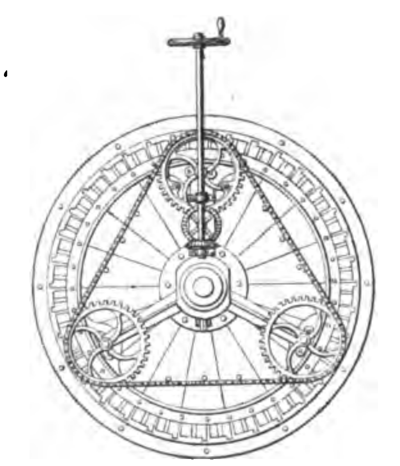


Fig. 133. Vannage à chaîne (plan horizontal).

d'une manivelle, un pignon qui commande une roue dentée (fig. 132) ou une chaîne de Gall (fig. 133), et, par leur intermédiaire,

deux autres pignons identiques au premier, et disposés avec lui aux trois sommets d'un triangle équilatéral. Leurs centres sont taraudés en forme d'écrous, dans lesquels s'engagent trois tiges filetées qui supportent une couronne horizontale. A celle-ci s'adaptent, en nombre égal à celui des aubes, des tringles verticales munies chacune d'une vanne à talon (fig. 117, 118) (¹).

198 — Comme intermédiaire entre les deux principes, on peut citer la turbine triple de Fourneyron. Elle comprend trois compar-

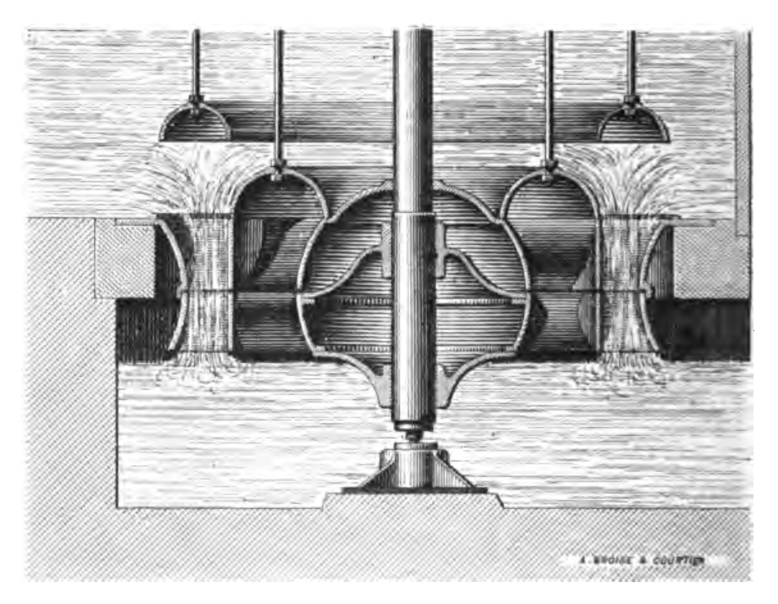


Fig. 134. — Vannage André de Thann.

timents distincts séparés par des cloisons horizontales. On abaisse alors le vannage de manière à en déboucher *intégralement* un, deux ou trois.

Un principe analogue a été appliqué par M. André de Thann à la turbine Fontaine (²), en la cloisonnant en deux travées au moyen

(¹) On peut employer de même, pour la turbine Fourneyron, le vannage à papillon Béthouard et Brault, et, pour la turbine Fontaine, le système analogue de M. Schabever (Léauté, *Génie civil*, t. V, p. 157).

(²) Armengaud, *Traité des moteurs hydrauliques*, p. 423.

d'un cylindre de révolution (fig. 134). Deux demi-tores en cuir embouti peuvent, en s'abaissant ou se soulevant indépendamment l'un de l'autre, découvrir un seul compartiment ou tous les deux à la fois.

199 — Quant au principe des vannages indépendants, il a été appliqué dans toute sa netteté à la turbine Fourneyron par M. Charles Callon. Il fournit le vannage Girard-Callon, quand on le combine avec l'hydro-pneumatisation. Une couronne circulaire (fig. 128) présente, dans sa paroi cylindrique, une double rainure destinée à agir simultanément sur les aubes diamétralement opposées. Ces rainures ont la forme de cercles de section droite, raccordés l'un à l'autre par une pente hélicoïdale. On y engage les galets qui servent à guider la partie supérieure des tringles. Si l'on tourne cette couronne autour de son axe dans un sens ou dans l'autre, on force un certain nombre de ces couples de galets à monter ou à descendre le long des raccordements inclinés. Cette manœuvre élève ou abaisse les tringles correspondantes, d'une hauteur égale à celle des aubes.

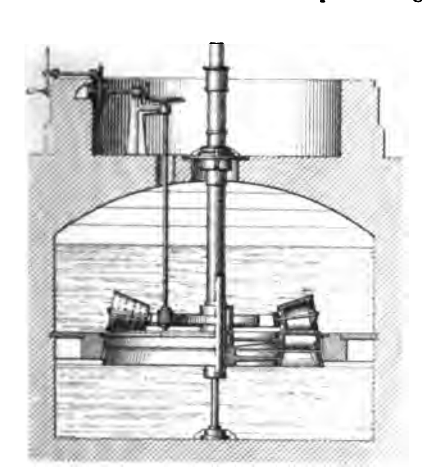


Fig. 135. — Vannage à bandes de cuir (coupe verticale).



Fig. 136. Vannage à bandes de cuir (plan horizontal).

Pour la turbine Fontaine, on a réalisé le même principe d'une manière différente (fig. 135, 136). On enroule, ou l'on déroule deux bandes de cuir hémi-circulaires, pour découvrir ou refermer un certain nombre d'aubes. A cet effet, un axe vertical porte deux bras diamétralement opposés, auxquels sont adaptés des rouleaux tronc-

coniques, qui ont leurs sommets sur l'axe de rotation, de manière à se mouvoir par simple roulement, en se chargeant ou se dégageant des bandes de cuir.

Le vannage Brenier atteint encore, d'une autre manière, le même résultat [1]. Le liquide arrive par la conduite A (fig. 137) dans le puits B, et, à travers les distributeurs C, dans la turbine D. Les

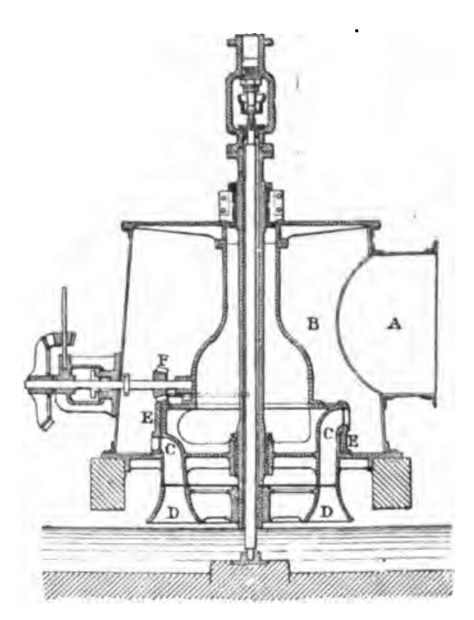


Fig. 137. — Vannage Brenier.

distributeurs diamétralement opposés ont leurs embouchures à des niveaux différents, qui règnent chacun sur une demi-circonférence. Les parties correspondantes d'un tiroir circulaire E peuvent, par leur rotation, en fermer ou en découvrir un nombre arbitraire, au moyen de la roue d'angle F, qui est actionnée, au moment convenable, par l'arbre tournant G.

Girard a établi un dernier mode de vannage de la turbine Fontaine [2], au moyen de tiroirs distincts (fig. 138), qui ferment ou découvrent chacun une portion de la circonférence, lorsqu'on les

(1) *Revue industrielle*, 19 décembre 1883, p. 501.
(2) A. Picard. *Alimentation du canal de la Marne au Rhin et au canal de l'Est.*

fait mouvoir suivant leurs rayons respectifs. Cette manœuvre s'effectue au moyen de bielles et de tiroirs à bascule, que le méca-

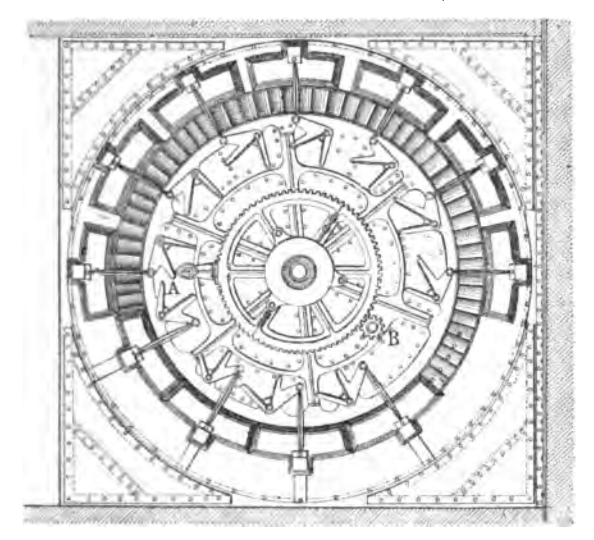


Fig. 138. — Vannage Girard (plan horizontal).

nicien efface en nombre variable au moyen d'une pointe A, fixée à la roue d'engrenages qu'il manœuvre à l'aide du pignon B.

§ 5

THÉORIE DES TURBINES

200 — Représentons en MM_1 (fig. 139) la trajectoire que décrit un filet liquide à l'intérieur de la turbine. Y désignera la différence de niveau de ses deux extrémités; y et y_1 leurs profondeurs respectives au-dessous des deux biefs d'amont et d'aval [1]. On aura, d'après cela, pour exprimer la hauteur de chute :

$$H = Y + y - y_1. \tag{96}$$

[1] Pour fixer les idées, nous avons supposé la turbine noyée. Si elle était, au contraire, établie au-dessus du bief inférieur, il suffirait, sans rien changer au développement du calcul, d'attribuer à y_1 une valeur négative.

Cet élément fondamental présente, pour les turbines, une élasticité qui est caractéristique de ce genre de récepteurs, et qui constitue l'un de leurs avantages les plus marqués. Nous l'avons vue déjà (n° 195) s'abaisser jusqu'à $0^m,15$. Elle peut, inversement,

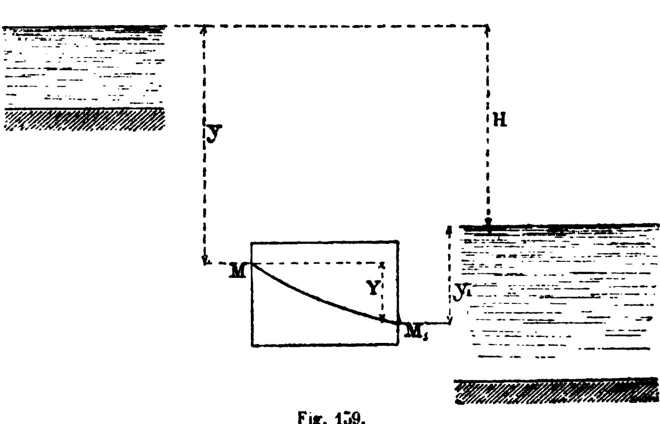


Fig. 139.

atteindre des centaines de mètres [1]. Cette propriété est de nature à permettre, pour les mines qui possèdent des galeries d'écoulement, l'utilisation d'énormes hauteurs de chute, au moyen de conduites installées dans les puits.

Nous pouvons admettre, en toute rigueur, dans la relation (75) :

$$\Upsilon = 0.$$

Le parcours intérieur doit, en effet, être absolument continu et ne présenter aucun changement brusque. En outre, nous nous imposerons la condition de recevoir, à l'entrée, la vitesse relative exactement suivant le premier élément de l'aube, c'est-à-dire sans choc.

201 — Pour compléter l'application de la formule générale (75), il nous reste à déterminer la valeur de v_1. Dans ce but, nous suivrons par la pensée le mouvement de l'eau depuis le bief d'amont

(1) 108 mètres à Saint-Blaise, dans la forêt Noire; 180 mètres à Airolo, pour le percement du Saint-Gothard; 181 mètres à Irmenstadt (*Deutscher Ingenieure*, 1882, p. 301); 300 mètres sur les bords du lac Majeur (*la Lumière électrique*, t. XIV, p. 450).

jusqu'au bief d'aval, au moyen de quatre opérations distinctes. Nous appliquerons, en premier lieu, au mouvement absolu, le théorème de Bernoulli du bief supérieur au point d'entrée M, afin de déterminer la vitesse absolue v. En second lieu, nous opérerons en ce point, au moyen d'un parallélogramme, la transformation de la vitesse absolue v en vitesse relative w. Nous écrirons alors le théorème de Bernoulli pour le mouvement relatif qui s'opère, dans l'intérieur de la roue, le long de la courbe MM_1, et nous obtiendrons ainsi la vitesse relative w_1 au point de sortie M_1. Enfin nous reconstituerons, à l'aide d'un nouveau parallélogramme, la vitesse absolue v_1 en fonction de w_1. Développons ces calculs.

Le théorème de Bernoulli, appliqué depuis le bief stagnant jusqu'au débouché du distributeur en M, donne (éq. 16, p. 47) :

$$(97) \qquad v^2 = 2g\left(y + \frac{p_a - p}{\varpi}\right),$$

en désignant par p_a la pression atmosphérique, et par p celle qui se produit en M.

Le parallélogramme des vitesses (fig. 140) nous fournit la relation :

$$(98) \qquad w^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\alpha,$$

en appelant α l'angle sous lequel les contre-aubes du distributeur rencontrent la circonférence.

Pour formuler, dans le mouvement relatif, le théorème de Bernoulli (éq. 14, p. 33), nous prendrons pour plan de comparaison celui du point M_1 (fig. 139). Les altitudes seront, aux points M et M_1 : Y et zéro; les vitesses relatives w et w_1; les vitesses d'entraînement u et u_1; enfin les pressions p et $p_a + \varpi y$. Il est, en effet, permis d'admettre en M_1 le régime hydrostatique, en raison de la lenteur des mouvements qui s'opèrent dans le bief d'aval (n° 22); car notre objectif est précisément d'y réduire la vitesse v_1 autant que possible (p. 221). L'équation de Bernoulli sera, dans ces conditions :

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + Y = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_a + \varpi y_1}{\varpi},$$

et elle peut être mise sous la forme suivante :

$$(99) \qquad w_1^2 - w^2 - u_1^2 + u^2 = 2g\left(\frac{p - p_a}{\varpi} + Y - y_1\right).$$

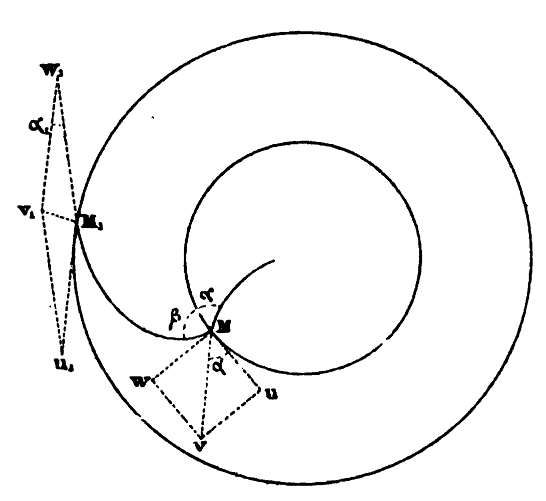


Fig. 140.

Nous aurons enfin, dans le parallélogramme des vitesses du point de sortie :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= w_1^2 + u_1^2 - 2u_1 w_1 \cos \alpha_1 \\ &= (u_1 - w_1)^2 + 2u_1 w_1 (1 - \cos \alpha_1) \\ &= (u_1 - w_1)^2 + 4u_1 w_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}. \end{aligned}$$

La somme de ces deux termes essentiellement positifs ne peut s'annuler que si chacun d'eux s'évanouit séparément. En ce qui concerne le premier, rien ne s'oppose à ce que l'on pose, dans ce but :

$$(100) \qquad u_1 = w_1,$$

ce qui réduira l'équation précédente à cette forme plus simple :

$$(101) \qquad v_1^2 = 4u_1^2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}.$$

Or u_1 ne saurait s'annuler, ni même conserver une faible valeur, car les turbines sont presque toujours animées de rotations rapides[1]. Il nous faut donc écrire, pour annuler le second terme :

$$\alpha_1 = 0.$$

Mais ceci même ne saurait avoir lieu en toute rigueur, attendu que, si les aubes étaient tangentes à la circonférence extérieure, le débouché se trouverait étranglé et l'écoulement rendu impossible. Il sera donc inévitable que α_1 conserve une valeur finie. On aura soin seulement de la réduire à ce qui est strictement exigé par le débit, comme nous le verrons tout à l'heure (éq. 107).

Actuellement, après avoir mis la formule (100) sous la forme :

$$u_1^2 - w_1^2 = 0,$$

nous ajouterons cette équation membre à membre avec les précédentes (98), (99), (101). De nombreuses réductions s'opèrent alors, et il vient, en tenant compte de l'identité (96) :

$$(102) \qquad uv \cos \alpha = gH,$$

relation très simple qui ne renferme que les éléments relatifs au point d'entrée M.

202 — Ceux du point de sortie M_1 s'y relieront par la condition que, dans un solide tournant, les vitesses de rotation des divers

(1) Parfois même vertigineuses. On est arrivé à des vitesses de 38 tours par seconde, c'est-à-dire 2300 tours par minute, ce qui représente environ 500 fois celle d'une roue à augets.

points sont entre elles dans le rapport des distances à l'axe ([1]) :

$$\frac{u}{u_1} = \frac{r}{r_1},$$

ou, si l'on veut :

$$u_1 r = u r_1. \tag{103}$$

Il reste, en outre, à exprimer que le liquide entre, en M, à plein tuyau, et sort de même en M_1, sans laisser de place aux remous. Appelons, à cet effet, N le nombre des aubes. Chacune d'elles occupera, sur la circonférence intérieure, un arc $\frac{2\pi r}{N}$. Elle livre donc passage à un courant dont la largeur s'évaluera, comme ci-dessus (n° 185, fig. 109), par $\frac{2\pi r}{N}\sin\alpha$. Si a désigne la dimension de la roue dans le sens perpendiculaire à son plan, la section de la veine liquide aura pour valeur $\frac{2\pi r \sin\alpha}{N}\,a$, et enfin le débit qui s'y établit sera :

$$\frac{2\pi a r \sin\alpha}{N}\,v.$$

Si, d'un autre côté, l'on imagine qu'un observateur participant à la rotation de la turbine exécute, pour le mouvement *relatif* et au point de sortie, un jaugeage analogue, il obtiendra de même, en se servant, pour cela, de la vitesse relative de ce point, la valeur suivante :

$$\frac{2\pi a_1 r_1 \sin\alpha_1}{N}\,w_1. \tag{104}$$

Mais ces deux observations doivent nécessairement donner le même résultat. Nous pouvons donc poser :

([1]) En général, le rapport des rayons varie, dans les turbines, entre 1,25 et 1,50.

$$(105) \qquad a_1 r_1 w_1 \sin \alpha_1 = arv \sin \alpha.$$

Multiplions maintenant membre à membre les équations (102), (103), (105), en tenant compte des réductions qui s'opèrent. Il viendra par là :

$$a_1 u_1^2 \cos \alpha \sin \alpha_1 = gHa \sin \alpha,$$

et l'on en déduit :

$$(106) \qquad u_1^2 = \frac{a}{a_1} \frac{\tang \alpha}{\sin \alpha_1} gH.$$

Cette relation exprime, en fonction de la hauteur de chute et de divers éléments de la turbine, la meilleure vitesse à la jante que l'on puisse imprimer à ce récepteur. Sous ce rapport, la pratique a mis en évidence une propriété précieuse de ces appareils, de nature à expliquer le grand essor qu'a pris leur emploi. Le rendement n'est, en effet, que peu altéré par des variations assez étendues de l'allure, aux environs de celle qui correspond au maximum d'effet utile (éq. 106), lors même que cet écart dût atteindre la proportion d'un quart en plus ou en moins.

203 — Le débit sera (éq. 104) pour les N aubes réunies :

$$Q = 2\pi a_1 r_1 w_1 \sin \alpha_1.$$

Mais w_1 ne diffère pas de u_1 (éq. 100), et, si nous lui substituons la valeur (106), il vient :

$$Q = 2\pi a_1 r_1 \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{a}{a_1} \frac{\tang \alpha}{\sin \alpha_1} gH},$$

ou encore :

$$(107) \qquad Q = 2\pi r_1 \sqrt{aa_1 gH \tang \alpha \sin \alpha_1}.$$

De là une relation nécessaire entre les éléments de la turbine et ceux Q, H de la chute à laquelle on la destine. On peut arriver avec ces appareils à dépenser, sous un volume restreint, des débits considérables, dépassant au besoin 4 mètres cubes par seconde.

204 — Il est encore important de déterminer la pression p qui se trouve développée dans le joint du récepteur au distributeur. A cet effet, nous multiplierons encore les mêmes équations (102), (103), (105), mais après avoir renversé les deux membres de cette dernière. Il vient ainsi :

$$(108) \qquad v^2 = 2gH \frac{a_1}{a} \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin \alpha_1}{\sin 2\alpha},$$

et, en substituant cette valeur dans la relation (97) :

$$(109) \qquad \frac{p_a - p}{\varpi} = H \frac{a_1}{a} \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin \alpha_1}{\sin 2\alpha} - y.$$

On ne saurait naturellement établir entre ces deux organes un joint étanche à frottement. Il est, au contraire, à propos d'y laisser un faible jeu. Pour éviter, dès lors, qu'il ne donne issue à des filtrations fâcheuses de liquide, il conviendra de réaliser, au moins approximativement, l'égalité de pression au dedans et au dehors. Mais, à l'extérieur, elle a pour valeur $p_a + \varpi (y - H)$. Nous aurons donc à nous imposer la condition :

$$\frac{p_a - p}{\varpi} = H - y,$$

c'est-à-dire [1] :

$$(110) \qquad \frac{a_1}{a} \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin \alpha_1}{\sin 2\alpha} = 1.$$

[1] Si la turbine fonctionne dans l'air, on devra prendre $p = p_a$. En même temps y diffère peu de H, en lui restant inférieur. On le représentera donc par une fraction

205 — Après avoir ainsi évité les indécisions de l'introduction de l'eau, qui résulteraient de fuites ou de rentrées, il faut encore obtenir que l'insertion de la veine se fasse avec précision et sans choc, c'est-à-dire que l'aube mobile ait une inclinaison β, en raison de laquelle elle se présente dans la direction même de la vitesse relative.

Le parallélogramme des vitesses nous donne, à cet égard, au point M (fig. 140) :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}.$$

On déduit d'ailleurs de l'équation (102) :

$$\frac{u}{v} = \frac{gH}{v^2 \cos\alpha},$$

ou, d'après (108) :

$$\frac{u}{v} = \frac{ar^2 \sin\alpha}{a_1 r_1^2 \sin\alpha_1}.$$

De là l'égalité :

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} = \frac{ar^2 \sin\alpha}{a_1 r_1^2 \sin\alpha_1}.$$

On peut encore lui donner, à l'aide de la relation (110), cette forme plus simple :

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} = \frac{1}{2\cos\alpha},$$

connue de H, et, dans ces conditions, l'équation (109) conduira à une relation toute semblable à (110), avec cette différence toutefois que l'unité qui forme le second membre de cette dernière égalité, se trouvera remplacée par la fraction en question. Il sera donc bien essentiel de ne pas oublier que l'on ne verra plus alors se dérouler les conséquences de l'équation (110), et notamment qu'il n'y aura plus lieu d'invoquer la formule (111).

ou, en développant :

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta + (2 \cos^2 \alpha - 1) \sin \beta = 0,$$

$$\sin 2\alpha \cos \beta + \cos 2\alpha \sin \beta = 0,$$

$$\sin (2\alpha + \beta) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(111) \qquad 2\alpha + \beta = 180^\circ.$$

206 — Occupons-nous enfin de former l'expression (76) du rendement λ. Il vient pour cela, en remettant, dans l'expression (101), la valeur (106) de u_1 :

$$v_1^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \cdot \frac{a}{a_1} \frac{\operatorname{tang} \alpha}{2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}} g\mathrm{H}.$$

On en déduit :

$$\frac{v_1^2}{2g\mathrm{H}} = \frac{a}{a_1} \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2},$$

et, par suite :

$$(112) \qquad \lambda = 1 - \frac{a}{a_1} \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{PH}}.$$

On voit par là qu'il est avantageux d'évaser les turbines, c'est-à-dire de prendre, dans le sens perpendiculaire à la roue : $a_1 > a$. Cependant cet artifice ne saurait être poussé bien loin, sous peine d'amener, par un épanouissement trop prononcé sur un aussi faible parcours, le dégorgement et la production de remous (n° 65). En général, l'évasement $a_1 - a$ ne dépasse pas le dixième de la longueur des aubes.

On reconnait également combien il sera utile de restreindre les angles α et α_1 dans les limites convenables. On sera d'ailleurs dirigé, à cet égard, par la nécessité de satisfaire à la condition (107), et

surtout à l'équation (109), car la pression p deviendrait négative, si α se rapprochait par trop de zéro ou d'un angle droit. Ordinairement, l'inclinaison α des contre-aubes du distributeur est de 33 à 35 degrés, et celle α_1 des aubes réceptrices, à la sortie, de 15 à 20 degrés.

Pratiquement, le rendement d'une turbine bien établie doit être au moins de 0,70; il peut même dépasser 0,80 (n°s 190 à 194). M. Bernard Lehmann, dans une série méthodique d'essais exécutés sur 36 récepteurs [1], a indiqué respectivement les rendements moyens 0,82; 0,77; 0,82 pour les trois catégories de turbines cylindriques, centrifuges, ou centripètes.

Rappelons qu'indépendamment d'un effet utile aussi avantageux, ces moteurs se recommandent encore par leur faible volume (n° 203), par l'élasticité que comporte la vitesse de régime (n° 202), par la facilité de leur application aux chutes les plus basses comme aux plus élevées (n° 200), et enfin par la faculté de fonctionner sous la glace en hiver (n° 195).

207 — Lorsqu'il s'agit d'établir *a priori* un projet de turbine, le problème reste indéterminé. Il admet, en effet, les données Q et H, et deux classes d'inconnues que nous pouvons appeler *géométriques* et *dynamiques*. Le premier groupe comprend les sept quantités a, a_1, r, r_1, α, α_1, β; la seconde, ces sept autres éléments : u, u_1, v, v_1, w, w_1, p. Or nous ne possédons entre les inconnues géométriques que les trois relations (107), (110), (111) [2]. Toutes les autres renferment, en même temps que ces dernières, des éléments dynamiques.

On commencera donc par se donner arbitrairement quatre des inconnues géométriques, et l'on en déduira les trois autres. Cela posé, l'on déterminera le rendement λ par la formule (112), et la vitesse de régime $\frac{u_1}{r_1}$ d'après la relation (106), ce qui pourra suffire dans la plupart des cas. Si l'on veut cependant compléter la réso-

[1] *Deutscher Ingenieure*, XXIII, 31.

[2] Réserve faite de l'observation relative aux turbines installées dans l'air (n° 204, note 1).

lution du problème, on déduira u de l'équation (103), maintenant que l'on possède la valeur de u_1; v_1 de la relation (101); et v de l'égalité (108). La formule (100) fera connaître w_1, et (98) w. Quant à la pression p, elle sera déterminée, d'après l'équation (109), en fonction d'une cinquième arbitraire géométrique y, correspondant au mode d'emplacement qui aura été adopté.

CHAPITRE XI

MACHINES A COLONNE D'EAU

—

§ 1

GÉNÉRALITÉS

208 — Le principe des récepteurs hydrauliques à piston, dans lesquels la rotation disparaît pour faire place à la translation rectiligne et alternative, se trouve réalisé d'une manière magistrale dans une catégorie célèbre de moteurs, connus sous le nom de *machines à colonne d'eau* (¹). Nous leur consacrerons, en raison de leur importance, la totalité de ce chapitre, en réservant le suivant pour les autres catégories d'appareils à translation (²).

La machine à colonne d'eau peut être définie d'un seul mot, en disant qu'elle est l'inverse d'une pompe (³). L'eau descend du bief supérieur dans le bief d'aval, en passant par un cylindre muni

(¹) *Wassersaulemaschine*.

(²) L'emploi de la translation alternative ne se prêterait évidemment pas à celui du choc, ou du principe de la réaction (nº 151). Les récepteurs de cette classe sont donc essentiellement des moteurs à poids.

(³) Ce point de vue est susceptible de généralisation. L'on peut dire, d'une manière abstraite, et sauf les difficultés d'exécution, qu'un certain nombre, au moins, de mécanismes propres à jouer le rôle de moteur hydraulique sont capables de fonctionner sous trois formes différentes : comme récepteur, comme élévateur, ou comme propulseur.

Admettons, en effet, que l'eau actionne par son poids un système affecté à surmonter une résistance industrielle. Si cette force antagoniste vient à se transformer en une puissance motrice, sous l'empire d'un agent distinct, par exemple d'une machine à vapeur, elle fera mouvoir l'appareil en sens contraire, et le liquide, au lieu de descendre en recueillant l'action motrice de la gravité, se trouvera remonté à un niveau supé-

d'un distributeur, qui le met successivement en communication avec les eaux motrices d'amont, ou celles du canal de fuite. Un piston s'y meut tour à tour dans les deux sens, sous cette influence alternative.

La hauteur de chute peut, avec ce récepteur, devenir aussi grande que l'on voudra, car l'eau est amenée au moyen de tuyaux qui tiennent peu de place, et peuvent se disposer en colonne dans les puits des mines pourvues d'une galerie d'écoulement ([1]). Dans ce cas, il convient d'installer la machine en contre-bas de cette galerie ([2]), afin que la résistance que l'on aura à vaincre pour relever, à ce niveau, le liquide qui a traversé l'appareil, vienne, comme un frein, amortir la force vive considérable ([3]) due à la descente de l'attirail des pompes que le moteur est ordinairement destiné à commander. Il est inutile de faire observer que ce mode d'installation ne saurait théoriquement modifier la hauteur de chute (n° 195), et qu'il ne pourra exercer d'influence effective à cet égard que par un supplément de résistances passives mises en jeu.

rieur malgré la pesanteur, alors transformée en résistance à vaincre. On obtiendra, dans ces conditions, un *élévateur*.

Cela posé, remarquons que l'on ne saurait surmonter cette résistance sans transmettre aux parties fixes de la machine, telles que les paliers des arbres tournants, par exemple, certains efforts qui devront être détruits par la fixité de ces organes. Mais si nous imaginons, au contraire, que l'on mette ces appuis en liberté, en les installant sur un flotteur, ils obéiront, dans ce cas, à la réaction qu'ils subissent, et à laquelle rien ne s'oppose plus. Le système éprouvera donc un mouvement de recul, auquel participera le navire sur lequel il est installé. L'appareil se trouvera ainsi transformé en un *propulseur*.

Pour éclaircir ces idées par un exemple, considérons une roue de côté radiale. Lorsque l'eau descend avec les palettes, on obtient, comme ci-dessus, un récepteur. Si l'on actionne le système en sens contraire, au moyen d'un moteur distinct, il devient la roue élévatoire à palettes. Si enfin le moteur et l'axe de rotation sont installés sur un bateau, on réalise un propulseur : la roue à aubes.

Il en sera encore de même, en remplaçant l'eau par l'air atmosphérique. Une même roue, quand on l'expose à un courant aérien, fournit un récepteur : le moulin à vent; et, si on l'actionne artificiellement autour d'un axe fixe, à l'aide d'une machine à vapeur : un ventilateur de mines. Si enfin cet axe est porté par un ballon libre, on réalise le propulseur le plus ordinaire de l'aéronautique.

([1]) Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. I, p. 774 ; t. II, p. 249.

([2]) Dans le puits Marie de Clausthal (Hartz), la chute motrice est de 358 mètres, et la machine se trouve placée à 234 mètres en contre-bas, ce qui porte la pression statique à laquelle ont à résister les organes, au chiffre colossal de 592 mètres d'eau, ou environ 60 atmosphères.

([3]) Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 287.

Afin de réduire la valeur de v_1, dans 'application de la formule générale (75), on donne au tuyau d'évacuation un grand diamètre. On prend la même précaution pour celui d'amenée, en vue des frottements (n° 76). L'on s'attache en outre à obtenir, pour le parcours, la plus grande continuité possible, afin de réduire de même le terme Υ. Dans ces conditions, l'on peut obtenir un rendement de $0^m,65$ et même $0^m,75$.

209 — La machine à colonne d'eau peut être à *simple* (¹) ou à *double effet* (²). Dans le premier cas, l'eau motrice agit seulement sous le piston, qu'elle remonte dans un corps de pompe vertical, où la pesanteur agit seule ensuite pour le ramener en sens contraire. Avec la machine à double effet, la pression agit alternativement, et d'une manière identique, sur les deux faces d'un piston, mobile dans un cylindre horizontal. La tige motrice peut alors actionner un arbre tournant, à l'aide d'une bielle et d'une manivelle.

On distingue, à un autre point de vue, les machines *simples* et les machines *jumelles*. Ces dernières forment des systèmes complexes constitués par la réunion de plusieurs machines simples. On arrive, de cette manière, à diminuer l'irrégularité inhérente à chacune de ces dernières, en entrecroisant leurs diverses phases.

Les machines jumelles peuvent, aussi bien que les machines simples, être à simple ou à double effet. Avec le premier mode, deux machines simples à simple effet actionnent à la fois les bras d'un balancier, en fonctionnant à des phases directement inverses l'une de l'autre. Le moment de rotation se renverse ainsi continuellement, de l'un des bras sur l'autre. Dans le second cas, deux machines simples à double effet attaquent ensemble un arbre tour-

(¹) La machine à colonne d'eau à simple effet a été imaginée, en 1731, par Denisard et de la Deuille (*Recueil de machines* approuvées par l'Académie des sciences, t. V. — Bélidor. *Architecture hydraulique*, 1730). Elle a été imitée en Hongrie par Höll dix ans plus tard, et s'est ensuite répandue en Allemagne. Elle a été enfin réintroduite en France, dans les mines de Huelgoat (Finistère), par Juncker, inspecteur général des mines (*Annales des mines*, 1838).

(²) La machine à colonne d'eau à double effet a été construite, pour la première fois, à Rosenheim (Bavière) par M. de Reichenbach. Elle a été introduite en France par M. Pfetsch aux mines de Varangéville (Meurthe-et-Moselle) (*Annales des mines*, 5ᵉ série, t. XVII, p. 411).

nant, au moyen de manivelles calées à angle droit, afin de croiser les inégalités de leur fonctionnement, et de supprimer l'influence des points morts sur le démarrage.

§ 2

MACHINES SIMPLES A SIMPLE EFFET

210 — Un cylindre A (fig. 141 et 142) est mis en relation avec

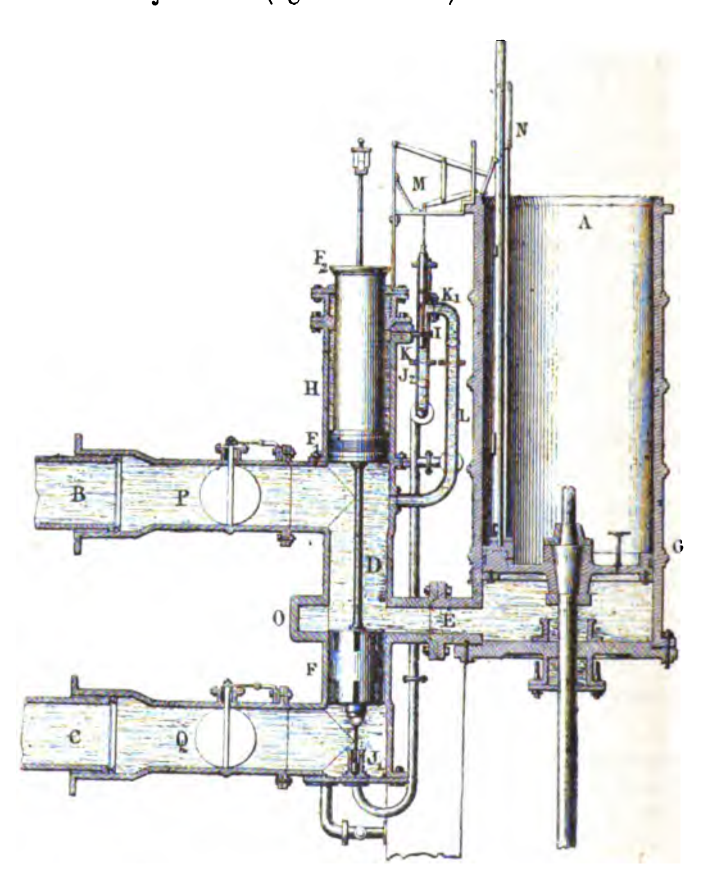


Fig. 141. — Machine à colonne d'eau à simple effet (phase ascendante).

la conduite d'amenée B et le tuyau de fuite C, à l'aide d'une tubulure verticale D et d'un branchement E. Suivant que l'obturateur

occupera les positions F (fig. 141), ou F′ (fig. 142), le piston G se trouvera soumis à la pression d'amont ou à celle d'aval. Il montera dans le premier cas, et, dans le second, il redescendra par son poids. La question se réduit donc à manœuvrer cet obturateur, aux instants pour lesquels le piston G parvient aux extrémités de sa course, de manière à le ramener de F en F′ lorsque G arrive en haut, et de F′ en F quand ce dernier revient au pied du cylindre.

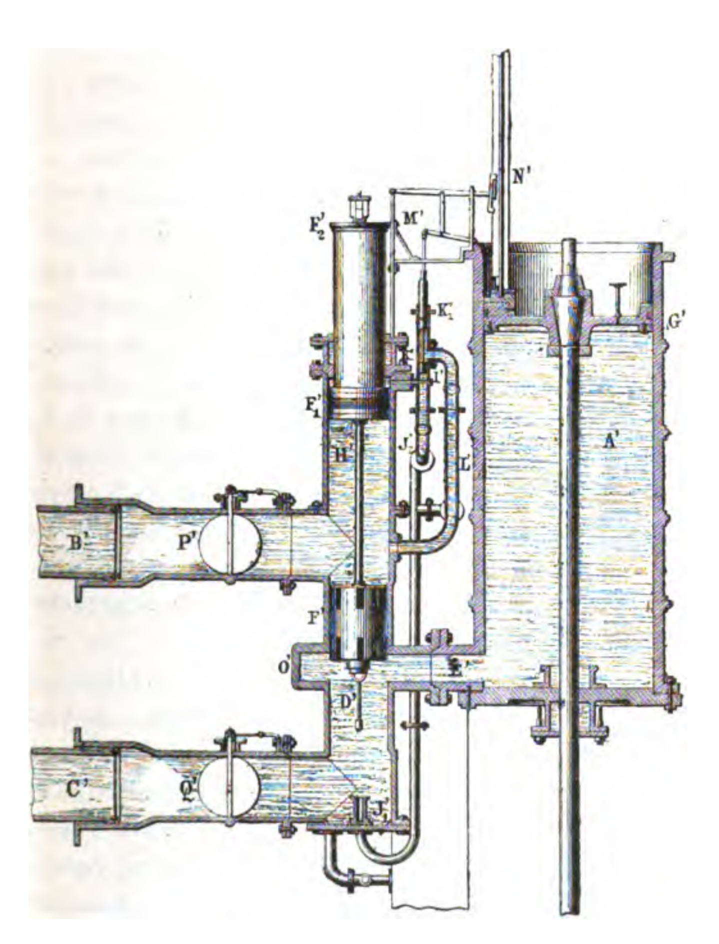


Fig. 142. — Machine à colonne d'eau à simple effet (phase descendante).

S'il fallait, dans ce but, commander directement l'obturateur, on aurait, pour le remonter, à lutter contre la différence des pres-

sions qu'il supporte sur ses deux faces, laquelle est énorme, en raison de l'importance de la charge motrice et de la grande section des tuyaux (n° 208). Pour ce motif, on a pris soin de contre-balancer cet obstacle, en reliant, au *piston distributeur* F, un *contre-piston* F_1. Si celui-ci présentait exactement le même diamètre que le premier, l'ensemble FF_1 se trouverait en équilibre indifférent, sauf une très légère propension à la descente, résultant de la différence des pressions hydrostatiques aux deux niveaux F et F_1. Mais on donne à F_1 un certain excédent de diamètre, ce qui communique au système une tendance spontanée à remonter dans la position $F'F'_1$, quand il est livré à lui-même. Pour le ramener en FF_1, il deviendra donc nécessaire d'exercer une action spéciale de haut en bas.

Le moyen employé à cet effet consiste à surmonter le contre-piston F_1 d'une colonne F_2, dont le diamètre est égal à celui de F. Cet appendice traverse le fond du corps de pompe à travers une garniture étanche. Si l'eau qui remplit le cylindre H se trouve en communication avec celle du bief d'amont B, la couronne additionnelle qui a pour section la différence de celles de F_1 et de F, se trouve également pressée sur ses deux faces, et perd toute influence. Le système, ainsi dépouillé de sa tendance naturelle à remonter, obéit alors à la pesanteur qui le ramène en bas. Si, au contraire, H est remis en communication avec les eaux d'aval C, l'excédent de la pression inférieure qui s'exerce sur la couronne, détermine l'ascension de FF_1F_2. Tout se réduit donc à effectuer ce changement de communications, aux extrémités de la course du piston moteur G.

Dans ce but, l'espace H est mis en relation, par la tubulure horizontale I, avec le tube vertical J. Celui-ci débouche, en J_1, dans le tuyau de décharge. Il présente d'autre part, en J_2, une travée le long de laquelle joue un distributeur KK_1 analogue à FF_1. Il en diffère toutefois par ses dimensions très réduites, et par l'égalité absolue de ses deux pistons K et K_1. Ce corps restera donc en équilibre indifférent. La pression qui s'exerce entre K et K_1 ne varie jamais, et demeure égale à celle d'amont, transmise par le tuyau L. Lorsque le petit distributeur occupe la position KK_1, cette charge se propage, à travers la tubulure I, dans la capacité H. Si, au contraire, cet organe a été, par un moyen quelconque, ramené en $K'K'_1$ (fig. 142),

de manière que K' se trouve au-dessus de I, la pression motrice est interceptée, et l'espace H communique, à travers la tubulure I et le tube JJ_1, avec les eaux d'aval. Le changement de pression qu'il s'agissait de déterminer en H, s'obtiendra donc en amenant le petit distributeur, de KK_1 en $K'K'_1$, et réciproquement, aux extrémités de la course du piston moteur G.

On atteint directement ce résultat à l'aide d'un système de leviers et de crans, qui est représenté en M et M' sur les deux figures. Le piston G, en arrivant alternativement au sommet ou à la base, appuie, par l'intermédiaire de deux taquets montés sur sa tige N, sur ce *jeu de fer*, en le sollicitant dans un sens ou dans l'autre, et déterminant son basculement. On pourra donc, en disposant le taquet supérieur en des points variables de la tige N, opérer plus ou moins tôt ce déclanchement, et, par suite, faire varier le parcours de G, ainsi que la somme d'énergie recueillie par ce piston dans chacune de ses courses. On se trouvera ainsi en état de coordonner l'action motrice avec les variations que viendrait à subir la résistance.

211 — Il est naturel, après cette explication, de se demander pourquoi l'on n'attaque pas simplement, à l'aide du jeu de fer, un distributeur unique FF_1, identique à celui KK_1 qui commande directement ce mécanisme. Mais on se heurterait alors à un obstacle très grave. Nous avons vu, en effet (n° 208), que les diamètres des conduites doivent être importants, et, par conséquent, la masse de FF_1 considérable. Il résulterait donc d'une connexion immédiate de cet organe avec le jeu de fer, des chocs destructeurs. Au lieu de cela, le piston G ne vient heurter, en raison du dispositif précédent, qu'un mécanisme MK très léger, contre lequel le choc devient insignifiant. Quant à l'organe massif FF_1, il n'est mis en mouvement que par un jeu de pressions liquides, qui ne présente rien de brusque.

Je signalerai de même, dans cet ordre d'idées, certaines précautions qui ont été prises en vue d'adoucir encore la manœuvre. Si nous supposons, pour un instant, que F soit un cylindre métallique plein, et si nous l'envisageons au moment où il achève de franchir la tubulure D, en remontant, il supprimera instantanément l'écoulement de toute la masse liquide B, qui est en train de descendre

pour remplir le cylindre A. Comme cette colonne présente un diamètre et une hauteur considérables, il en résultera un *coup de bélier* redoutable. On a soin, afin d'éviter cet inconvénient, de pratiquer, tout autour de F, des cannelures disposées suivant des plans inclinés. De cette manière, lorsque la base supérieure de ce cylindre a franchi le bord de D, le liquide trouve encore un débouché, qui va ensuite en s'atténuant d'une manière continue, jusqu'à la fin du passage des cannelures. La veine est de plus en plus étirée, et sa force vive s'éteint progressivement.

Remarquons de même la *ceinture d'eau* O, qui environne l'obturateur F, au moment où il franchit la tubulure D. Sans cette addition, cet organe subirait, sur sa droite, la pression que les résistances impriment à l'eau du cylindre moteur A, c'est-à-dire une tension sensiblement égale à la charge d'amont qui vient d'être employée à les vaincre, laquelle est très-considérable. Le piston F pourrait donc se trouver faussé. Il en résulterait des frottements, des fuites. Avec la ceinture O, le distributeur éprouve, au contraire, cette pression sur toute sa périphérie, et l'effort résultant disparaît.

Des valves modératrices P, Q sont disposées sur les tuyaux B, C pour régulariser, ou entraver au besoin, le mouvement de l'eau. On peut, du reste, facilement arrêter la machine au moyen d'un robinet placé sur le tube L, puisque l'interruption de la pression motrice dans l'espace H supprime les alternatives d'où résultent les changements de sens du piston moteur G (1).

(1) Le dispositif des machines à colonne d'eau à simple effet comporte encore d'autres types, sur lesquels nous ne saurions nous étendre avec détails. Je citerai notamment la machine Bouderen ; la machine à tiroir Audemar (*Bulletin de la Société de l'Industrie minérale*, 2e série, t. XI, p. 923) ; le moteur-pompe Girard (Delaunay. *Cours élémentaire de mécanique*, p. 571. — Résal. *Cours de mécanique générale*, t. IV, p. 106) ; les machines Nielsen (de Trondhjem, Norwège) ; Jaspar de Liège (Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition de* 1878, groupe VI, cl. 54, p. 360) ; et la machine Cogne, dans laquelle on introduit, en fin de course, quelques bulles d'air pour amortir les chocs (Tresca. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, t. LXIX, p. 81).

§ 3

MACHINES JUMELLES A SIMPLE EFFET

212 — Deux machines identiques à la précédente attaquent, avec des phases inverses l'une de l'autre, un *balancier moteur* (fig. 143) d'où partent deux tringles A, A′, articulées sur un *balancier distributeur* B, B′. Ce dernier est solidaire avec le robinet *b* qui présente deux voies (fig. 144) C, C′, D, D′. A l'instant actuel, la communication étant ouverte entre C et D d'une part, C′ et D′ de l'autre, les eaux motrices agissent, par l'intermédiaire de D, sur la face

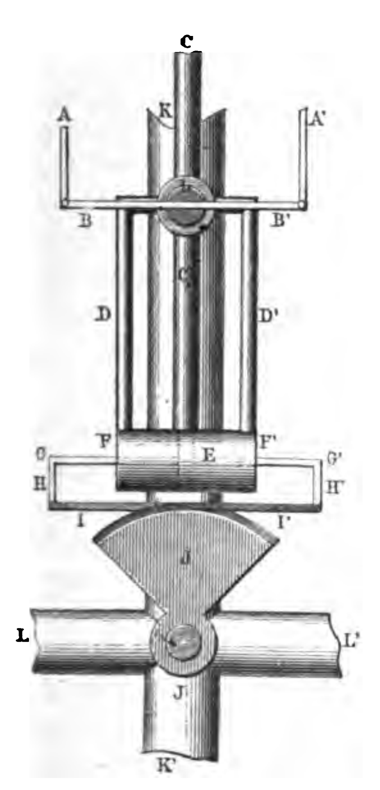


Fig. 143. — Machines jumelles à simple effet (distribution).

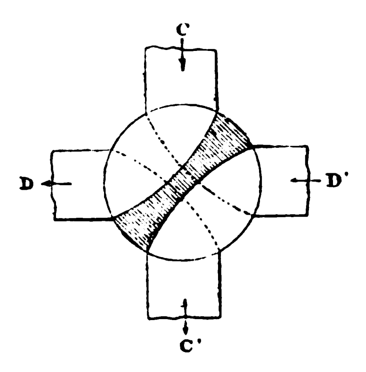


Fig. 144. — Machines jumelles à simple effet. Robinet de distribution (coupe horizontale).

gauche du *piston distributeur* E, dans l'intérieur du *cylindre distributeur* F, F′. Elles chassent donc ce piston vers la droite, malgré la résistance opposée par l'eau qui se trouve située du côté F′, et qui se décharge, à travers D′ et le robinet *b*, dans le tuyau de fuite C′. Ce mouvement se communique, par la double tige G, G′ et les potences H, H′, aux lanières I, I′ enroulées sur le secteur J, lequel

est solidaire avec un robinet *j* semblable au précédent, mais beaucoup plus grand. Son jeu établira donc alternativement la communication entre K et L, K′ et L′; ou bien entre K et L′, K′ et L; suivant que le robinet *b* se trouvera dans sa position actuelle, ou se renversera à angle droit, de manière à faire communiquer C avec D′, et C′ avec D. On déterminera ainsi le changement de sens des *pistons moteurs*, qui tantôt recevront, dans les *cylindres moteurs* à travers L et L′, les eaux motrices amenées par le tuyau R, tantôt évacueront au moyen de la conduite K′, le liquide qui a déjà joué son rôle.

On remarquera, comme dans la machine simple, que l'appareil distributeur se trouve ici doublé. Le robinet *j* est semblable à *b*, mais plus important. Rien n'empêcherait, au point de vue cinématique, de le faire actionner directement par les tringles A, A′. Mais sa masse exige, au contraire, qu'on ne le sollicite qu'à l'aide d'un renvoi de pression, en réservant l'attaque immédiate du balancier récepteur pour un organe *b* plus délicat et moins massif que *j*.

On retrouve encore ici la trace de la préoccupation qui a fait, dans la machine simple, environner d'une ceinture d'eau le piston distributeur, pour supprimer tout gauchissement. On a cherché de même à éviter que le robinet des machines jumelles se trouvât influencé d'un seul côté par la pression de la charge motrice (fig. 145). A cet effet, en même temps que l'on reçoit le liquide M à travers la voie P, pratiquée dans le corps du robinet, on établit, au moyen des conduits Q, Q′, un renvoi dans les chambres R, R′, pour y déterminer une contre-pression, dont on rend l'effort sensiblement égal au premier, en calculant convenablement, en projection sur un plan perpendiculaire (n° 11), les surfaces sur lesquelles elle s'exerce, et faisant, bien entendu, entrer en ligne de compte la région où se développe la pression d'aval.

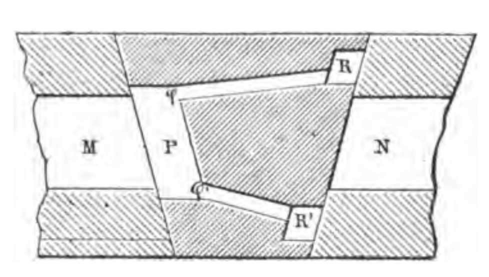
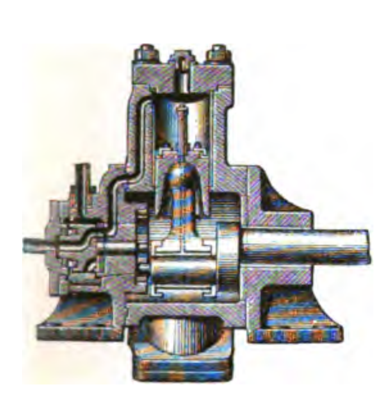


Fig. 145. — Machines jumelles à simple effet. Robinet de distribution (coupe verticale).

213 — Dans la machine Brotherhood (fig. 146 et 147), on a cherché à obtenir plus de régularité en couplant, sur un même arbre vertical, trois machines à pression d'eau à simple effet, dont les cylindres sont couchés dans un plan horizontal, à 120 degrés les uns des autres. Chaque manivelle repousse son piston, en



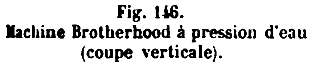


Fig. 146.
Machine Brotherhood à pression d'eau
(coupe verticale).

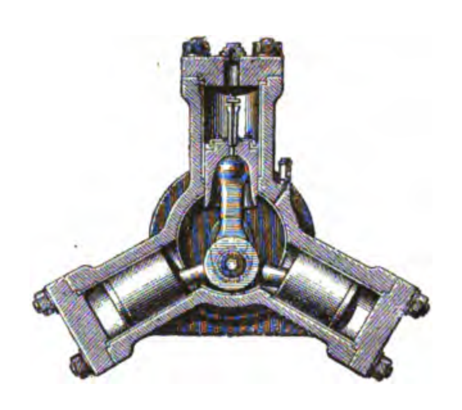


Fig. 147.
Machine Brotherhood à pression d'eau
(coupe horizontale).

refoulant le liquide dans le canal de fuite, tandis que l'eau en charge les ramène en sens inverse, de manière à entretenir le mouvement de l'arbre. Les diverses phases de leur action se superposent ainsi, en composant une somme de moments sensiblement constante. Un système de robinets, qui tourne avec l'arbre, effectue la distribution aux instants voulus.

214 — On a été, dans cet ordre d'idées [1], jusqu'à croiser ensemble quatre machines à simple effet sur les manivelles d'un arbre coudé, en l'attaquant dans chacun des quatre quadrants successifs ; mais il est clair qu'une telle complication dépasse alors l'utilité réalisée au point de vue de la régularisation.

[1] A la mine de plomb d'Allenhead, dans le Derbyshire (Collignon. *Rapport sur les progrès de la mécanique*, Exposition universelle de 1867, p. 115).

§ 4

MACHINES SIMPLES A DOUBLE EFFET

215 — Un piston-moteur A (fig. 148) se meut dans le cylindre BB′, que les orifices ou *lumières* C, C′ réunissent au tube DD′. Celui-ci se trouve en relation, d'une part, avec les eaux motrices,

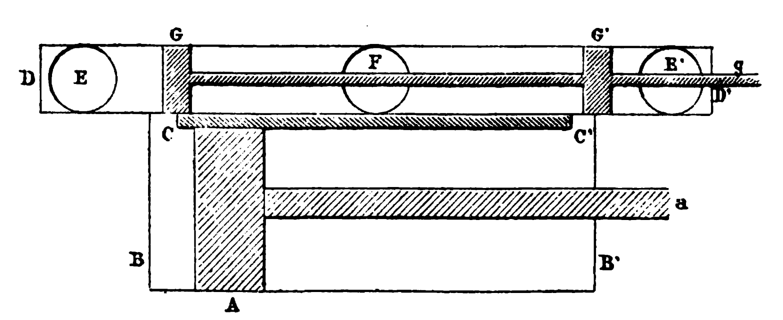


Fig. 148. — Machine à colonne d'eau à double effet (coupe verticale).

amenées par un tuyau qui se bifurque en deux branches débouchant en E, E′, et, d'autre part, avec le canal de fuite F. Les deux masses liquides ne sauraient, bien entendu, se confondre. Elles demeurent séparées par le double piston distributeur GG′, que l'on appelle aussi *tiroir*.

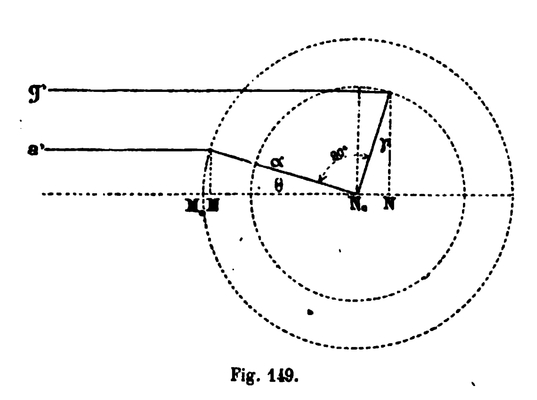


Fig. 149.

La tige g de ce dernier, ainsi que celle a du piston récepteur A, s'articulent à l'arbre tournant (fig. 149). La tige a commande ce dernier au moyen d'une bielle ordinaire a', et d'une manivelle α; la tige g, à l'aide d'une bielle d'excentrique g' et d'un excentrique cir-

culaire dont l'excentricité est figurée en γ [1]. Ces deux sortes d'organes sont, on le sait, équivalents au point de vue cinématique, sauf cette différence que la manivelle ne saurait s'installer qu'à l'extrémité d'un arbre, mais non en un point intermédiaire, ce que permet, au contraire, l'excentrique. Ce défaut est, du reste, compensé, à un autre point de vue, par cette circonstance, que le travail perdu par le frottement est beaucoup moindre, proportionnellement aux efforts mis en jeu, pour la manivelle qu'avec l'excentrique [2]. On réserve donc, ainsi que nous venons de le voir, la première à la transmission de la force motrice, dont l'intensité est considérable, et l'on affecte l'excentrique à la commande de la distribution, qui n'exige qu'un effort relativement peu important.

L'excentricité γ est calée à angle droit sur le bras de manivelle α, qu'elle précède de 90° dans le mouvement de rotation. Si nous supposons les bielles assez longues pour que nous puissions faire abstraction de leur obliquité, les droites a' et g' seront considérées comme parallèles à la ligne des points morts; et les pistons A et G (fig. 148) se mouvront de la même manière que les projections M et N (fig. 149) des articulations qui leur correspondent.

216 — Lorsque A se trouve à fond de course à gauche, M est en M_0. En même temps N occupe la position N_0, au milieu de son trajet. Le tiroir GG′, à cheval sur les lumières C, C′, les recouvre toutes les deux. Supposons que le piston récepteur s'avance vers la droite, à une distance du point mort marquée par :

$$M_0M = \alpha(1 - \cos\theta).$$

Le tiroir se portera en même temps sur la droite, en découvrant les lumières d'une quantité :

$$N_0N = \gamma \sin\theta.$$

[1] Ce mode de transmission se trouve, dans certaines machines à colonne d'eau, remplacé par d'autres, notamment par des communications hydrauliques (Delaunay. *Cours élémentaire de mécanique*, 1851, p. 569. — Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, II, 335). M. Davey a également employé une distribution *à toc* (Haton de la Goupillière. *ibidem*, II, 332).

[2] Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes*, p. 367.

L'eau motrice E peut donc, dès le premier instant, faire sentir son action impulsive sur la face gauche du piston A ([1]). Quant au liquide situé sur la face droite de ce dernier, il peut refluer par la lumière C′ dans le canal de fuite F, sous l'impulsion de ce récepteur.

Une fois celui-ci parvenu au milieu de sa course, et, par conséquent, M au centre du cercle, N se trouve à son point mort de droite, et le centre d'excentrique passe ensuite dans le demi-cercle inférieur, en faisant rétrograder le tiroir, et restreignant progressivement le débouché, en même temps que diminue la vitesse du piston récepteur, aux approches de son point mort de droite. A ce moment, la lumière se trouve complètement refermée, et N est revenu au centre du cercle.

Au delà de cette position, commence la course rétrograde du piston. N passe du côté gauche du centre, et le tiroir GG′ franchit la position d'obturation complète des lumières, qui commencent alors à se démasquer en sens inverse. C′ donne donc entrée aux eaux motrices fournies par le tuyau E′ ([2]), et C fournit un accès dans le canal de fuite, au fluide dont le cylindre vient de se remplir pendant la course précédente ([3]).

([1]) Pour le moment, le tuyau E′ ne joue aucun rôle. Son intervention est réservée à la course rétrograde.

([2]) E devenant, à son tour, sans objet.

([3]) Ce mode remarquable de distribution, qui sert de base à celui de la machine à vapeur, présente une propriété importante. La vitesse d'écoulement du liquide à travers les lumières y reste perpétuellement constante.

Si nous donnons, en effet, à l'angle de rotation un accroissement $d\theta$, le déplacement N_0M s'accroît de la différentielle :

$$\alpha \sin \theta \, d\theta,$$

ou, si l'on veut :

$$\alpha\omega \sin \theta \, dt,$$

en introduisant la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

que l'influence du volant maintient sensiblement constante. Si donc R désigne le rayon du cylindre, le volume engendré par le piston aura pour valeur :

$$\pi R^2 . \alpha\omega \sin \theta \, dt,$$

et il sera nécessaire, pour le remplir, de fournir un égal volume d'eau motrice.

Or le découvrement de la lumière par le tiroir est actuellement le produit de N_0N

217 — *Changement de marche.* — Une machine de rotation est susceptible de changement de marche. On peut, après avoir fait tourner l'appareil dans un certain sens, entreprendre d'effectuer la rotation dans le sens opposé ([1]). Il s'agit alors de substituer, à la *marche en avant*, la *marche en arrière*, au moyen d'un *organe de changement de marche.*

Pendant sa course rétrograde, le piston repasse naturellement par toutes les positions qu'il a traversées dans la course directe. Si on l'arrête par la pensée dans l'une de ces situations, il est clair que ce qui distingue les deux états correspondants de la machine, consiste en ce que le tiroir se trouve, soit à droite, soit à gauche du milieu de sa course. Il faut donc, pour que le système, supposé en repos dans cette situation, puisse s'ébranler dans un sens différent de celui qui l'y a amené, déplacer préalablement le tiroir, en le conduisant, de son emplacement actuel, à la position correspondante de la course inverse.

La réalisation de cette opération, qu'il s'agit de concilier avec les liaisons déjà établies, d'après les explications précédentes, constitue un problème de mécanique des plus importants. Il exige des développements très étendus, qui seront mieux placés dans la théorie des machines à vapeur. Nous verrons alors qu'une des solutions

par la largeur l, c'est-à-dire :

$$\gamma l \sin \theta.$$

D'après l'équation de continuité, c'est en multipliant cette section par $v dt$ que nous mesurerons la quantité dépensée :

$$\gamma l \sin \theta \,.\, v dt.$$

Si maintenant nous égalons ces deux expressions du volume liquide, en supprimant de part et d'autre le facteur $\sin \theta \, dt$, il restera :

$$v = \frac{\pi R^2 a \omega}{\gamma l}.$$

On voit ainsi que la vitesse d'écoulement conserve une valeur constante, que l'on reste maître de maintenir dans les limites voulues, puisque l'on dispose, à cet effet, de la largeur l des lumières dans le sens transversal à celui du mouvement.

([1]) C'est ainsi, par exemple, qu'après avoir, dans l'extraction des mines, élevé la cage pleine au jour, et descendu la cage vide au fond, il y a lieu de remonter ensuite à la surface cette dernière, préalablement remplie, en redescendant l'autre quand on l'aura vidée.

les plus simples repose sur l'emploi de la *coulisse de Stephenson*. Mais la manœuvre de cet organe présente, pour la machine à colonne d'eau, des facilités particulières.

Lorsqu'il s'agit, en effet, d'un moteur à vapeur, la coulisse est commandée directement par le mécanicien, au moyen d'un levier spécial placé à la portée de sa main. Avec la machine à piston hydraulique, on peut, au contraire, l'actionner à toute distance. On fait alors attaquer le levier de changement de marche par un piston spécial P (fig. 150) qui, suivant qu'il se portera dans un sens ou dans l'autre, au sein d'un cylindre auxiliaire, renversera la coulisse, de la marche en avant à la marche en arrière, ou réciproquement.

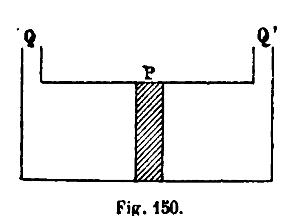


Fig. 150.

Pour produire ce résultat, il suffit d'impressionner le piston P par les eaux d'amont sur l'une de ses faces, et d'aval sur l'autre, ou d'intervertir les rôles à volonté. C'est à quoi l'on parvient en faisant communiquer les tuyaux d'amenée Q, Q′ soit avec les eaux motrices R, soit avec le canal de décharge R′, au moyen d'un robinet à deux voies, que l'on renverse à la main, de l'une à l'autre

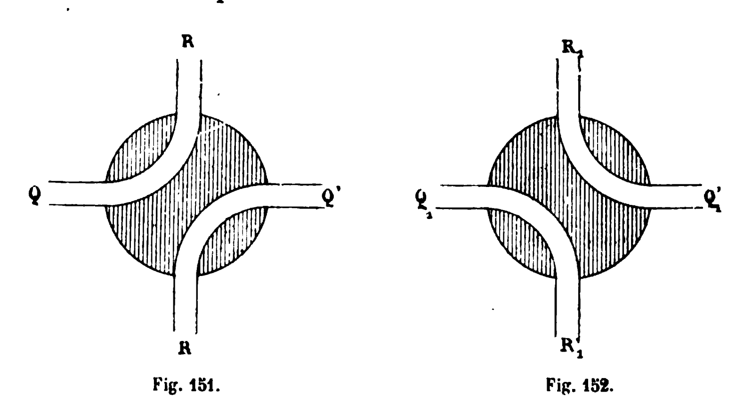


Fig. 151. Fig. 152.

des positions représentées par les figures 151 et 152. Il est d'ailleurs évident, en raison de l'incompressibilité de l'eau, que les conduites Q, Q′ peuvent avoir une longueur quelconque, ce qui permettra d'effectuer la commande à une distance aussi grande que l'on voudra.

Il est encore une autre circonstance, par laquelle les machines à double effet se séparent des appareils à simple effet. Elles fonctionnent, en quelque sorte, comme des compteurs d'eau (n° 131), et ne peuvent débiter, par tour, qu'un volume liquide invariable [1]. Au contraire, les roues et les turbines possèdent un vannage, qui leur permet d'accommoder les variations du travail à celles du débit, sans rien changer d'essentiel à leur mode de fonctionnement. Il en est de même pour la machine à colonne d'eau à simple effet, quand on fait varier à volonté la longueur de la course. Avec le moteur à double effet, on ne pourra donc obvier aux variations de la dépense que par celles de la vitesse, ce qui constitue un grave inconvénient, et tend à placer, sous ce rapport, ce genre de machines dans un certain état d'infériorité [2].

§ 5

MACHINES OSCILLANTES OU ROTATIVES

218 — *Machines oscillantes.* — Les dispositifs fondamentaux qui précèdent ne sont pas les seuls types de machines hydrauliques à piston que l'on rencontre dans l'industrie. On a également employé, pour l'utilisation de l'eau sous pression, le cylindre oscillant, au moyen de dispositifs dont nous remettrons la description détaillée à la théorie des machines à vapeur, car elle lui appartient plus directement.

Armstrong a installé, d'après cette donnée, aux docks de Marseille [3], une puissante machine (fig. 153, 154) dont les trois cylindres oscillants à simple effet sont attelés sur les manivelles d'un arbre coudé, dans trois plans méridiens espacés de 120° les uns des autres. On obtient par là plus de régularité qu'avec les ma-

[1] Il n'en est pas de même pour les machines à vapeur, dans lesquelles on a la ressource de faire varier la détente.

[2] Cette difficulté a été tournée d'une manière intéressante dans la machine à colonne d'eau du professeur Winter de Grætz (Hirsch. *Rapports de l'Exposition internationale de* 1878, groupe VI, cl. 54, p. 360).

[3] Barret. Description des docks de Marseille. — *Transactions of mechanical Engineers*, août 1858.

chines jumelles à simple effet. On en trouverait, à la vérité, encore davantage en couplant deux machines à double effet; mais on

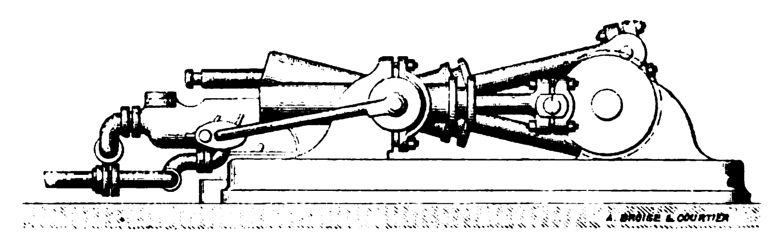


Fig. 153. — Machine oscillante à pression d'eau (élévation).

perdrait ainsi l'avantage de pouvoir employer des pistons plon-

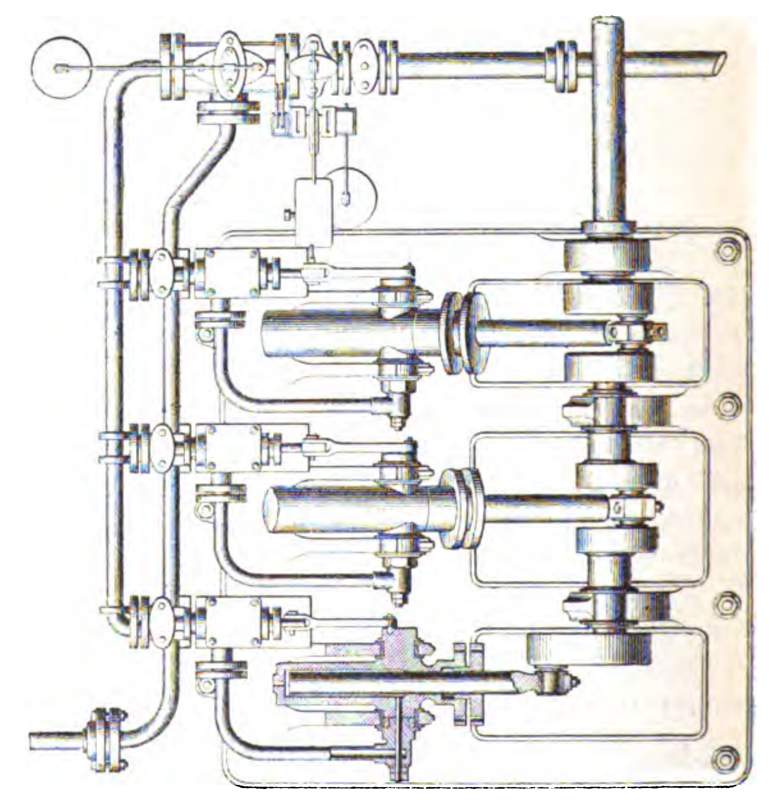


Fig. 154. — Machine oscillante à pression d'eau (plan horizontal).

geurs [1], incompatibles avec le double effet. La distribution s'ef-

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, II, 265.

fectue au moyen de tiroirs. Le rendement ne s'élève qu'à 0,45.

Le moteur Schmid (fig. 155) appartient également au type oscillant [1]. La distribution y résulte du mouvement relatif de deux surfaces cylindriques emboîtées l'une dans l'autre, et ayant pour axe celui des tourillons. La surface concave joue le rôle de tiroir.

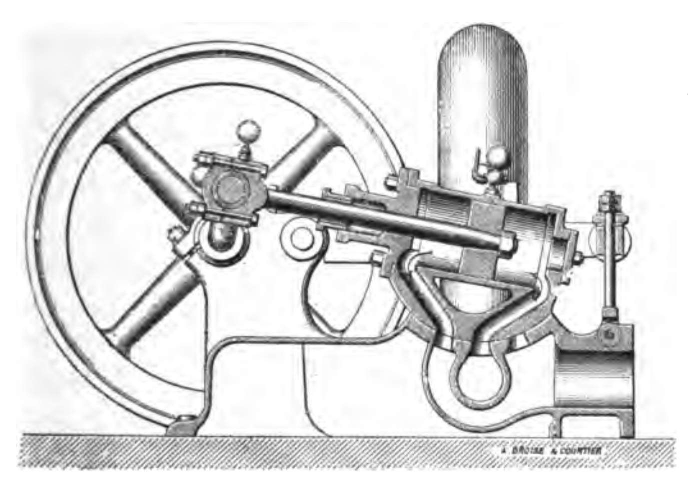


Fig. 155. — Machine Schmid à pression d'eau.

le cylindre convexe en forme la glace, et porte les lumières. Le rendement de cette machine s'est élevé à 0,85.

On peut encore citer, dans le même ordre d'idées, les moteurs de Hastic [2], de Mégy [3], de Perret et Laroche-Tolay [4], de Pézerat [5], ainsi que la machine à rotule de Faivre [6].

219 — *Machines rotatives.* — On a également introduit, dans les

(1) Callon. *Cours de machines*, pl. XXVI. — *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'industrie minérale de Saint-Étienne*, 1882, p. 12. — *Le Constructeur*, 16 décembre 1872. — *La Nature*, 22 avril 1880. — Pinet (*Annales des sciences industrielles de Lyon*, 1883, p. 35). — Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition de* 1878, groupe VI, cl. 54, p. 358.

(2) *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1882, p. 13.

(3) *Revue industrielle*, 1882, pl. I.

(4) Ordinaire de la Colonge. *Recherches théoriques et expérimentales sur le moteur Perret à pression d'eau*, 1866.

(5) Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition de* 1878, groupe VI, cl. 54, p. 359.

(6) Armengaud aîné et fils. *Les Progrès de l'industrie*, I, pl. 6.

moteurs à pression d'eau, le type rotatif, avec lequel le volume du cylindre est engendré, non plus par la translation de son cercle de section droite, mais par la rotation de son rectangle méridien, auquel on conserve encore le nom de piston. Ce dispositif présente l'avantage de dépenser beaucoup plus, sous un faible volume. Il se recommande directement, d'après cela, pour actionner des perforateurs de mines [1]. On peut rattacher à cette classe les moteurs de Braconnier et de Taverdon.

Ces divers modèles présentent une grande analogie avec les machines rotatives qui sont destinées au fonctionnement de la vapeur ou de l'air comprimé, ce qui nous dispense d'y insister en ce moment, en réservant leur description détaillée pour un moment ultérieur. Il est toutefois important de signaler, à cette occasion, une différence qui se trouve à l'avantage de l'emploi de l'eau. L'espace *non engendré* par le piston, auquel on donne souvent le nom d'*espace nuisible*, cesse alors d'avoir une influence fâcheuse. Elle s'exerce, en effet, principalement sur la détente des fluides élastiques, tandis que l'eau conserve une densité constante. Le liquide qui remplit cet espace libre perd ou regagne instantanément sa tension, suivant que le jeu du tiroir le met en communication avec le bief d'aval ou avec celui d'amont. Cette propriété imprime même quelquefois, à ces mécanismes, un cachet particulier, en soustrayant le constructeur à l'une des préoccupations dont il ne doit pas, d'ordinaire, se départir. C'est ainsi, par exemple, que l'on trouve dans le moteur Schmid de grands espaces libres, qui ne constituent pas pour lui un défaut. Il suffit que l'on s'attache à faire en sorte que ce volume reste toujours exactement rempli d'eau, en évitant soigneusement les rentrées d'air.

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*. I, 216.

CHAPITRE XII

ACCUMULATEURS

—

§ 1

THÉORIE DES ACCUMULATEURS

220 — L'énergie que la pesanteur communique à un récepteur hydraulique est ordinairement dépensée par lui dans l'usine au fur et à mesure de sa production. Cependant nous avons vu que lorsque le cours d'eau qui alimente la chute motrice présente une trop faible importance, on se trouve conduit à laisser s'accumuler son débit, pendant un certain temps, dans un bief de retenue, en vue de dépenser ensuite d'un seul coup cette réserve *par éclusées*, en un temps relativement court (p. 213).

Ce principe, ainsi introduit pour accommoder une force insignifiante à des industries plus importantes, a reçu une extension des plus remarquables. On en est arrivé à employer des moteurs d'une puissance notable par elle-même, mais dans des conditions qui permettent de dépenser, en peu de temps, d'énormes quantités d'énergie, hors de proportion avec la force en chevaux qui a servi à les accumuler longuement. On parvient ainsi à *donner des coups de collier*, séparés par certains intervalles que l'on utilise pour renouveler l'approvisionnement de cet *accumulateur*.

221 — *Presse hydraulique.* — Le point de départ de cette action

se trouve dans l'emploi de la *presse hydraulique* (¹). Cette admirable machine a été inventée par Pascal en 1650 (²). Mais l'art des con-

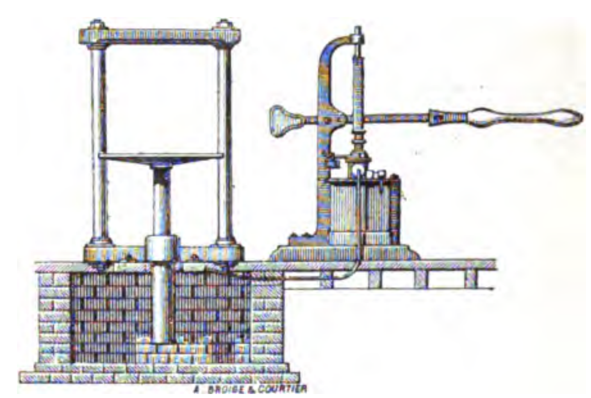


Fig. 156. — Presse hydraulique (élévation).

structions mécaniques ne permettait pas alors de maintenir sans fuites de semblables pressions, et la réalisation des hautes tensions,

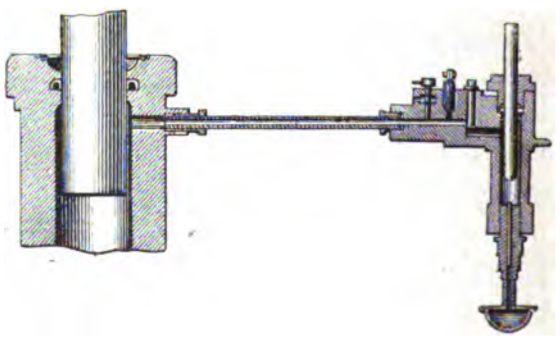


Fig. 157. — Presse hydraulique (coupe verticale).

au moyen de cette presse, n'est devenue possible que par l'introduction du *cuir embouti*, effectuée par Bramah en 1796 (³).

Je me borne à rappeler ici que le principe de cet appareil

(¹) Delaunay. *Cours élémentaire de mécanique théorique et appliquée*, 1851, p. 531. — Brisse et André. *Cours de physique*, 141. — Armengaud. *Publication industrielle*, XVI, 5. — R. Wilson. On improved hydraulic Presses (*Institution of mechanical Engineers*, novembre 1877). — K. H. Tweddel. American direct acting Steam and hydraulic Presses (*ibidem*, mars 1878). — W. Siemens. Construction of Vessels to resist high internal Pressures (*ibidem*, avril 1878).

(²) *Traité de l'équilibre des liqueurs.*

(³) Marié. Étude sur le frottement des cuirs emboutis des presses hydrauliques (*Annales des mines*, 7ᵉ série, t. XIX, p. 104).

(fig. 156, 157) consiste à opposer l'un à l'autre deux pistons, mis en rapport par l'intermédiaire d'une certaine quantité d'eau [1]. En raison de l'incompressibilité des liquides, le volume déplacé par le plongeur qui se trouve soumis immédiatement à l'action du moteur, provoquera l'émersion d'un égal volume de l'autre plongeur, porteur d'un plateau sur lequel on a disposé les matières à comprimer, quand tel est l'objet de l'appareil. Les hauteurs des deux parcours seront donc en raison inverse des sections, c'est-à-dire des carrés des diamètres des deux pistons. De là un moyen simple de pousser à outrance la multiplication des forces, puisqu'il suffit, pour cela, de disposer du rapport des rayons.

Toutefois une excessive petitesse du diamètre du plongeur de pénétration épuiserait immédiatement la totalité de sa course, en produisant l'émersion d'un volume trop faible pour déterminer des effets de quelque valeur. On se trouve donc conduit à retirer ce plongeur au dehors, afin de le remettre en état de donner un nouveau coup de piston. Il est dès lors nécessaire qu'un clapet de retenue s'oppose au retour en arrière du liquide déjà chassé dans le second corps de pompe.

Mais il vient un moment où le jeu de ce clapet se trouve lui-même entravé, ce qui impose une limite à l'ancien mode d'action. M. Desgoff [2] a donné, dans ses *presses sterhydrauliques* (fig. 158, 159), le moyen de tourner cet obstacle, en substituant, à partir de ce point, au jeu alternatif des pistons, l'action continue d'une vis qui pénètre dans le sein du liquide. On est arrivé ainsi à créer des pressions atteignant le chiffre inimaginable de ***plusieurs milliers d'atmosphères***. Le manomètre à eau capable de les équilibrer par la pensée devrait donc présenter, en nombre ronds, un nombre égal de *myriamètres de hauteur*.

222 — *Accumulateur.* — On voit par ce qui précède que, ***sous le rapport statique***, le problème de la réalisation des grandes compressions avait déjà reçu une solution aussi complète que possible.

[1] Ou parfois de glycérine.
[2] Presses sterhydrauliques Desgoff et Olivier (Tresca. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, LXVII, 8).

Mais il restait, *au point de vue dynamique*, à donner aux moteurs un développement analogue, pour les rendre capables de dépenser l'énergie avec une énorme intensité. C'est ce dernier pas qu'a franchi M. Armstrong, par son invention de l'*accumulateur hydrauli-*

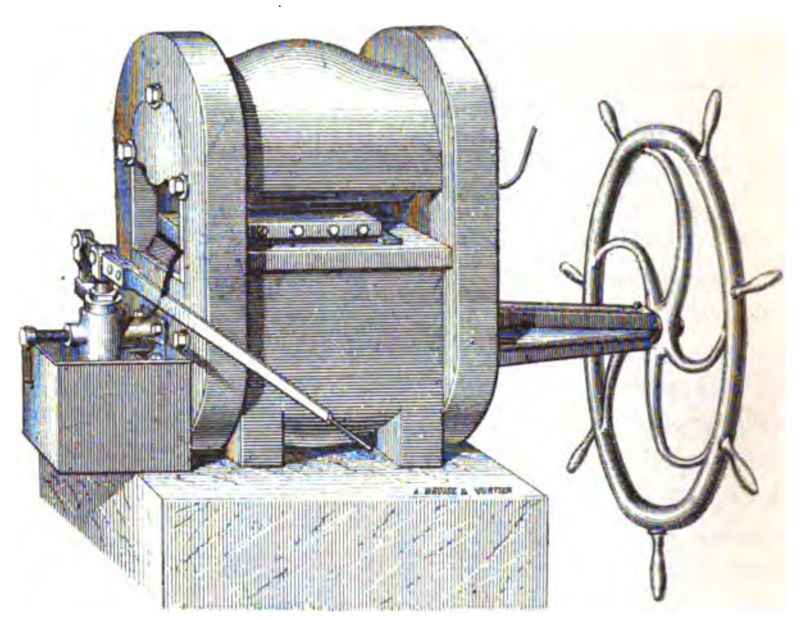


Fig. 158. — Presse sterhydraulique Desgoff (élévation).

que [1]. Cette création, sans contredit l'une des plus remarquables de ce siècle, a puissamment concouru à renouveler la face de l'industrie, en permettant de surmonter des obstacles avec lesquels on n'aurait pu auparavant songer à se mesurer.

[1] G. Richard. *Revue générale des chemins de fer*, décembre 1883, p. 389. — Armengaud. *Publication industrielle*, XVII, 40. — Oppermann. *Portefeuille économique des machines*, 3e série, t. IX, p. 121. — Achard. Transmission par l'eau sous pression (*Annales des mines*, 1876). — Callon. *Cours de machines*, I, 250. — Barret. *Note sur les appareils mus par l'eau sous pression*, Marseille, 1870. — De Nansouty (*Génie civil*. avril 1882). — Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition de* 1878, gr. VI. cl. 54. p. 365. — Fontaine. *Institution of mechanical Engineers*, juin 1871. — Kohn. *Iron*. — Frederick Colyer. *Hydraulic Steam and Hand Power lifting and Pressing Machinery*. — Armstrong. The History of the modern developpment of Water pressure machinery (*Proceedings of the Institution of the civil Engineers*, L). — Percy Westmacott. Hydraulic machinery for Warehousing (*Proceedings of the Institution of mechanical Engineers*, 1869). — R. Luthy. On valves siutables for working hydraulic machinery (*Journal of the Iron and Steel Institute*, 1874).

Rien n'est plus simple à concevoir que le dispositif d'un accumulateur (fig. 160, 161). Imaginons un piston engagé dans un cy-

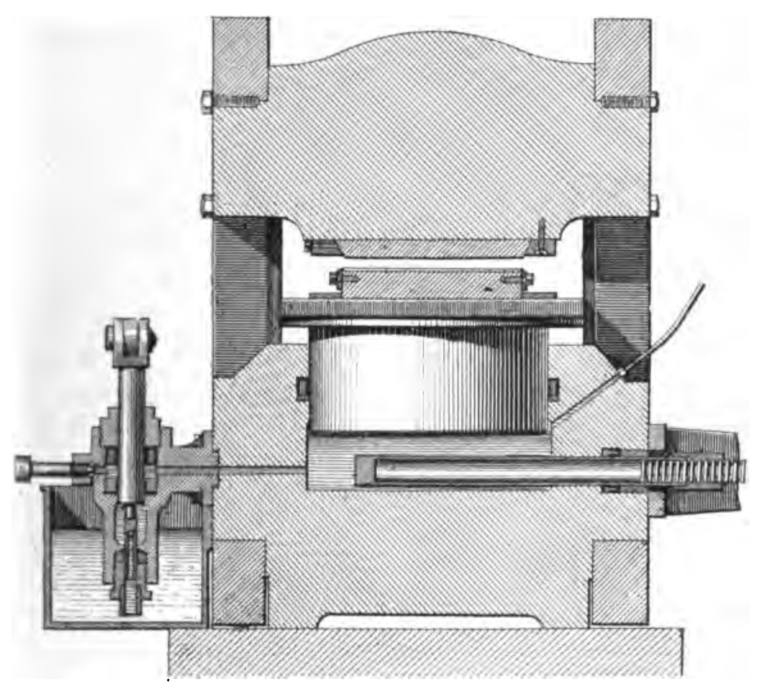


Fig. 159. — Presse sterhydraulique Desgoff (coupe verticale).

lindre vertical, et soulevé progressivement par l'action d'une batterie de presses hydrauliques, qui injectent de l'eau au-dessous de lui, sous l'empire d'un moteur quelconque; lequel sera ordinairement une machine à vapeur. Ce piston est chargé d'un poids P excessivement lourd (¹), et tel que son rapport à la section Ω du piston soit égal à la pression p par unité de surface, que l'on a en vue de développer :

$$P = p\Omega.$$

Le millième de cette pression représente la hauteur d'eau H théo-

(¹) Ou parfois maintenu par un ressort antagoniste extrêmement fort, dont, à la vérité, la résistance n'est plus alors constante.

riquement équivalente (éq. 2, p. 8) :

$$(113) \qquad H = \frac{p}{\varpi} = \frac{P}{\varpi\Omega}.$$

Quand on voudra faire remonter le poids P de toute la hauteur h du cylindre, on aura besoin de dépenser un travail considérable Ph. Mais, une fois le système parvenu au sommet ([1]), il suffira qu'un taquet, déclanché par son arrivée, débraye les presses en fermant le robinet d'entrée du liquide, pour que celui-ci reste emprisonné, avec la tension qu'il a acquise. Il forme alors une ***réserve potentielle d'énergie***, que l'on pourra ensuite dépenser à volonté, à un instant quelconque.

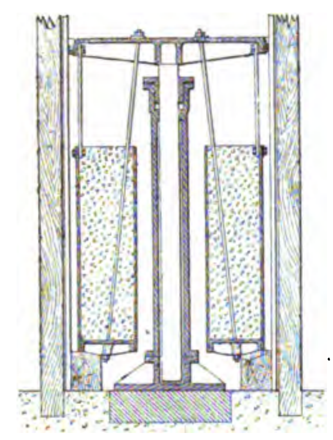


Fig. 160. — Accumulateur.

On n'aura, pour cela, qu'à ouvrir un autre robinet, admettant le liquide dans un récepteur hydraulique approprié, qui sera ordinairement une machine à piston (chap. XI). La descente de l'appareil renclanche d'elle-même les presses, qui se remettent de suite à travailler.

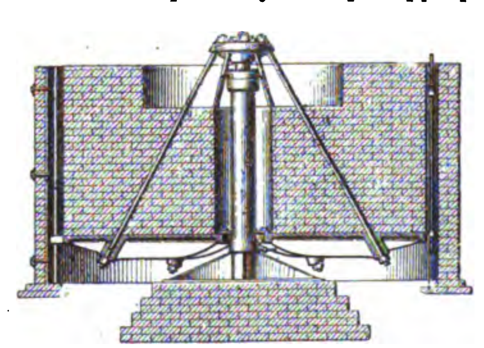


Fig. 161. — Accumulateur.

Le cylindre devient ainsi l'équivalent du bief de retenue d'une chute hydraulique fictive, de hauteur H, que l'on aurait rempli peu à peu, de manière à y emmagasiner une éclu-

([1]) Il est indispensable qu'un accumulateur renferme toujours un appareil de sûreté, destiné à prévenir la sortie du piston plongeur à travers la garniture, et les désastres qui en seraient la conséquence. Nous en verrons plus loin un exemple (n° 234).

sée de volume Ωh. Sa puissance théorique $\varpi \Omega h$. H, ou Ph (éq. 113) reproduit bien, en effet, le travail dépensé. Dans la réalité, cette hauteur H est assez considérable pour se compter *par hectomètres.*

223 — On trouverait cependant une limite à la puissance de ces appareils dans cette circonstance, que, pour augmenter H sans élever démesurément la valeur de P, il faut diminuer celle de Ω (éq. 113). Or, la construction de pistons très minces destinés à de tels efforts présenterait des difficultés insurmontables.

M. Tweddel a tourné la difficulté [1] par l'introduction de son *accumulateur différentiel* (fig. 162). On substitue au plongeur ordinaire une tige-guide, dont les deux travées présentent des diamètres distincts, mais très peu différents. Elle traverse de part en part les fonds du cylindre, à travers des garnitures. Au fur et à mesure que le poids s'élève avec elle, la portion de cette tige qui se trouve enfermée dans le corps de pompe, sur une longueur toujours la même, se répartit inégalement entre le grand et le petit diamètre. De là une variation du volume immergé, qui sert à loger l'eau d'injection. On peut ainsi, pour opérer le soulèvement, employer un volume liquide aussi petit que l'on voudra, puisqu'il résulte de la différence de deux éléments arbitraires, et, par suite, augmenter la tension sans autres limites que celles qu'imposera la solidité du cylindre.

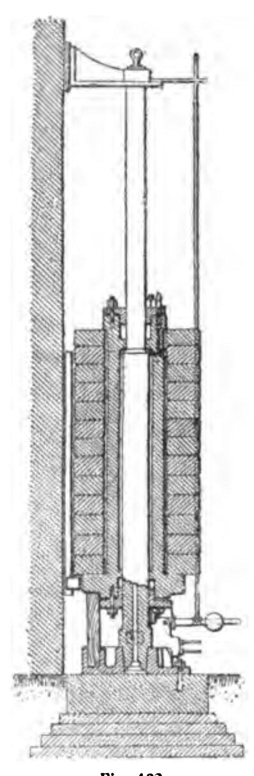


Fig. 162.
Accumulateur différentiel.

224 — M. Tweddel a proposé également, dans le même but, un

[1] Tweddel. *Institution of mechanical Engineers*, juillet 1872, août 1874. — G. Richard. Les riveuses pour chaudières de locomotives (*Revue générale des chemins de fer*, décembre 1883, p. 389). — Hirsch (*Rapports du Jury international de l'Exposition de* 1878, groupe VI, cl. 54, p. 373).

accumulateur multiplicateur [1]. Son organe essentiel est une tige munie de deux pistons de diamètres inégaux (fig. 163). L'équilibre de cette dernière ne pouvant avoir lieu qu'avec des efforts égaux sur les deux faces, y développe des pressions en raison inverse de leurs surfaces, ou du carré des rayons. On peut donc, en appliquant sous le grand piston une tension suffisante, amplifier celle-ci suivant un rapport arbitraire dans l'enceinte supérieure.

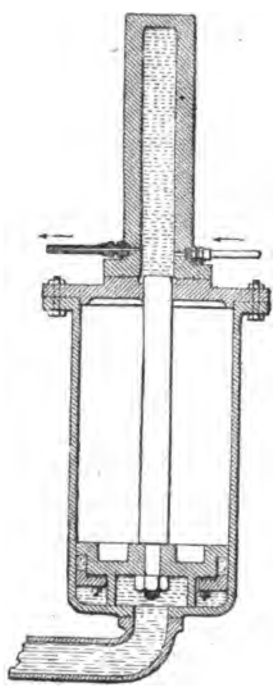


Fig. 163.
Accumulateur multiplicateur.

225 — Si l'accumulateur permet de réaliser des puissances aussi considérables, on peut dire qu'il présente en même temps un défaut assez sérieux, à savoir l'inflexibilité de cette puissance dans une constance absolue, opposée à la souplesse que possèdent, au contraire, beaucoup d'engins pour s'adapter aux variations de la besogne à produire.

On remarquera, en effet, que l'appareil n'a qu'une seule manière de restituer l'énergie dont il est devenu dépositaire: c'est de laisser redescendre son piston et écouler l'eau qu'il renferme. Supposons, d'après cela, que l'on veuille, pour un motif quelconque, l'employer accidentellement, non plus à vaincre d'énormes résistances, mais à produire, au contraire, une dépense de travail très modérée ***sur le même parcours qu'auparavant***. Il s'agira, par exemple, d'une grue hydraulique destinée à élever, dans les conditions ordinaires, des fardeaux considérables P' à une hauteur h' telle que l'on ait [2] :

$$P'h' = Ph;$$

[1] G. Richard. Les riveuses pour chaudières de locomotives (*Revue générale des chemins de fer*, décembre 1883, p. 390).

[2] En laissant sous-entendue, pour plus de simplicité dans cette explication, la part absorbée par les résistances passives.

et l'on veut, pour une fois, se borner à élever à la même hauteur h', non plus le poids P' déterminé par cette relation, mais un objet d'un poids beaucoup moindre P'_1. Il faudra, dans ce but, dégorger tout le liquide comme à l'ordinaire, puisque c'est la seule manière de faire exécuter, au piston du récepteur auxiliaire, le déplacement voulu. On dépensera donc toute la provision d'énergie Ph de l'accumulateur, c'est-à-dire $P'h'$ qui lui est égale. Comme, en même temps, on n'en utilise que la partie $P_1'h'$, il deviendra nécessaire d'user au frein la différence $(P' - P_1')h'$, sous peine de voir cet excédent produire des accélérations désastreuses, et tout briser en fin de course. Les manœuvres auxquelles sont destinés ces appareils pourront donc souvent se trouver gênées par cet obstacle, et elles deviendraient, dans tous les cas, anti-économiques.

On a cherché, pour de telles circonstances, à leur rendre une certaine élasticité, par l'introduction des *accumulateurs à double pouvoir* [1]. Il suffit, à cet égard, de surmonter le piston qui a pour section Ω, d'une tige de section ω. Si l'on n'introduit l'eau en charge que sous la face inférieure, les choses se passeront comme à l'ordinaire, avec la totalité de la puissance. Mais si l'on admet le liquide à la fois des deux côtés, il n'exercera plus qu'un effort résultant, dont le rapport au précédent sera celui des sections ω et Ω, ou, en d'autres termes, des carrés des diamètres. La dépense d'eau se répartira, de son côté, dans le même rapport ; puisque le mouvement du piston fait refluer, d'un côté à l'autre, un volume proportionnel à $\Omega - \omega$. Il ne reste dès lors à fournir par l'accumulateur que la différence entre Ω et $\Omega - \omega$, c'est-à-dire ω.

226 — *Transmissions hydrauliques.* — L'emploi de l'eau sous pression pour faire mouvoir un récepteur à piston et à tiroir, présente comme avantage caractéristique la haute tension qu'il est facile de lui communiquer, et qui serait irréalisable directement avec la vapeur ou l'air comprimé.

Il est vrai que l'on se prive par là de l'emploi de la détente, dont il est possible de tirer, avec les fluides élastiques, un si utile parti ;

(1) Hasties (*The Engineer*, 23 avril 1880, p. 304). — Mayer (*Engineering*, 10 septembre 1880, p. 211).

mais, en revanche, l'incompressibilité de l'eau assure aux manœuvres, pourvu qu'elles soient suffisamment lentes, et *sans lancé*, une précision toute particulière. On a comparé, à juste titre, cet appareil à un serviteur robuste, silencieux, docile et ponctuel.

Ajoutons que l'eau sous pression se recommande encore comme l'un des modes les plus simples de transmission à distance de la puissance dynamique. Rien n'empêche, en effet, d'allonger progressivement, par la pensée, le tuyau qui sert à réunir l'accumulateur producteur de la tension, avec le récepteur auxiliaire destiné à la mettre en œuvre. On peut ainsi recueillir, s'il y a lieu, sur un premier point, l'énergie qui s'y développe naturellement, ou du moins économiquement, et la dépenser sur un autre pour lequel elle fait défaut, ou, dans tous les cas, deviendrait d'une production onéreuse.

Je rappellerai, à cette occasion, que les ressources actuelles de la mécanique fournissent, pour ce problème de la transmission des forces, les solutions suivantes, qui pourront, bien entendu, n'être pas toutes également acceptables dans un cas donné : 1° un très long arbre de couche; 2° une série de barres de renvoi [1]; 3° les câbles télodynamiques; 4° l'air comprimé; 5° l'électricité; 6° l'eau sous pression [2].

La transmission par les fluides possède cet avantage précieux que le frottement y est indépendant de la pression (p. 110). Les résistances passives mises en jeu seront donc moins directement liées à l'importance des effets à transmettre, que lorsqu'il s'agit de corps solides ou de câbles. On y trouve également de grandes facilités d'installation, particulièrement pour les mines; car le système, entièrement dissimulé dans une tuyauterie, qui pourra même, au besoin, être enterrée, sera beaucoup moins encombrant que les précédents. On peut enfin, avec la plus grande facilité, pousser très loin la subdivision de la puissance transmise aux divers points

[1] Moyen suranné, autrefois employé dans les mines. Son rendement est détestable en raison des vibrations, du grand nombre des articulations, etc. (Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes*, p. 184. — Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. I, p. 779.)

[2] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. I, p.780.

d'un atelier, ou aux différents ateliers d'une même ville. La puissance hydraulique est ainsi devenue une sorte de denrée, qui se trouve débitée au public, suivant ses demandes et à certains tarifs, par une municipalité ou une Compagnie industrielle [1]. En compensation de ces avantages, il ne faut pas perdre de vue que la gelée expose aux plus graves inconvénients, si l'on ne s'environne, à cet égard, de toutes les précautions nécessaires.

227 — Quant au rendement, on doit considérer le coefficient économique de l'appareil hydraulique complet comme le produit de trois rendements distincts [2], à savoir : celui des pompes de compression, celui de la canalisation qui relie l'accumulateur au récepteur, et enfin celui de ce dernier. On admet ordinairement le chiffre de 0,70 pour les pompes, et l'on pourrait, en thèse générale, espérer un résultat analogue pour les machines à colonne d'eau (nº 208). Il sera sage, cependant, de l'abaisser à 0,50 pour tenir compte de ce que ces récepteurs fonctionnent souvent au-dessous de leur puissance normale, avec l'aide du frein (nº 225). Le produit de ces deux coefficients donne déjà 0,35 ou environ un tiers.

En ce qui concerne la canalisation, l'on doit, ainsi qu'il vient d'être dit, noter, comme une circonstance très favorable, que la perte de charge ne dépende pas de la pression, dont l'énorme intensité serait, sans cela, écrasante au point de vue économique. Elle est seulement fonction du diamètre, que l'on peut choisir à volonté, et, en second lieu, de la longueur, qui s'impose au contraire directement. Sous ce rapport, le rendement doit donc être considéré comme indéterminé au point de vue général.

Il est facile, à cet égard, d'évaluer le diamètre D qui permettra de lui attribuer une valeur arbitrairement choisie λ. La perte subie sur la charge disponible H aura, en effet, pour expression $(1 - \lambda)$ H. Mais, d'autre part, elle est également représentée par Jl

[1] La ville de Hull a été la première à organiser, sur une grande échelle, la distribution de la force hydraulique (*Génie civil*, V, 258. — *Revue industrielle*, 24 mai 1882, p. 208).

[2] A. Achard. De la transmission et de la distribution des forces motrices à grande distance (*Annales des mines*, 7ᵉ série, t. VII, p. 149).

(n° 74), d'où la relation :

$$1 - \lambda = \frac{l}{H} J.$$

On a d'ailleurs :

$$J = \frac{\chi}{\Omega} \varphi(u) = \frac{4}{D} Bu^2 = \frac{4B}{D} \left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 = \frac{4^3 BQ^2}{\pi^2 D^5}.$$

Or, si l'on désigne par N le nombre des chevaux-vapeur développés, 75 N sera le nombre de kilogrammètres par seconde :

$$75 N = \varpi Q H,$$

$$Q = \frac{3}{40} \frac{N}{H}.$$

On tire de là :

$$J = \left(\frac{3}{5\pi}\right)^2 \frac{BN^2}{H^2 D^5},$$

$$1 - \lambda = \left(\frac{3}{5\pi}\right)^2 \frac{BlN^2}{H^3 D^5}.$$

L'expression du rendement devient ainsi, en fonction du diamètre :

$$\lambda = 1 - \left(\frac{3}{5\pi}\right)^2 \frac{BlN^2}{H^3 D^5},$$

et, réciproquement, celle du diamètre capable de procurer un rendement donné λ sera :

$$D = \left(\frac{3}{5\pi}\right)^{\frac{2}{5}} \sqrt[5]{\frac{BlN^2}{(1 - \lambda) H^3}}.$$

Le diamètre nécessaire pour obtenir un rendement donné varie donc en raison inverse de $H^{\frac{3}{5}}$. Mais si l'on veut, au contraire, sacrifier une perte de charge définie en valeur absolue, en considé-

rant $(1-\lambda)$ H comme une donnée spéciale, que l'on remplacerait, au besoin, par une lettre distincte, le diamètre variera alors en raison inverse de $H^{\frac{2}{5}}$.

§ 2

ÉLÉVATEURS HYDRAULIQUES

228 — *Généralités.* — Les accumulateurs ont été employés à vaincre les genres de résistances les plus divers. Ils servent à manœuvrer les cornues Bessemer, les portes d'écluses, les ponts tournants, l'outillage des ports [1] et des gares de chemin de fer, les machines à agglomérer la houille, les riveuses [2], emboutisseuses, poinçonneuses, perceuses, etc. La description spéciale de ces différentes applications appartient à la technologie. Nous nous bornerons ici, pour rester à un point de vue général, à envisager le problème de l'élévation des corps pesants.

Nous devons d'abord noter que, dans cet ordre d'opérations, le principe même des élévateurs hydrauliques se prêtera à une sorte de réversibilité. Lorsqu'il s'agit, en effet, de descendre et de monter alternativement divers fardeaux, on pourra éviter d'user au frein, en pure perte, le travail de la pesanteur développé pendant les descentes. Il suffira, en intervertissant le jeu de l'appareil, de refouler dans l'accumulateur une provision de liquide, représentative de ce travail, qui restera ainsi disponible pour des élévations ultérieures.

Les *élévateurs* ou *monte-charges* sont ordinairement fondés, comme la machine à colonne d'eau, sur la pression subie de la part de ce liquide par un organe à mouvement alternatif. Ils en diffèrent toutefois d'après une circonstance importante; c'est que leur manœuvre reste arbitraire et intermittente, tandis que le jeu de la précédente est automatique, et se prolonge d'une manière continue,

[1] Barret. Étude sur les appareils hydrauliques appliqués à la manœuvre de l'outillage des ports (*Annales des travaux publics*, 1880, pages 145, 169, 190, 213, 235, 260, 283, 310, 331, 356. — Neudstadt. *Emploi de l'eau comme moyen de transmission de la force dans les docks*, 1866.

[2] G. Richard. Les riveuses pour chaudières de locomotives (*Revue générale des chemins de fer*, décembre 1883, p. 385). — G. Richard. *La Chaudière locomotive et son outillage*, in-4°, 1886, p. 634.

jusqu'à ce que l'on intervienne volontairement pour le modifier ou l'arrêter. Ces appareils peuvent, du reste, prendre plusieurs aspects caractéristiques.

Si la puissance hydraulique leur est fournie dans les conditions ordinaires, c'est-à-dire sous la forme d'un bief supérieur, d'où l'eau peut descendre au niveau inférieur en s'incorporant à la machine, on obtient les *balances hydrauliques*. Si l'on emploie, au contraire, l'eau en charge sous la pression statique qui résulte de la différence

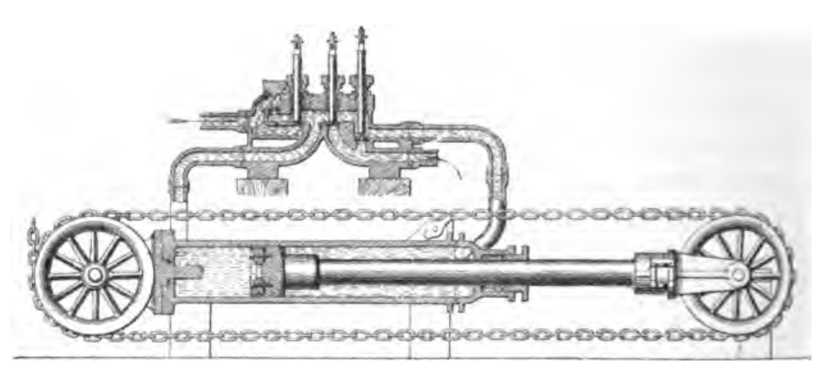


Fig. 164. — Machine à piston et à chaîne (coupe verticale).

de niveau des deux biefs, ou avec la tension artificielle fournie par un accumulateur, on peut, en premier lieu, appliquer le piston à soulever le fardeau sur sa tête, comme dans les *ascenseurs à tige*; ou bien agir, dans un corps de pompe, sur un piston attelé à des chaînes de transmissions (fig. 164), comme avec les *grues hydrauliques*. Passons en revue successivement ces divers dispositifs.

229 — *Balances hydrauliques*. — Sur une poulie supérieure, passe une chaîne portant deux caisses, qui sont construites en bois ou en tôle, et dont le mouvement est guidé verticalement. Les plateaux qui les surmontent sont disposés de manière à recevoir les objets qu'il s'agit d'élever. Ordinairement les matières sont disposées dans des wagonnets, qui sont destinés à faciliter leur circulation horizontale, et qui constituent un *poids mort*. Mais ce poids n'interviendra qu'accessoirement, en raison des résistances passives dont il devient l'occasion, si l'on a soin d'équilibrer la montée d'un

wagon plein par la descente d'un wagon vide. Des arrêts ou *clichages* assujettissent le système pendant le remplacement des wagonnets chargés par des chariots vides, et réciproquement, après chaque course.

L'intérieur de la caisse se remplit d'eau au niveau supérieur [1]. En introduisant un poids de liquide qui dépasse légèrement la somme de celui des matières et des résistances passives que l'on peut évaluer environ au dixième de la charge *totale*, on détermine la mise en mouvement de l'appareil, dont un frein permettra, au besoin, de maîtriser l'accélération et de déterminer l'arrêt en fin de course.

On perd évidemment, sur la hauteur de chute, la portion correspondante au déversement, et la hauteur motrice est seulement égale à la course elle-même. En vue d'opérer ce déversement, un clapet à tige trop longue, disposé dans le fond de la caisse, se trouve soulevé par son arrivée au point le plus bas. Parfois, au contraire, cette soupape est manœuvrée à la main.

Ajoutons que, pour que le poids de la chaîne reste constamment équilibré, malgré son passage continu d'une travée à l'autre pardessus la poulie, on a soin de suspendre, sous les caisses, deux brins additionnels, qui s'affaissent progressivement sur le sol pendant la descente, et se redressent peu à peu, lors de l'ascension de leur cage.

Rien n'oblige d'ailleurs à avoir le bief supérieur exactement au niveau du déchargement des fardeaux, comme semblerait l'exiger l'explication précédente. En réalité, il y a une complète indépendance entre ces deux plans. Il suffit, à cet égard, d'employer, pour les deux cages, des poulies distinctes, dont les rayons soient proportionnels aux courses que l'on doit réaliser respectivement, dans la descente de l'eau et l'ascension des charges ; en même temps, bien entendu, l'on consommera des quantités de liquide qui seront, avec le poids de ces dernières, en raison inverse des hauteurs parcourues.

[1] Pour relever le tablier du pont en treillis de Douarnenez, on a employé une caisse de contrepoids suspendue à des chaînes et remplie de 75 000 kilogrammes d'eau, indépendamment de son propre poids qui était de 8500 kilogrammes (*Mémoires de la Société des ingénieurs civils*, octobre 1884, p. 324).

Dans certains cas, le bief supérieur, au lieu d'être alimenté par un cours d'eau naturel, le sera par une machine à vapeur élévatoire. Le système peut alors être assimilé à un accumulateur, dans lequel le moteur à vapeur agit uniformément pour emmagasiner la puissance au point le plus haut, sous la forme d'une provision d'eau, que l'on concentre dans le bief de retenue; tandis que la balance dépense par éclusées, aux instants voulus, cette énergie disponible, en développant, à ce moment, un effort tout différent de celui que la machine thermique exerce d'une manière continue.

Ajoutons enfin qu'il existe également des *balances inclinées* (¹), pour actionner des tractions mécaniques en rampe. Deux wagons à eau sont alors attelés aux extrémités d'une chaîne, passée sur une poulie dont le plan est parallèle à celui de la voie, et que l'on installe à son sommet. Sauf cette circonstance, le fonctionnement s'opère comme pour les monte-charges verticaux.

230 — *Grues hydrauliques.* — Les *grues hydrauliques* (²) constituent l'une des formes les plus usitées de la classe des *élévateurs à chaîne*. Le principe de ces derniers reste toujours le même, quelle que soit la disposition du système de charpente, et celle des poulies de renvoi qui servent à guider la chaîne destinée à mettre en relation le piston récepteur avec le fardeau à élever (fig. 164).

Ces grues consistent en une charpente très simple (fig. 165 à 168), installée de manière à pouvoir tourner sur un pivot, en promenant ses grappins le long d'une circonférence de cercle. La puissance hydraulique est employée, au besoin, à déterminer cette

(¹) A la Grand'Combe (Gard), à Festiniog (pays de Galles), au Giessbach (Suisse).

C'est également une balance hydraulique inclinée qui actionne le chemin de fer funiculaire de Territet à Glion, près de Montreux (lac de Genève). Il sert à racheter une dénivellation de 302 mètres, avec un développement de 674 mètres, et des pentes qui varient de 30 à 57 °/₀. La poulie a 3ᵐ,37 de diamètre; le wagon pèse 7 tonnes, et renferme un égal poids d'eau; sa vitesse est de 1ᵐ,60 par seconde. Les frais de premier établissement, indépendamment de l'achat des terrains, se sont élevés à 367,000 francs (Vauthier. *Bulletin de la Société vaudoise des ingénieurs et architectes*, juin 1885. — *Bulletin du Ministère des travaux publics*, novembre 1885, p. 541. — *Bulletin de l'Association scientifique de France*, janvier 1886, p. 206).

(²) Armengaud. *Publication industrielle*, XIV, pl. 16, 17, 18. — Frederick Colyer. *Hydraulic lifting and pressing machinery*.— William Armstrong. *Transactions of the Institution of mechanical Engineers*, août 1858. — Lacoste. *Génie civil*, t. VI, p. 365.

rotation, et, surtout, à enlever le fardeau, dont l'importance atteint aujourd'hui des chiffres gigantesques ([1]). La tige du piston

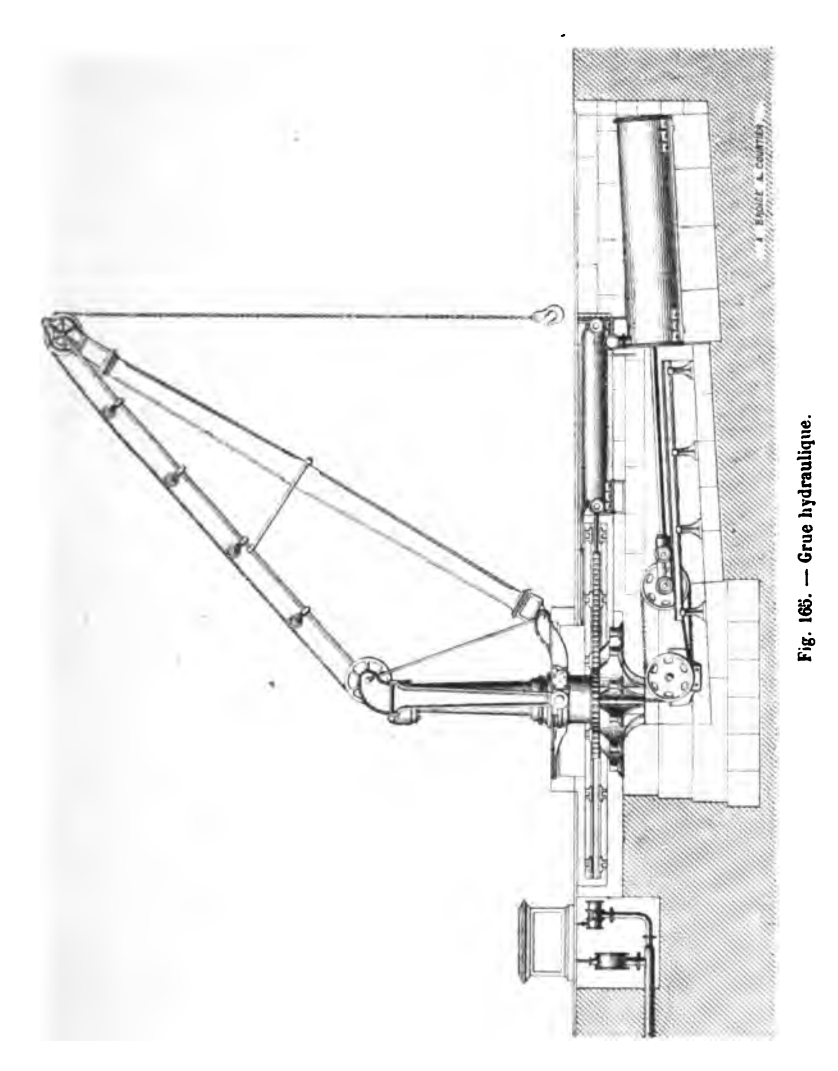


Fig. 165. — Grue hydraulique.

(fig. 165) soulève une poulie dont la chaîne, amarrée au pied fixe

([1]) On a installé des grues hydrauliques de 60 tonnes à Bremerhaven, de 80 à Amsterdam, de 100 à Woolwich, de 120 à Anvers (*Génie civil*, t. V, p. 404), de 150 à Toulon (*Écho des mines et de la métallurgie*, 1885, p. 176). La figure 168 représente un projet de grue pour 160 tonnes (Frederick Colyer. *Hydraulic lifting and pressing machinery*, pl. 5).

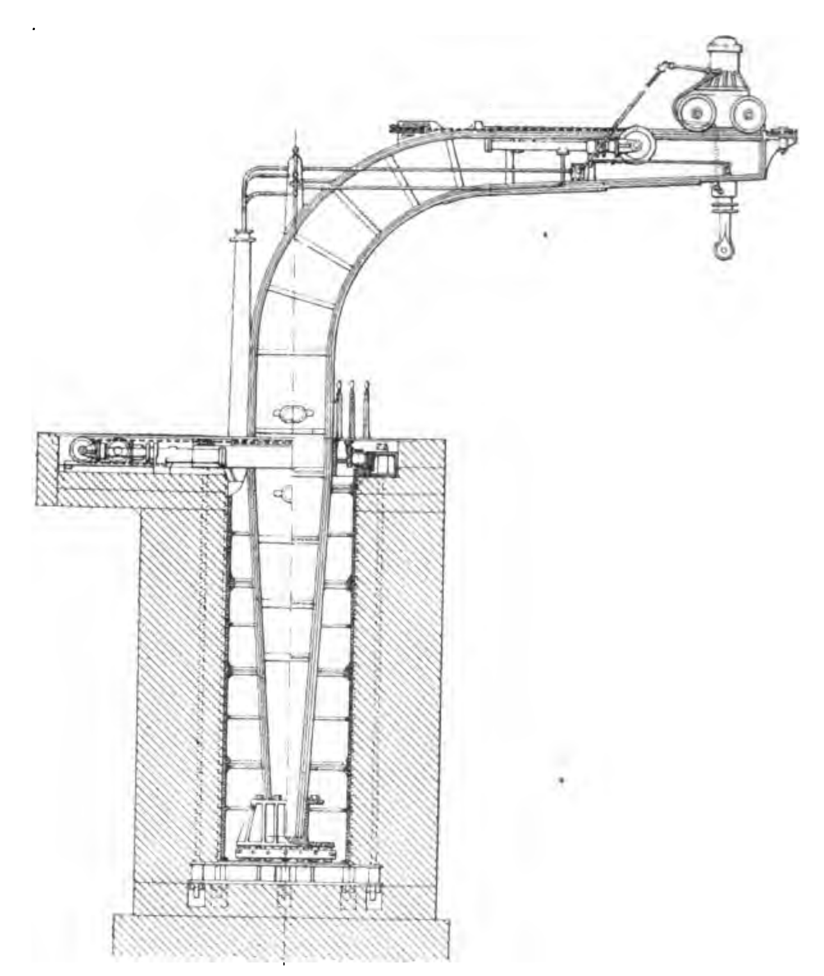


Fig. 166. — Grue hydraulique de 40 tonnes (élévation).

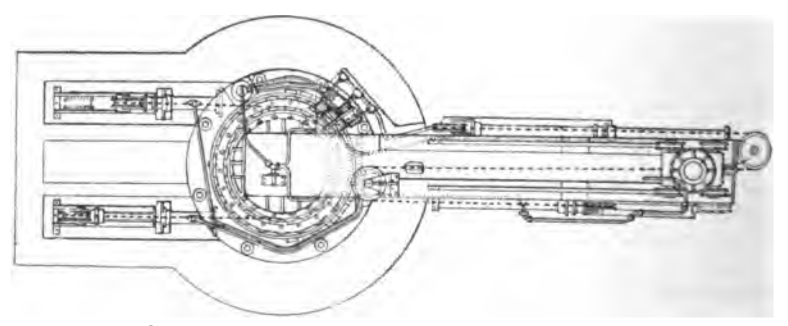


Fig. 167. — Grue hydraulique de 40 tonnes (plan horizontal).

de la grue, supporte, à son autre extrémité, une poulie mouffléc. La nouvelle chaine, amarrée également sur le pied, et sollicitée par

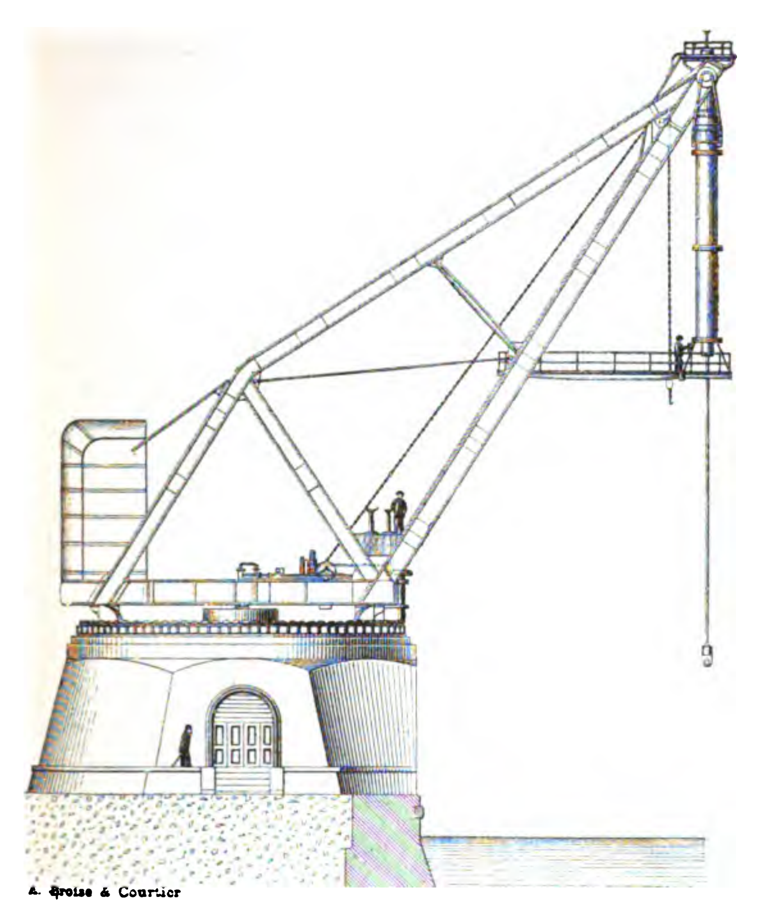


Fig. 168. — Grue hydraulique de 160 tonnes (élévation).

ce palan, passe sur un galet supérieur, et pend verticalement pour supporter le grappin.

231 — Une seconde catégorie de la classe des élévateurs à chaine est celle des *ascenseurs à chaîne*, qui servent à monter, suivant une trajectoire rectiligne, une cage assujettie par des guidonnages [1]. Nous en distinguerons plusieurs types.

[1] On suppose essentiellement ici une hauteur modérée, telle que celle des maisons

Dans l'*ascenseur à chaîne et à contrepoids* [1], un piston à simple effet (fig. 169) subit l'action de l'eau motrice, favorisée par la descente d'un contrepoids moins lourd que le poids mort à élever. Quand l'ascenseur est chargé, on tire une corde qui ouvre un clapet d'alimentation, et le système s'élève. Plus tard, il redescendra en relevant le contrepoids, quand on laissera écouler l'eau motrice, dont l'étranglement constitue, au besoin, un frein pour modérer le mouvement [2].

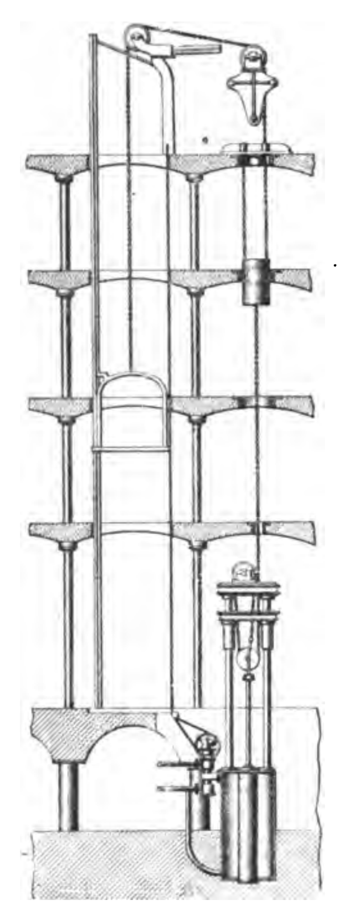


Fig. 169. — Ascenseur à chaîne.

d'habitation. Sinon, l'on retombe dans le problème de l'extraction des mines, avec toutes les complications qu'il entraîne (Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, 5e partie).

(1) Ascenseur de Tangye (*Revue industrielle*, 28 avril 1880, p. 163). — Ascenseur américain (*La Nature*, 1876, p. 36). — Note de M. Ellington (*Revue industrielle*, 3 mai 1882, p. 173).

(2) On a installé, à Bahia (Brésil), un semblable ascenseur métropolitain de 58 mètres de hauteur. Le pont métallique de raccordement présente 45 mètres de longueur. L'ascension de 20 passagers s'effectue en 2 minutes, au prix de 25 centimes par voyageur (*La Nature*, 9 août 1884).

Il existe également à Stockholm (fig. 170) un ascenseur de 35 mètres, construit par le capitaine Knut Lindmark, dans le but de mettre en communication le faubourg de Sœdermalm avec la partie basse de la capitale. La passerelle métallique, divisée en quatre travées, présente 149 mètres de longueur. La force motrice est fournie par une machine à vapeur qui actionne une presse hydraulique (*Illustrirte Zeitung*, 1884. — *Génie civil*, t. V, p. 218. — *La Nature*, 24 mai 1884, p. 404. — *Bulletin du Ministère des travaux publics*, t. XI. p. 205).

M. Edoux a imaginé, pour fournir aux baigneurs de Cauterets un moyen de transport facile jusqu'à l'établissement de la Raillère, un système de cinq ascenseurs consécutifs de 25 mètres chacun. On élèverait ainsi des wagons à une hauteur supérieure à celle de leur destination, à laquelle ils accéderaient ensuite en roulant spontanément sur une faible pente, calculée à cet effet (Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. I, p. 676). Ils reviendraient de même au point de départ sur une voie inclinée (*Génie civil*, I, n° 4. — *La Nature*, 1881. p. 281).

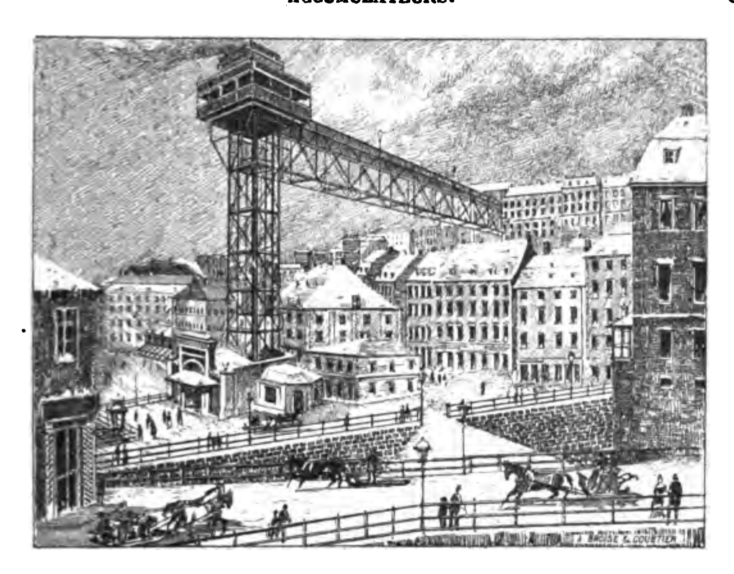


Fig. 170. — Ascenseur métropolitain de Stockholm.

L'*ascenseur à chaîne sans fin* de Ph. Mayer (fig. 171) est analogue au système Kœpe employé dans l'extraction des mines [1]. Un câble continu, attaché d'une part au plafond de la cage, et, d'un autre côté, sous son plancher, passe sur une poulie motrice. L'angle d'enroulement qu'il embrasse sur cette dernière, y détermine une adhérence suffisante [2] et, par suite, la transmission, à la chaîne, de la commande exercée sur l'arbre de la poulie par une machine motrice.

L'*ascenseur continu* de P. Hart [3] présente une chaîne sans fin analogue aux norias, et destinée à monter à la fois un certain

Fig. 171. — Monte-charges à chaîne sans fin.

[1] Haton de la Goupillière (*Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 80).

[2] Haton de la Goupillière (*Traité des mécanismes*, p. 416).

[3] *Bulletin du Ministère des travaux publics*, juin 1882, p. 451. — *La Nature* 15 juillet 1882, p. 105.

nombre de cages, qui redescendent ensuite sur la seconde travée, mais, bien entendu, sans subir de renversement; chacune d'elles, une fois arrivée au sommet, se transporte parallèlement à elle-même par l'intervention d'un guidage spécial. La vitesse continue est de $0^m,20$ par seconde, ce qui donne aux passagers un temps suffisant pour l'embarquement et le débarquement.

232 — Les poids soulevés par les élévateurs à chaîne prennent, dans certains cas, des proportions exceptionnelles. J'en citerai quelques exemples.

Il existe sur le canal d'Oswego, aux États-Unis [1] un pont de $25^m,50$ de longueur sur $11^m,60$ de large, qu'il est nécessaire d'effacer

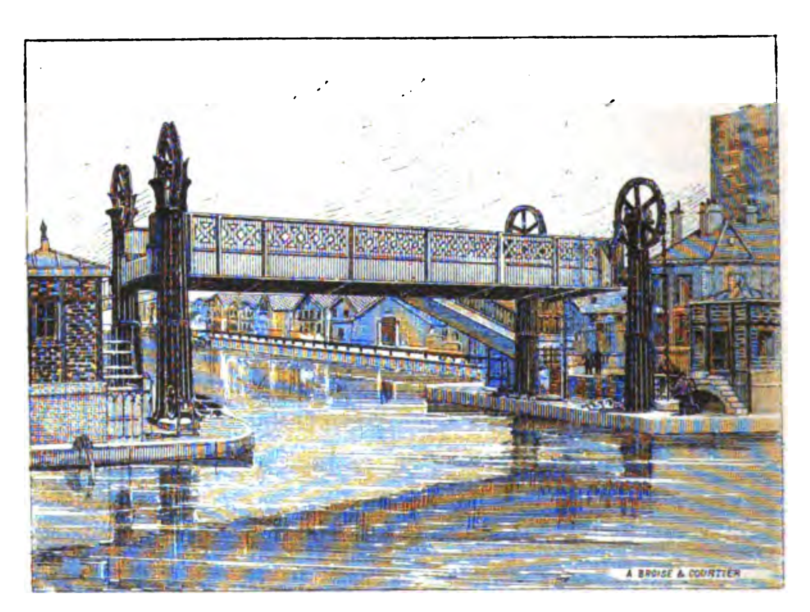


Fig. 172. — Pont-levant de la rue de Crimée (vue perspective).

de temps en temps, pour laisser un libre parcours à la navigation. Au lieu de recourir, dans ce but, à la solution classique des ponts tournants, on élève le tablier d'une hauteur de $2^m,70$ et on le ramène en place alternativement. On a eu soin d'équilibrer la plus grande

[1] *Génie civil*, t. V, p. 257.

partie du travail de la pesanteur, au moyen de contrepoids, de chaînes et de poulies. Une seule cylindrée d'eau motrice, d'un mètre cube environ, suffit pour opérer l'ascension, qui dure un quart de minute. Le cylindre est horizontal. Sa tige, munie d'une double

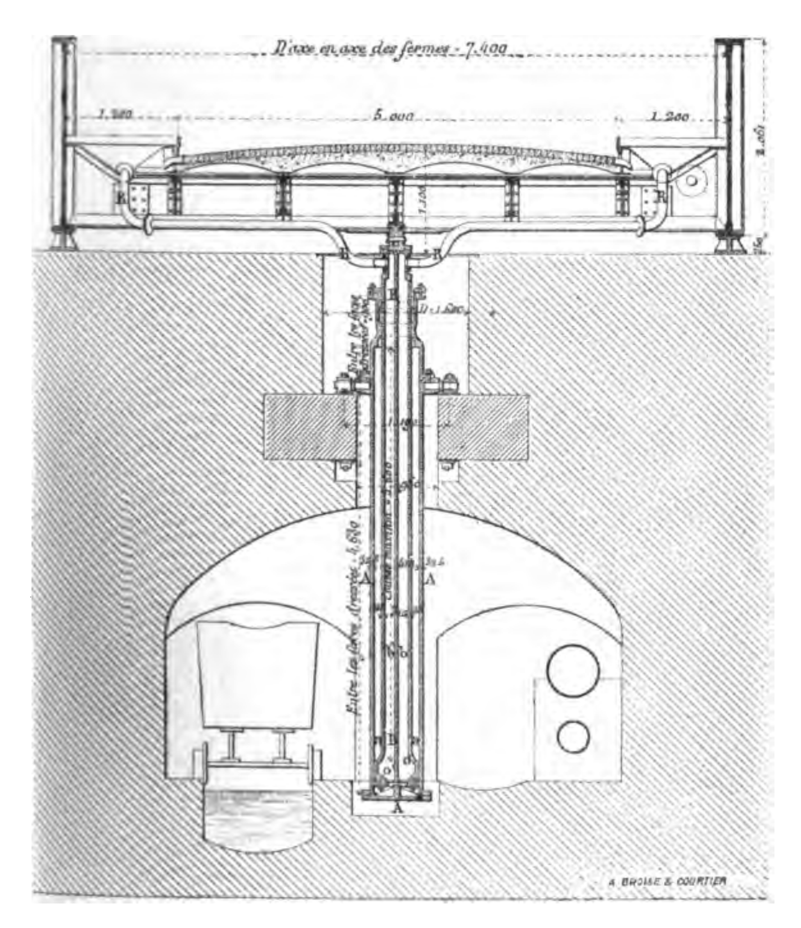


Fig. 173. — Pont-levant de la rue de Crimée (presse levante).

crémaillère de part et d'autre, actionne deux pignons, et, par leur intermédiaire, des roues dentées qui commandent des crémaillères verticales portées par les tiges de suspension.

Un semblable ouvrage existe à Paris, rue de Crimée (fig. 172, 173). Substitué à un pont tournant qui ne laissait qu'un passage de

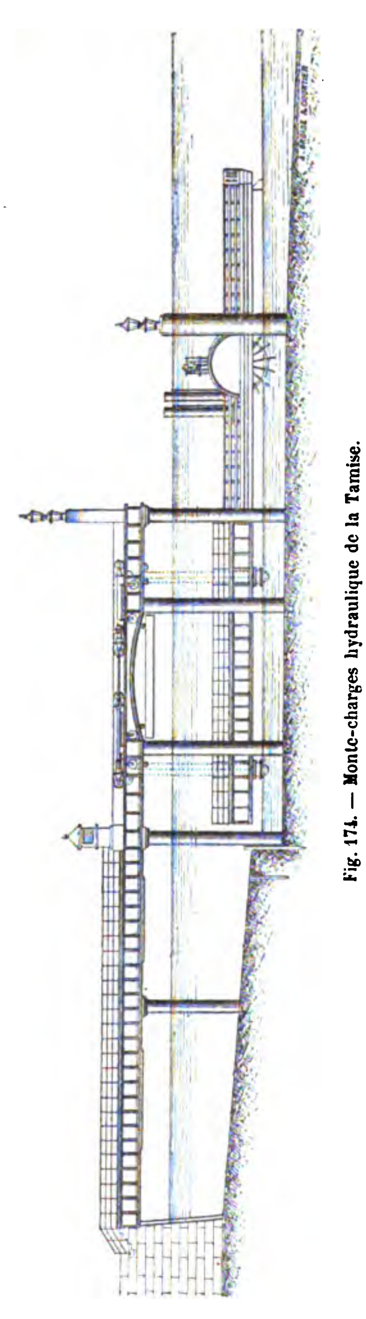


Fig. 174. — Monte-charges hydraulique de la Tamise.

7m,80, il a permis de porter la largeur de la passe à 15 mètres (1). La longueur du tablier est de 20 mètres, sa largeur 7m,63, le poids de la partie mobile 85 tonnes, la levée 4m,60 (2).

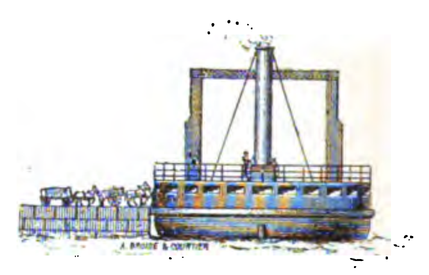


Fig. 175. — Steamer-élévateur Simons (marée haute).

On a établi sur la Tamise, entre les docks de Londres et ceux du commerce (3), un appareil d'embarquement destiné à racheter la différence

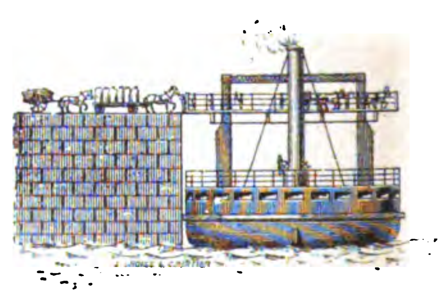


Fig. 176. — Steamer-élévateur Simons (marée basse).

de niveau qui existe entre le quai et

(1) *Génie civil*, t. VII, 2 mai 1885; t. VIII, p. 1 et 18. — *La Nature*, 1885, 2e semestre, p. 105.

(2) Un projet de pont sur la Tamise vient de recevoir la sanction du Parlement. La travée centrale sera formée d'un pont-levant, pour permettre le passage des navires (*Génie civil*, t. VII, p. 127; t. VIII, p. 130).

(3) *Annales des travaux publics*, 1880, p. 452.

les bacs à vapeur (fig. 174). Le service des bateaux amène, à chaque quart d'heure, d'un bord à l'autre, jusqu'à douze voitures à deux chevaux. Une plate-forme de 21^{m},35 sur 10^{m},70 les reçoit, et prend un mouvement ascensionnel, sous l'empire de quatre presses hydrauliques attelées aux chaînes de suspension. L'ascension est de 7 mètres sur l'une des rives, et de 7^{m},90 sur le bord opposé. Sa durée ne dépasse pas 2 minutes. Celle de la traversée du fleuve, qui présente près de 300 mètres de largeur, est de 4 minutes.

Dans le steamer-élévateur Simons, le tablier du pont est mobile, et peut être élevé par rapport à la coque dans diverses situations (fig. 175, 176), de manière à permettre l'embarquement et le débarquement à niveau, quel que soit l'état de la marée.

233 — *Ascenseurs à tige.* — Les élévateurs les plus simples en principe sont ceux dans lesquels le piston soulève directement le poids, qui fait alors corps avec lui.

Nous rencontrons d'abord cette donnée, sur une échelle réduite, dans le *marteau-pilon hydraulique*. La tige du piston, traversant le fond inférieur du cylindre, porte, à son extrémité, le mouton qu'elle soulève. Un déclanchement manœuvré à la main détermine la chute de ce dernier. Ces appareils présentent, sur les marteaux-pilons à vapeur, cet avantage, qu'ils peuvent maintenir le mouton soulevé pendant une durée quelconque sans aucune déperdition d'énergie, tandis que, avec ces derniers, le rayonnement et la conductibilité déterminent une perte de vapeur proportionnelle au temps.

Les *basculeurs hydrauliques* sont analogues. Ils soulèvent de biais le plateau, en y déterminant une inclinaison destinée à produire le glissement du chargement au dehors, ou le roulement des véhicules qui le renferment [1].

234 — Lorsque la hauteur à parcourir, et, par suite, la longueur de la tige prennent une grande importance, l'appareil reçoit le

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 63 et 72.

nom d'*ascenseur à tige* (1). Sous sa forme la plus habituelle, il présente, sur le sommet de cette dernière, une cabine dans laquelle se placent les personnes qui veulent se faire monter à un étage supérieur. La tige plonge, à travers un presse-étoupes, dans un cylindre moteur établi à l'intérieur d'un puits spécial, dont la profondeur est égale à la longueur de cette tige, et, par suite, à celle de la course. Un clapet d'admission introduit l'eau motrice et détermine l'ascension. Un robinet de fuite permet la décharge de ce liquide et la descente du système.

Pour n'avoir à dépenser que la quantité d'eau nécessaire à l'élévation du poids utile, on équilibre le poids mort à l'aide d'un lourd contrepoids et de chaînes de suspension passant sur des poulies. On calcule ces chaînes de manière que la variation produite par leur passage d'un côté à l'autre de la poulie compense l'augmentation de poids que subit la tige, en raison du principe d'Archimède, au fur et à mesure de son émersion hors du bain liquide. En vue de la rupture possible de ces chaînes, laquelle entraînerait la chute de tout le système, on dispose un frein hydraulique (n° 76), destiné à modérer la force vive de cette descente. Il reste également à obvier à l'éventualité de la rupture de la tige elle-même, qui provoquerait la chute du contrepoids, en même temps que l'écrasement de la cabine à la partie supérieure; et enfin à la possibilité de la sortie du piston élévateur hors du cylindre, inévitablement suivie de son déversement.

M. Heurtebize a tourné d'une manière ingénieuse ces diverses difficultés (2). Il écarte la possibilité de la rupture des chaînes par la suppression pure et simple de ces organes, en établissant une relation hydraulique entre les contrepoids et l'élévateur. Il éloigne le danger de la rupture de la tige en doublant cette pièce, qu'il constitue d'un noyau central et d'une enveloppe concentrique, assemblée avec elle de distance en distance. Il prévient enfin la sortie. en perçant une série de trous dans la partie inférieure de cette

(1) Ellington. Ascenseurs hydrauliques (*Revue industrielle*, 3 mai 1882, p. 173). — On hydraulic lifts for passengers and goods (*Proceedings of the Institution of mechanical Engineers*, janvier 1882, p. 119). — Hydraulic machinery, by Professor Perry (*Scientific American supplement*, 6 janvier 1883, p. 5835).

(2) H. Mamy (*Génie civil*, t. IV, p. 368).

enveloppe. Si cette travée à claires-voies commence à sortir du presse-étoupes, l'eau motrice se répand au dehors, en supprimant la tension et le pouvoir élévatoire.

Par la suppression des chaînes, M. Heurtebize se prive du moyen de régularisation dont nous avons parlé, et qui est réclamé par l'influence du principe d'Archimède. Pour en tenir lieu, cet inventeur forme le contrepoids d'un plongeur A (fig. 177, 178), qui peut sortir d'un cylindre B ou y rentrer alternativement. Cette capacité est mise en communication, par la tubulure C, avec le cylindre D, d'où émerge la tige E de l'ascenseur. Une certaine quantité d'eau, toujours la même, va et vient de l'un à l'autre de ces deux cylindres, le contrepoids descendant lorsque l'ascenseur monte, et réciproquement. Leurs poids sont égaux pour l'instant précis où ce dernier se trouve au milieu de sa course. Il devient donc trop faible quand la cabine s'élève au-dessus de ce point, et trop fort si elle s'abaisse au-dessous. Mais la tête du plongeur A s'articule avec les tiges E, E' de deux cylindres à rotule, dont les pistons reçoivent en permanence la pression de l'eau en charge. Ces corps de pompe prennent la position horizontale pour le milieu de la

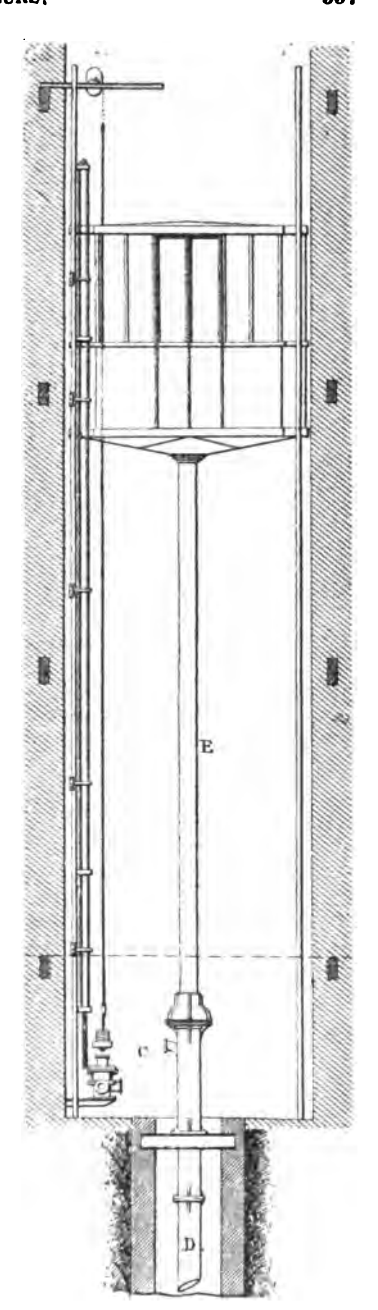


Fig. 177. — Ascenseur à tige Heurtebize (élévation).

course, au moment où l'équilibre a lieu de lui-même. En deçà et

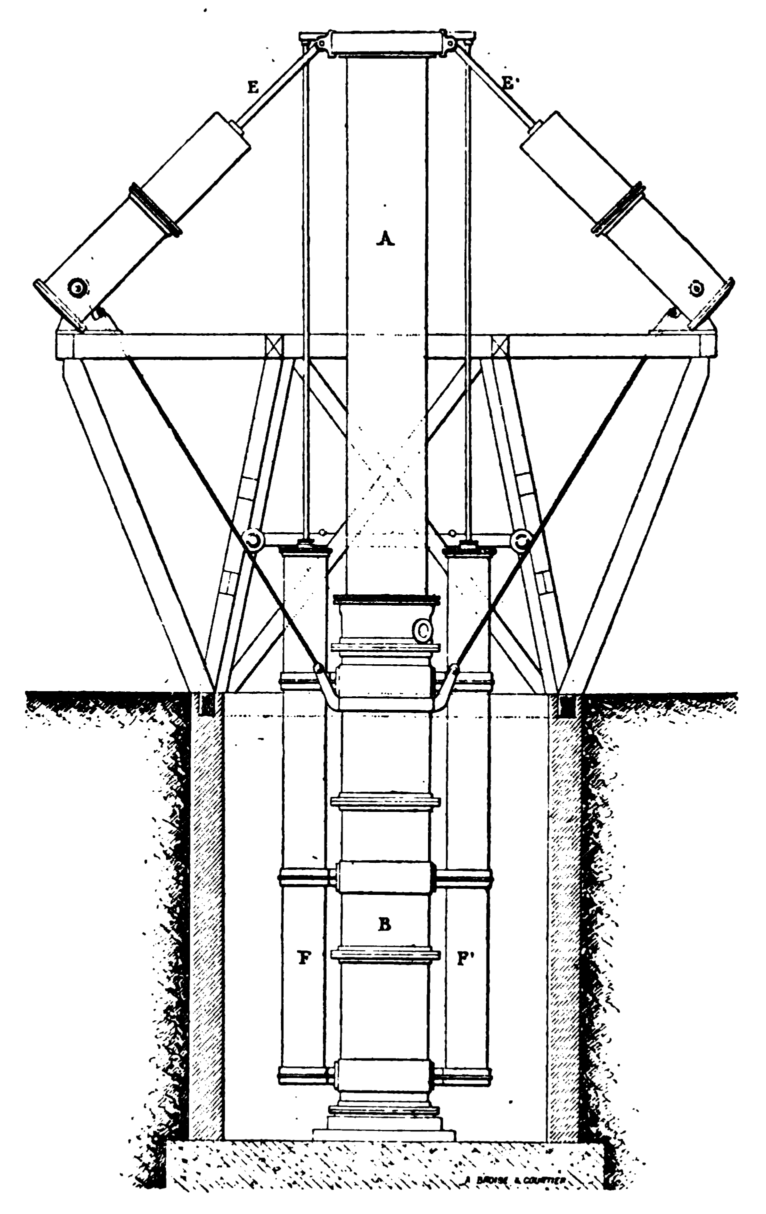


Fig. 178. — Ascenseur à tige Heurtebize (appareil compensateur).

au delà, ils s'inclinent dans deux sens contraires au-dessus et au-

dessous de l'horizontale. Les composantes verticales de l'action qu'ils exercent sur le plongeur changent donc de sens à cet instant moyen; et leur valeur absolue, nulle au milieu de la course, va en croissant jusqu'aux extrémités, de manière à contre-balancer l'influence opposée que nous venons de signaler.

L'eau motrice à dépenser pour l'élévation des fardeaux accomplit son travail dans six corps de pompe latéraux F, F', F'',... On accouple deux à deux, pour la symétrie, ceux qui sont diamétralement opposés. Ces divers groupes reçoivent le liquide à travers des clapets, calculés de telle manière qu'ils se ferment pour une vitesse déterminée, croissante de l'un à l'autre de ces couples. Il s'ensuit que, si le fardeau à élever est trop faible, le système prend une certaine accélération. L'eau se lance alors, et ferme un nombre de clapets d'autant plus grand que l'insuffisance est plus marquée. Dès lors les cylindres qui leur correspondent ne se remplissent pas, et l'on ne dépense, d'après cet artifice, qu'un volume sensiblement proportionnel au travail à produire.

Une fois que l'eau a rempli ces cylindres, en déterminant la descente du plongeur A, le refoulement du matelas liquide à travers la tubulure C, et l'ascension de la tige E, il s'agit, inversement, d'effectuer la descente. A cet effet, un distributeur manœuvre un tiroir à coquille analogue à celui des machines à vapeur, lequel supprime la communication avec l'eau en charge, et l'ouvre avec le canal de fuite. La commande s'effectue à la main, suivant les besoins de la manœuvre.

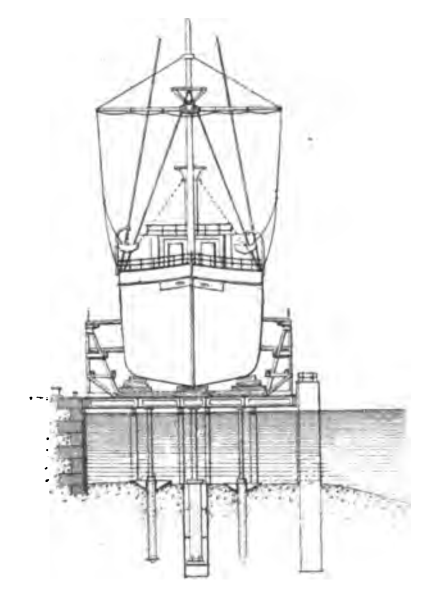


Fig. 179. — Dock flottant (élévation).

235 — Comme pour les élévateurs à chaîne, on est arrivé à manœuvrer, au moyen des appareils à tige, des poids énormes.

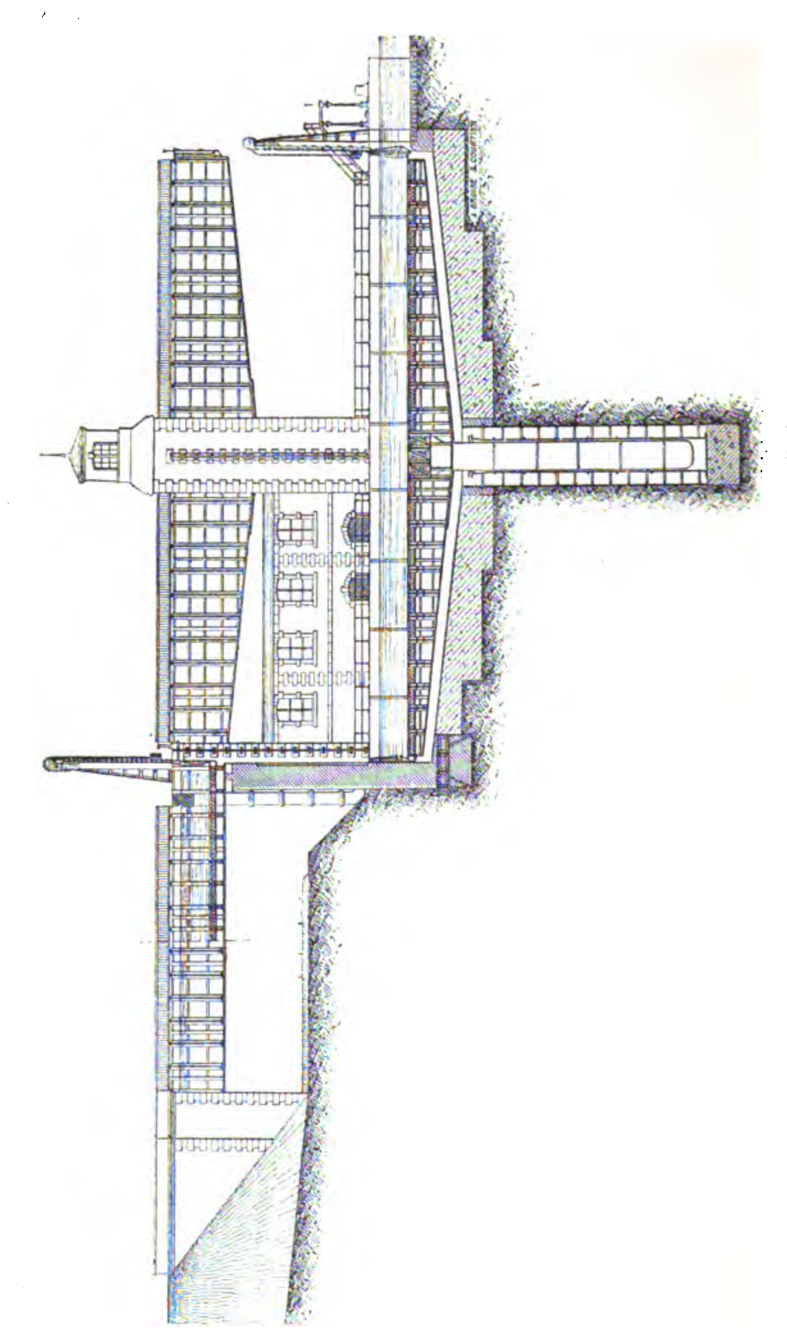


Fig. 180. — Ascenseur-écluse des Fontinettes (coupe longitudinale).

MM. Clark et Stanfield ([1]) ont disposé un ascenseur destiné à remonter à un niveau supérieur un train entier de chemin de fer.

M. Eads ([2]) a proposé, pour la traversée de l'isthme de Tehuantepec, un chemin de fer sans courbes, dont le tracé forme une ligne brisée. On installerait, aux divers sommets de cette dernière, des plaques tournantes flottantes. Cette voie serait parcourue par d'immenses trucs portant les navires, soulevés hors de l'eau à l'aide

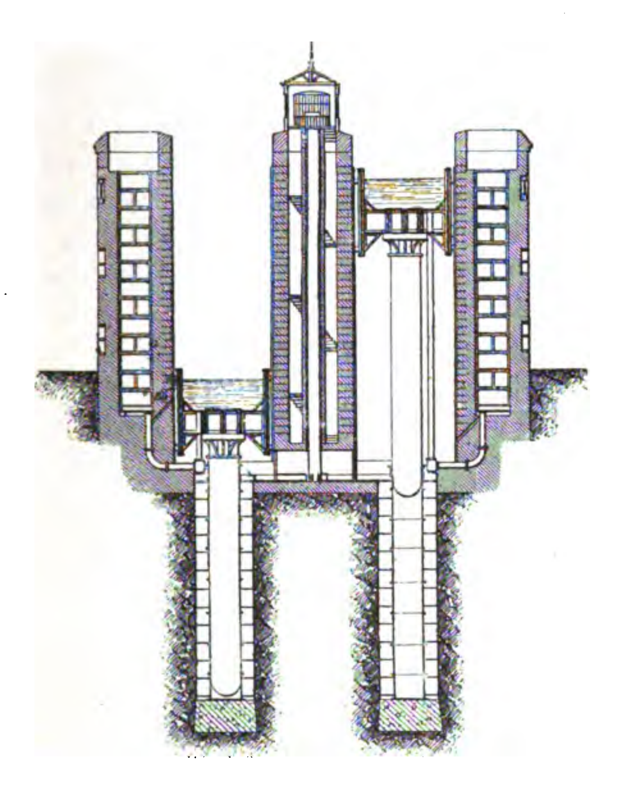


Fig. 181. — Ascenseur-écluse des Fontinettes (coupe transversale).

de pistons hydrauliques (fig. 179), ou de docks flottants. On les y calerait avec d'autres pistons, manœuvrant, à l'aide de joints

([1]) Frederick Colyer. *Hydraulic lifting and pressing machinery*, planche 71. — *Scientific American supplement*, 24 mars 1883, p. 178.

([2]) *Génie civil*, IV, 102 ; V, 321 ; VI, 182. — Colyer. *Hydraulic lifting and pressing machinery*, planche 24. — *Scientific American supplement*, 24 mars 1883, p. 178.

universels, des plaques garnies de caoutchouc, pour soutenir avec précision les diverses parties de la coque.

236 — On a enfin créé récemment une application très remarquable des ascenseurs à tige et à presse hydraulique, pour remplacer les écluses ordinaires (n° 237), en vue de diminuer la dépense d'eau et d'accélérer le trajet.

Des sas mobiles sont établis en prolongement des deux biefs (fig. 180, 181). Ils sont munis, ainsi que les biefs eux-mêmes, de portes à joints de caoutchouc, que l'on ouvre quand on veut permettre aux bateaux d'entrer et de sortir, et que l'on referme pour rendre aux sas leur indépendance. Ces derniers sont supportés par les tiges de deux énormes presses hydrauliques, dont la construction a présenté les plus grandes difficultés. On met ces presses en communication l'une avec l'autre, et on leur donne des courses égales à la différence de hauteur des biefs. Une valve permet d'ailleurs d'intercepter cette communication, de manière à arrêter à volonté le mouvement.

Les deux sas étant de construction identique, présenteront le même poids, s'ils sont remplis d'une même hauteur d'eau. Il sera, pour cela, indifférent qu'ils contiennent ou non un bateau, quel que soit le poids de ce dernier. En effet, d'après le principe d'Archimède, le poids du corps flottant est égal à celui de l'eau supprimée par sa présence. Les deux systèmes s'équilibrent donc (1), et, théoriquement, le travail de la pesanteur se trouve compensé, dans les deux mouvements inverses qu'ils prennent lorsque le liquide qui remplit les presses, vient à passer de l'une dans l'autre. Il suffit, d'après cela, de donner une surcharge convenable à celui des deux sas qui se trouve actuellement à la partie supérieure, pour provoquer sa descente, et, par cela même, l'ascension du système conjugué. Le mouvement est d'ailleurs modéré à l'aide de la valve régulatrice qui permet la communication des deux corps de pompe.

(1) A l'écluse de Taunton, en Angleterre, les deux sas s'équilibrent à l'aide de chaînes passées sur des poulies, en raison de la faible hauteur qu'il s'agit de racheter. M. Seiter avait également proposé l'emploi de quatre gazomètres, destinés à soutenir le poids du système sur de l'air comprimé. Mais on s'est arrêté définitivement à celui des ascenseurs directs (*La Nature*, 7 juillet 1880, p. 91. — *Génie civil*, t. IV, p. 400).

Ce dispositif a été employé pour la première fois, en 1885, par MM. Edwin Clark et Duer à Anderton, sur le canal de la Weaver (1), et depuis lors aux Fontinettes, sur le canal de Neufossé (2). Les principaux éléments de ces deux remarquables créations sont résumés dans le tableau suivant.

ÉLÉMENTS DE LA CONSTRUCTION	ANDERTON	FONTINETTES
Longueur	$22^{m},80$	$40^{m},00$
Largeur.	$4^{m},73$	$5^{m},60$
Profondeur.	$1^{m},50$	$2^{m},00$
Dénivellation.	$15^{m},35$	$13^{m},13$
Diamètre des pistons.	$8^{m},95$	$2^{m},00$
Pression.	$37^{kg},40$	$25^{kg},00$

Vers la fin de la course de l'appareil d'Anderton, le bac descendant s'immerge dans le bief inférieur. Il perd donc de son poids, l'équilibre est détruit, et le système ne pourrait achever seul le trajet. Mais on interrompt alors la communication, afin de permettre à ce bac de terminer sa descente, tandis que l'eau sous pression d'un accumulateur intervient pour compléter l'ascension du bac montant. Une influence analogue se manifeste, au moment où le sas inférieur doit sortir de l'eau en remontant. Il augmente alors de poids, et l'on ne peut maintenir l'équilibre initial qu'à la condition

(1) *Génie civil*, III, 176. — *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'industrie minérale de Saint-Étienne*, 1879, p. 24. — *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 20 avril 1884, p. 678. — *La Houille*, 13 janvier 1884. — *Annales industrielles*, 19 novembre 1876. — *Tydschrift van het koninglyk Instituut van Ingenieurs*, 1881-1882, p. 101.

(2) *Génie civil*, VI, 101. — Harrand. *Mémoires de la Société des ingénieurs civils*, 17 octobre 1884. — *Portefeuille économique des machines*, 3e série, t. IX, p. 198. — *La Nature*, 7 juillet 1880, p. 91. — *Revue industrielle*, 5 octobre 1881, p. 394.

Une écluse à ascenseur a été également établie au Great-Western-canal.

Un projet de canal de la Garonne à la Haute-Loire a été formulé par M. Barraud, à l'aide de 32 ascenseurs, destinés à tenir lieu de 320 écluses ordinaires (*Génie civil*, t. IV, p. 400. — *Mémoires de la Société des ingénieurs civils*, 18 mai 1883).

Un projet analogue concerne encore le canal de Bruxelles à Charleroi (Mémoire à l'appui du projet de MM. Claes et Fléchet, Liège, 1880. — *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 20 juillet 1883, p. 290).

d'évacuer une partie de l'eau qu'il renferme. Des siphons sont ingénieusement disposés à cet effet, et l'émersion du bac les amorce automatiquement.

Ces détails d'exécution ne se rencontrent pas aux Fontinettes, où le sas descend dans une cale sèche. Mais, en revanche, il devient, par cela même, nécessaire d'apporter une plus grande précision vers la fin des manœuvres, afin d'éviter un choc final. Or, il ne faut pas perdre de vue que l'équilibre tend à se modifier peu à peu, par la sortie progressive du piston à travers sa garniture. On a corrigé cette perturbation à l'aide de tuyaux articulés, qui mettent les sas en communication avec des réservoirs, d'une hauteur égale à la distance des biefs. De cette manière, au fur et à mesure que la descente du sas lui fait perdre de son poids, par l'immersion de la tige du piston, il reçoit un volume d'eau précisément égal, qui rétablit l'équilibre.

§ 3

ECLUSES

237 — Les *écluses* fournissent, pour l'élévation des bateaux, une solution qui est devenue classique, bien qu'inférieure théori-



Fig. 182. — Écluse (plan horizontal).

quement à la précédente ([1]). Pour établir la communication entre un *bief supérieur* A (fig. 182) et un *bief inférieur* B, on les relie

([1]) Les écluses ont été imaginées en 1480 par Léonard de Vinci, et appliquées pour la première fois en France au canal de Briare (*Essai sur les œuvres physico-mathématiques de Léonard de Vinci*, lu par Venturi à l'Institut en 1797).

par un compartiment spécial C appelé ***sas***, que l'on mettra successivement en rapport avec chacun d'eux, au moyen de *portes de flot* D, E. Ces portes sont arc-boutées l'une contre l'autre, de manière à résister à la pression qu'elles supportent. On les soutient à la base au moyen d'un *seuil busqué*, disposé suivant les côtés d'un angle obtus. Des logements sont pratiqués dans les *bajoyers*, pour que les portes puissent s'y effacer complètement. Ces murs portent également des rainures préparées à l'avance pour y noyer un barrage à poutrelles (p. 92, note), quand il devient nécessaire d'effectuer des réparations.

On ménage, à la base des portes d'écluses, des ouvertures rectangulaires fermées par des vannes à coulisse, ou *vantelles*. Quand on veut effectuer une manœuvre, on commence par soulever ces vantelles à l'aide de crémaillères et de manivelles, pour donner accès à l'eau supérieure, et rétablir l'égalité de niveau entre le sas et celui des deux biefs que l'on doit mettre avec lui en communication. On ouvre ensuite les portes, et on les fait franchir par le bateau [1]. Au moyen de deux manœuvres successives, ce dernier passe de l'un à l'autre des deux biefs, en traversant le sas.

L'écluse se comporte, d'après cela, comme un moteur hydraulique, à l'aide duquel on détermine l'ascension d'un poids, au prix de l'abaissement d'une certaine quantité d'eau. Cherchons à en évaluer le rendement.

238 — Appelons H la hauteur qui sépare les deux biefs, et V le volume du sas, ou plus exactement celui d'un prisme qui aurait pour base la section horizontale de ce dernier, et pour hauteur H. Soit h le *tirant d'eau* du bateau et v son *déplacement*, c'est-à-dire le volume liquide qui présente le même poids. Cette quantité pouvant être approximativement considérée comme un prisme, de base peu

[1] Ces manœuvres sont forcément d'une grande lenteur. Pour les accélérer, M. Welch a imaginé un dispositif qui permet de les exécuter à l'aide d'une machine à vapeur (*Annales des travaux publics*, mai et juillet 1881, pages 363 et 412). M. l'ingénieur en chef des Ponts et chaussées Flamant a, de son côté, appliqué à ces opérations la force hydraulique (*Portefeuille économique des machines*, 3e série, t. VIII, p. 102). On s'est également posé le même problème en Amérique (*Annales des travaux publics*, décembre 1881, p. 527).

différente de celle du sas [1], nous admettrons l'égalité :

$$\frac{V}{v} = \frac{H}{h}.$$

Pour élever le bateau de ABCD en A'B'C'D' (fig. 183), il faut que la surface de l'eau EACDBF devienne E'A'C'D'B'F', et, pour cela, que le bief supérieur fournisse au sas un volume d'eau égal à l'es-

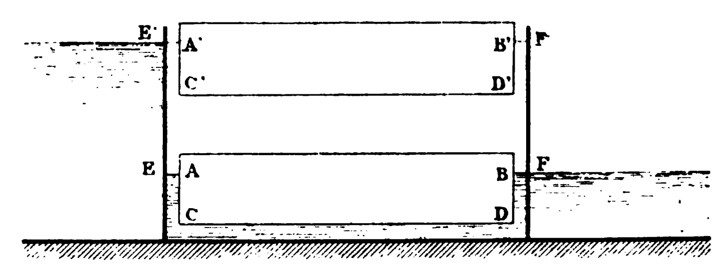


Fig. 183. — Écluse (figure schématique).

pace compris entre ces deux surfaces, lequel est évidemment équivalent au parallélépipède rectangle EFE'F', c'est-à-dire à V. Mais, en outre, au moment où le bateau A'B'C'D' s'engagera dans le bief supérieur, après l'ouverture des portes d'amont EE', le vide A'B'C'D', c'est-à-dire v, devra encore être comblé par une rentrée d'eau équivalente, effectuée aux dépens du bief supérieur. Ce bief a donc dû fournir en tout, pour l'élévation d'un bateau, le volume d'eau $V + v$, lequel se trouvera ultérieurement évacué dans le bief inférieur par l'ouverture des portes d'aval FF', quand on voudra procéder à l'ascension d'un nouveau bateau, et, pour cela, commencer par le faire passer à niveau, du bief inférieur dans le sas.

En résumé donc, pour élever le poids du bateau qui est, d'après le principe d'Archimède, égal à ϖv [2], on a fourni, sur la même hauteur, un poids moteur $\varpi\,(V + v)$. Le rendement sera, d'après cela :

[1] Un certain jeu est, en effet, nécessaire afin de pouvoir effectuer les manœuvres, et de ne pas trop étrangler la veine liquide qui reflue en arrière par les côtés du bateau, lorsque celui-ci abandonne le bief pour pénétrer dans le sas, ou réciproquement.

[2] En représentant par ϖ le poids spécifique de l'eau.

$$\frac{v}{V+v},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{1+\frac{V}{v}},$$

ou encore :

$$\frac{1}{1+\frac{H}{h}}$$

Or, h est déterminé, assez constant de sa nature, et peu considérable d'après les données ordinaires de la batellerie. Au contraire H dépend des conditions topographiques, et pourra devenir très important. On en doit conclure que l'écluse constitue un très mauvais récepteur, lorsque l'on se place, dans l'appréciation de son utilité, au point de vue exclusif de l'emploi de la chute d'eau pour l'élévation des fardeaux.

Il est même nécessaire d'ajouter que ϖv représente l'ensemble du poids mort et du poids utile, tandis que le véritable rendement ne devrait s'apprécier que par le rapport du poids utile au total fourni $\varpi(V+v)$, ce qui donnerait un quotient encore moins satisfaisant.

239 — Envisageons, en second lieu, le fonctionnement inverse de l'écluse, c'est-à-dire la descente d'un bateau du bief supérieur au bief d'aval, ou de A'B'C'D' en ABCD. On commencera, pour cela, par évacuer, dans ce bief inférieur, tout le volume compris entre EACDBF et E'A'C'D'E'F', c'est-à-dire encore V. A la vérité, lorsque le bateau franchira les portes d'aval FF', il s'opérera une rentrée v au détriment de ce bief. On ne lui aura donc fourni, en définitive, que $V-v$. Mais l'écluse ne s'en présente pas moins sous un jour encore plus défavorable que dans le cas précédent, puisque, sans aucune élévation à produire, on se trouve conduit à dépenser une certaine quantité de fluide moteur, à savoir le volume d'eau $\varpi(V-v)$, ou la somme d'énergie $\varpi(V-v)H$.

240 — Il devient toutefois nécessaire d'ajouter à ces aperçus la remarque suivante. Si l'on conçoit, d'une part, qu'une longue durée soit employée sur le canal à remonter des bateaux, sans en redescendre aucun, ou réciproquement, les caractéristiques de chacune de ces deux phases seront bien celles que nous venons de présenter. Mais, en réalité, il n'en est pas ainsi, et les deux opérations s'entrecroisent d'une manière plus ou moins régulière. Le type opposé au précédent serait celui dans lequel le service serait exactement réglé, de manière qu'à chaque ascension succédât une descente, pour laquelle on profiterait du remplissage du sas qui vient d'être effectué en vue de la montée. Supposons de plus que la batellerie ne quitte pas cette branche de canal, pour s'engager dans d'autres parties du réseau de la navigation intérieure, et que les bateaux n'exécutent que des allées et venues sur cette direction unique. On pourra, dans ce cas, au bout d'un temps suffisant, les retrouver tous dans leurs situations initiales. Dès lors, au lieu d'appliquer, à deux bateaux individuellement distincts, l'ascension et la descente qui se succèdent immédiatement, il sera loisible de grouper ensemble par la pensée, sur un seul d'entre eux, les déplacements d'eau qui ont été effectués respectivement à l'occasion de sa montée et de sa descente.

Dans ces nouvelles conditions, on aura à fournir *par bateau*, pour la *double manœuvre alternative* de l'allée et du retour, la dépense totale ϖV. En effet, la montée a exigé le volume $V + v$, mais la rentrée ultérieure du bateau dans le sas, lors de son retour, a fait refluer dans le bief supérieur le volume v. En somme donc, celui-ci n'a eu à fournir, en ce qui concerne l'ensemble des deux manœuvres, que V. Le rendement sera par conséquent :

$$\frac{v}{V},$$

ou, si l'on veut :

$$\frac{h}{H},$$

pour la double opération de l'ascension d'un chargement utile [1] combinée avec la montée et la descente successive du poids mort.

241 — Telle est la nouvelle caractéristique du travail de l'écluse, plus judicieuse que les précédentes, et cependant trop avantageuse, car il sera ordinairement impossible d'obtenir la complète régularité qui vient d'être supposée. Comme d'ailleurs ce rapport reste encore très faible, en général, il y a peu à modifier, en définitive, la formule du jugement défavorable qui a été porté tout à l'heure, au point de vue du rendement, sur cet organe, si ingénieux d'ailleurs et si précieux pour les communications.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner qu'un grand nombre d'inventeurs aient successivement proposé des créations de tout genre, destinées à modifier le mode de fonctionnement, en vue de diminuer la dépense. Malheureusement cette amélioration ne s'obtient, le plus souvent, qu'au prix de complications qui dénaturent la simplicité du système. Aussi ces diverses solutions se sont-elles peu répandues, malgré l'ingéniosité qui distingue la plupart d'entre elles.

Nous avons déjà rencontré, dans cet ordre d'idées, le moyen radical de l'emploi des ascenseurs (n° 236). Je citerai encore le bassin d'épargne latéral établi en 1640, et encore en usage aujourd'hui, sur l'écluse de Bouzingues en Belgique [2]; le système de Bétancourt à flotteur et contrepoids [3]; celui de Bogaerts à flotteur et triple compartiment [4]; celui de Logan, fondé sur ce qu'il appelle la détente des masses liquides [5]; l'écluse hydro-pneumatique du colonel Congrève; l'écluse Burdin à piston et siphon; l'emploi, dû à Busby, d'un flotteur et d'un double compartiment [6]; celui d'un flotteur et d'un siphon par Girard [7]; le chariot de Mercadier; le

[1] Sous la réserve de l'observation déjà présentée, que ϖv ne comprend pas seulement le poids utile, mais aussi le poids mort.

[2] Minard. *Cours de navigation intérieure.*

[3] Mary. *Cours de navigation intérieure* à l'École des Ponts et chaussées, 1860, lithographié, p. 118.

[4] *Journal of Arts and Sciences.* Londres, I, 1820.

[5] Steevens (*Repertory of arts*, 1re série, 1804; 2e série, 1815).

[6] *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 21 octobre 1872, p. 926.

[7] Grand prix de mécanique de l'Académie des sciences en 1845. Rapport de Poncelet.

sas mobile de Solage et Bossut; le système mixte de Thilorier avec l'action des chevaux ou du vent; les plans inclinés de Reynolds et Fulton [1]. Ajoutons enfin à cette nomenclature l'écluse à colonnes oscillantes de M. de Caligny, dont nous donnerons dans un instant la description détaillée (n° 244). Elle est fondée sur un principe général, qu'il nous faut, pour cela, envisager d'abord en lui-même.

§ 4

APPAREILS A COLONNES OSCILLANTES

242 — M. le marquis de Caligny a introduit dans la pratique de l'hydraulique, des appareils très ingénieux, au sein desquels l'eau se trouve animée d'une translation rectiligne et alternative, comme cela a lieu pour les récepteurs à piston, mais avec cette différence que le piston lui-même a disparu [2]. Le but industriel que l'on s'y propose est l'élévation de l'eau. On emploie, à cet effet, sans aucun intermédiaire solide, l'*impulsion directe* qu'exerce le liquide chargé de force vive sur celui que l'on veut élever malgré la pesanteur [3]. M. de Caligny utilise, pour cela, les oscillations effectuées dans un tube vertical par l'eau animée d'une certaine vitesse, en raison de laquelle elle se porte alternativement, de l'un à l'autre de deux

(1) Les plans inclinés sont employés, avec traction de wagons à l'aide d'un câble, pour l'élévation des bateaux, sur le canal Morris et celui de Georgetown (Amérique), ainsi que sur les canaux de Monkland (Angleterre) et de l'Oberland (Prusse) (Hirsch. *Sur les élévateurs et plans inclinés pour canaux*, imprimerie nationale, 1881. — *Annales industrielles*, 20 novembre 1885. — Peslin. *Annales des Ponts et chaussées*, 1885).

(2) De Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines à colonnes liquides oscillantes*, 1883, pages 1, 97, 125, 149, 158, 346, 663, 672, 700, 727, 783, 857, 917, 925. — De Caligny (*Annales des mines*, 1833, t. XIII, p. 1). — De Caligny (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1838, p. 62; 1841, p. 89; 1850, p. 169). — De Caligny. Fontaine intermittente sous-marine (*Le Technologiste*, 1850). — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXVI, 801; C, 419. — Combes (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. VIII, p. 40). — Josua Field (*Transactions of civil Engineers*, 1836, I, p. 61).

(3) On a également fondé, sur le principe de l'impulsion directe de l'eau sur l'eau, la pompe Parson (Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 330). Cette catégorie d'élévateurs peut être rapprochée des appareils à impulsion directe de vapeur ou d'air comprimé (*ibidem*, p. 325 à 330).

niveaux, symétriques par rapport au plan d'équilibre. Commençons par étudier ce phénomène fondamental.

Pour envisager le cas le plus simple, nous prendrons un *tube en* U (fig. 184), dont la section constante sera représentée par Ω. Dans l'état de repos, il renferme, au-dessous du plan horizontal ab, une masse d'eau M. Supposons qu'une cause quelconque ait amené ce liquide dans une situation A_1B_1, telle que l'on ait :

$$A_1a = B_1b.$$

L'équilibre n'étant plus possible dans ces conditions, le fluide entrera en mouvement. Suivons-le, par la pensée, entre deux positions consécutives AB et A'B' séparées par l'intervalle de temps dt; et posons, pendant cette durée élémentaire, l'équation des forces vives. Si v désigne la vitesse, $Mvdv$ sera l'accroissement de la demi-force vive actuelle $\frac{1}{2}Mv^2$, et nous devrons l'égaler au travail développé par la pesanteur, pendant que le système passe de la situation AB à la position A'B' (¹). Le raisonnement déjà employé à cet égard (n° 25) montre que le travail effectué par la gravité sur la masse totale M, pendant ce déplacement infiniment petit, a la même valeur que celui qu'elle développerait, si l'on faisait parcourir à l'unique tronçon AA' tout

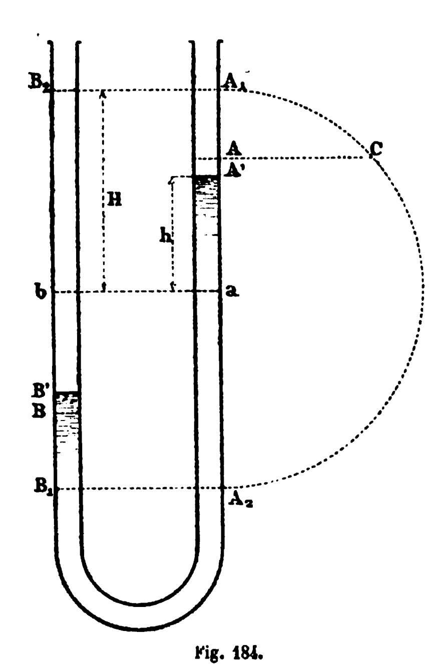


Fig. 184.

(¹) Nous négligeons, pour plus de simplicité, le frottement. Coriolis a tenu compte de cette influence (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. III, p. 437).

le chemin qui le sépare de BB'. Ce sera donc le produit du poids de ce volume infinitésimal par la dénivellation totale $2h$ qui sépare ces deux extrémités de la colonne liquide. Le premier de ces facteurs est le produit du poids spécifique ϖ par le volume que l'on obtient en multipliant la section Ω du cylindre élémentaire par sa hauteur. Cette dernière a pour valeur absolue $-dh$; puisque h est une fonction décroissante pendant la phase qui est représentée sur la figure.

On obtient ainsi l'équation :

$$Mvdv = -2\varpi\Omega h dh,$$

qui peut s'écrire plus simplement :

$$vdv = -k^2 h dh,$$

si nous désignons par k^2 cette constante essentiellement positive :

$$k^2 = \frac{2\varpi\Omega}{M}.$$

Il vient, en intégrant :

$$v^2 = k^2 (H^2 - h^2),$$

pour tenir compte de ce que le liquide part sans vitesse de la hauteur H. On tire de là, en remplaçant v par $-\frac{dh}{dt}$:

$$kdt = \frac{-dh}{\sqrt{H^2 - h^2}},$$

et, par une nouvelle intégration :

$$kt = \arccos \frac{h}{H},$$

sans constante, puisque t doit s'annuler avec l'hypothèse $h = H$ (¹).

Nous aurons donc définitivement, pour représenter les variations de la dénivellation h, la relation :

$$H = h \cos kt.$$

On en peut donner une représentation géométrique très simple. Décrivons, à cet effet, autour du point a, et avec le rayon H, un cercle que l'on supposera parcouru d'un mouvement uniforme par un mobile C, animé de la vitesse angulaire k. Le niveau A du liquide sera fourni, à chaque instant, par la projection de ce point, d'après la dernière équation. De plus la vitesse :

$$v = k\sqrt{H^2 - h^2},$$

sera représentée proportionnellement par la projetante elle-même :

$$AC = \sqrt{H^2 - h^2}.$$

Telle est, pour ce cas simple, la loi des oscillations de la masse liquide.

On voit par là que le mouvement s'étendra jusqu'à un niveau A_2, symétrique du premier par rapport à la position d'équilibre a, et qu'il variera ensuite périodiquement; sauf, bien entendu, l'influence des résistances passives, qui a été réservée dans le calcul précédent.

243 — Supposons maintenant que, dans un semblable mouvement, on prélève en A_1, à chaque oscillation ascendante, une portion du liquide, et que l'on restitue d'autre part un volume égal en B_1, en ayant soin, en outre, de fournir chaque fois, par un artifice quelconque, une quantité d'énergie égale au produit de ce poids par la hauteur 2H. On obtient ainsi, sans aucun mécanisme, un moyen

(¹) On pourrait, tout aussi bien, ajouter la constante $2n\pi$, en désignant par n un nombre entier, car telle est l'expression, plus générale que la valeur zéro, des arcs dont le cosinus est l'unité ; mais ce terme disparaîtrait immédiatement, quand nous prenons le cosinus des deux membres, et il est, dès lors, inutile de le spécifier.

de faire parvenir le liquide, du plan B_1 au niveau supérieur A_1. A la vérité, le principe formulé de cette manière reste tellement abstrait que l'on n'entrevoit que très confusément sa réalisation ; mais nous allons l'éclaircir par la description de deux applications qui en ont été faites, l'une par M. de Caligny lui-même, et l'autre d'après les principes posés par lui.

244 — *Ecluse à colonnes oscillantes.* — On voit dans la vallée de l'Aubois, près de Fourchambault (Nièvre), une écluse [1] munie

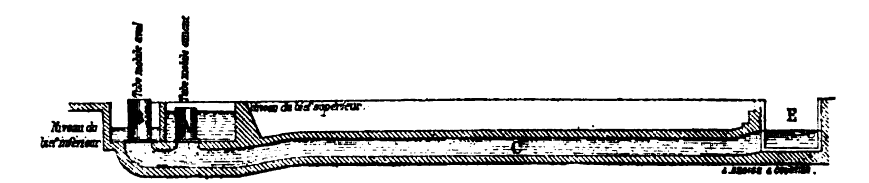


Fig. 185. — Écluse de Caligny à colonnes oscillantes (coupe verticale).

d'un jeu de colonnes oscillantes A et B (fig. 185, 186). Ces organes

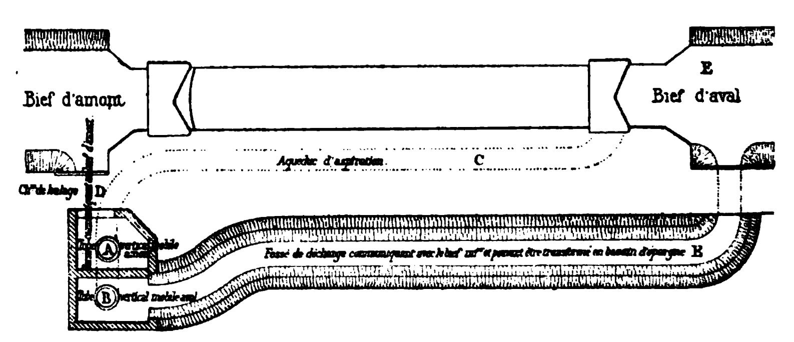


Fig. 186. — Écluse de Caligny à colonnes oscillantes (plan horizontal).

sont destinés à tirer parti de la force vive créée par l'écoulement

[1] De Caligny (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1867. — De Caligny (*Annales des mines*, 1838). — De Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau*, etc., 1883, t. II, p. 389. — Rapport de M. de Saint-Venant (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXVIII, 118). — Vallès (*Annales des Ponts et chaussées*, septembre 1880). — De Lagrené. *Cours de navigation intérieure*, t. III, pl. XV, XVI. — *Le Technologiste*, 1850, p. 501 et 605. — *La Nature*, 1882, 2e semestre, p. 210. — *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 1869. — Expériences (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, C, 1046 ; CI, 39).

de l'eau, en vue de remonter, dans le bief supérieur, une partie au moins de l'excès considérable de liquide que la manœuvre ordinaire dépense, ainsi que nous l'avons vu (n° 238), en sus de ce que réclamerait strictement le principe du travail.

Les tubes A et B sont ouverts aux deux bouts. On peut, à l'aide de leviers et de tiraudes, les soulever et les laisser retomber en place aux instants convenables. M. de Caligny a même réussi à rendre leur fonctionnement automatique (1). Un aqueduc inférieur C établit la relation de A avec l'enclave ménagée dans le bajoyer pour l'insertion de la porte d'aval. Le sommet de cette même colonne communique, par le bassin D, avec le bief supérieur. La colonne B s'implante, de même que la première, sur une tubulure ménagée dans le canal C. Quand on la soulève, elle donne issue au dégorgement de l'eau de ce tuyau, dans le fossé E qui conduit au bief d'aval.

Le fonctionnement s'effectue de la manière suivante. Supposons d'abord qu'il s'agisse de vider le sas, qui a été préalablement rempli. En soulevant la colonne B, on détermine un écoulement à travers le tuyau C et le fossé E, avec une vitesse qui s'accélère peu à peu sous l'influence de la charge, à partir de l'instant de l'ouverture. En laissant retomber le tube B, on intercepte brusquement cette évacuation. La force vive acquise a, dès lors, pour effet de faire monter l'eau à la fois dans A et B. La partie supérieure de cette dernière colonne est trop élevée pour pouvoir être atteinte par l'oscillation, mais celle-ci dépasse le sommet de A, et le liquide se déverse dans le bassin D, en faisant retour au bief supérieur. Cet effet est d'ailleurs de peu de durée, mais on répète successivement la même manœuvre.

S'il s'agit, en second lieu, de remplir le sas aux dépens du bief supérieur, on commence par soulever le tube A. L'eau d'amont s'engouffre dans la tubulure qui lui sert de base, et se rend dans le sas à travers le tuyau C. Une fois que la vitesse est établie, on laisse retomber brusquement A, en soulevant simultanément B. La veine liquide déjà lancée continue son trajet le long de C, en détermi-

(1) De Caligny (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 7 mai 1883, p. 1339). — De Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales*, etc., t. II, pages 552 et 941.

nant, à l'arrière, une succion qui exerce un appel sur l'eau du fossé E, et, par suite, sur celle du bief inférieur. Lorsque cet effet est amorti, on laisse retomber B en rouvrant A, et le même jeu recommence.

On voit ainsi qu'au lieu de procéder, comme à l'ordinaire, au remplissage du sas à l'aide du seul bief supérieur, pour effectuer ensuite l'évacuation totale de son contenu dans le bief d'aval, on emprunte une partie de ce remplissage au bief inférieur, en même temps que, pendant la phase de vidange, on renvoie une partie du liquide au bief d'amont; double influence qui réduit d'autant la dépense à fournir pour une manœuvre complète de l'écluse.

Des expériences prolongées ont montré à M. l'ingénieur en chef des Ponts et chaussées Vallès, que l'économie peut atteindre 30 ou 50 p. 100, suivant que l'on exécute les manœuvres d'une manière plus ou moins complète, sans être, ou non, limité par le temps et obligé de se presser, en raison de l'activité du trafic.

245 — *Épuisement des lagunes.* — M. Moro a installé, près d'Ostie (¹), un appareil à colonnes liquides oscillantes destiné à rejeter, dans la Méditerranée, les eaux de certaines lagunes inférieures à son niveau (²), et sans employer aucun moteur étranger autre que la force vive emmagasinée dans les vagues. La figure schématique 187 représente les éléments du dispositif adopté dans ce but.

Le niveau du marais se trouve en A, et celui de la mer en B. Ils sont séparés par la soupape C, ordinairement appliquée contre son siège par la pression supérieure de droite, de manière à empêcher l'eau de la mer d'envahir cette lagune. Un pavillon D subit l'impression des vagues qui viennent du large. Elles s'engouffrent dans ce tube, et y déterminent l'ascension de l'eau jusqu'à un niveau E

(¹) De Caligny. Appareils à élever l'eau et à faire des épuisements au moyen des vagues (*Recherches théoriques et expérimentales*, etc., p. 886). — De Caligny (*Bulletin de la Société philomathique*, 17 mai 1851, p. 27). — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 17 février 1873. — *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 23 septembre 1869. — *Giornale delle Arti e delle Industrie*. Florence, 22 décembre 1869, p. 802.

(²) Les marées sont négligeables sur cette côte, et l'on peut raisonner comme avec des niveaux fixes.

supérieur à B, et assez élevé pour que la pesanteur puisse, par son travail résistant, amortir la force vive emmagasinée. Cette situation E étant d'ailleurs incompatible avec l'équilibre, le liquide se dérobera ensuite de lui-même, et il exécutera une oscillation inverse jusqu'en E′, en s'abaissant jusqu'à une profondeur BE′ égale à la surélévation BE (n° 242).

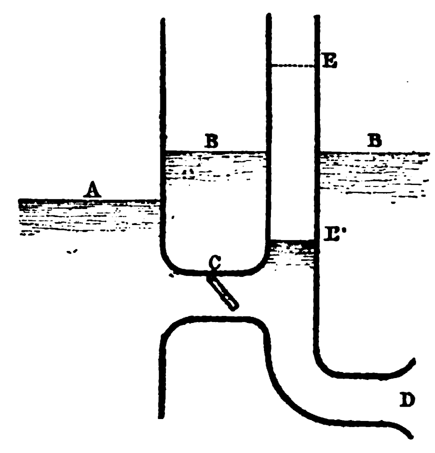


Fig. 187. — Appareil Moro (figure schématique).

Tant que les vagues auront trop peu d'importance pour que la demi-oscillation BE′ puisse atteindre la dénivellation BA, le clapet restera plaqué contre son siège par la pression E′A qui s'exerce de droite à gauche. Mais supposons, au contraire, l'intensité de la houle suffisante pour que E′ descende au-dessous de A. Il vient alors un moment où la soupape se trouve sollicitée par une pression plus forte à gauche qu'à droite. Elle s'ouvrira donc, et une certaine quantité d'eau s'écoulera de la lagune dans la mer. Bientôt l'oscillation rebrousse chemin, le niveau E′ regagne le point A, le clapet se referme, et la colonne continue à remonter de A en E. Puis une nouvelle évacuation se produit, lorsque le niveau recommence à s'abaisser au-dessous de A.

On voit donc, en définitive, que la mer ne saurait refluer dans le marais, tandis que l'eau de ce dernier se trouve rejetée progressivement dans le bief supérieur à son niveau, le travail nécessaire à la production de ce résultat paradoxal étant emprunté simplement à l'énergie accumulée par l'action du vent sous la forme de vagues.

§ 5

MARÉMOTEURS

246 — L'appareil dont je viens de parler nous fournit un premier exemple des *marémoteurs*, c'est-à-dire des récepteurs alimentés par l'énergie que l'on emprunte à la mer. Il en existe deux catégories très distinctes, que l'on pourrait appeler *statiques* ou *dynamiques*.

Avec cette dernière, on utilise, comme dans le système Moro (n° 245), la force vive empruntée aux courants atmosphériques pour la production des vagues ; et, avec les marémoteurs de la première classe, l'énergie emmagasinée sous forme de travail potentiel par le phénomène des marées ([1]), qui élèvent périodiquement la surface effective de l'Océan au-dessus de son niveau moyen ([2]). Celle-ci a donc une origine plus reculée encore, et provient directement de la gravitation exercée par le soleil et la lune.

On comprend, par cela seul, que les marémoteurs de la première catégorie seront seuls utilisables pour les mers intérieures, telles que la Méditerranée, au sein desquelles les marées se réduisent ordinairement à des proportions inutilisables ([3]). Dans cet ordre d'idées, M. Barreau a employé, en Égypte, des plans inclinés sur lesquels la vague glisse, en retombant par derrière dans un bief de retenue. On utilise ensuite, au moyen de turbines, la chute hydraulique ainsi créée.

M. Roche a proposé, de même, une sorte de radeau flottant, auquel la houle communiquerait un mouvement oscillatoire, destiné à être utilisé au moyen de mécanismes appropriés.

([1]) Rolland. *Emploi du flux et du reflux dans les marémoteurs*, 1871, in-8°. — De Caligny (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, LXXVI, 801). — Armengaud (*Publication industrielle*, XV, planche 19).

([2]) Cette hauteur, assez faible en général, peut s'élever, dans certaines localités, à des valeurs exceptionnelles. Elle atteint, *en moyenne*, à Granville, le chiffre de 6m,75; ce qui représente une dénivellation totale de 13m,50 (*Annuaire du Bureau des longitudes*, 1885, p. 125. — Hatt. *Notions sur le phénomène des marées*, in-8°, 1885).

([3]) E. Delaurier. Nouvelles recherches sur l'emploi de l'agitation des vagues pour obtenir des forces motrices (*les Mondes*, LVI, 276).

247 — En ce qui concerne l'action des marées, M. Tommasi a proposé, sous le nom de *flux-moteur*, un dispositif assez compliqué, qui paraît placé dans des conditions bien précaires ([1]).

M. Le Dantée vient d'imaginer, en vue de l'éclairage électrique des phares, un appareil destiné à utiliser les marées pour la production de la force motrice nécessaire ([2]).

Les marémoteurs vraiment classiques qui appartiennent à cette catégorie, se réduisent à des bassins de retenue, dans lesquels on reçoit la marée montante. On les ferme ensuite au moyen de portes de flot, au moment où la mer étale, et l'on dépense progressivement sur des turbines, jusqu'à la marée suivante, l'eau motrice ainsi accumulée ([3]).

Je citerai encore, à cet égard, les dispositifs ingénieux qui ont été employés par Perse à Dunkerque ([4]), pour utiliser, à l'aide de roues à aubes, les courants créés dans des canaux artificiels par les marées montante et descendante. Bélidor, de son côté, a proposé un certain nombre de combinaisons ([5]), destinées à s'adapter, dans le même but, à certaines configurations de l'embouchure des cours d'eau dans l'Océan.

§ 6

RÉCAPITULATION

248 — Arrivés au terme de cette longue énumération des récepteurs hydrauliques, il nous reste à indiquer brièvement d'après quelles vues devra se diriger, dans chaque cas, le choix de l'ingé-

([1]) Cazin (*Revue des Cours scientifiques*, 19 février 1870).

([2]) *Lumière électrique*, t. XIX, p. 476.

([3]) Plusieurs installations de ce genre se voient sur les côtes du Morbihan, du Finistère, d'Ille-et-Vilaine et des Côtes-du-Nord. La minoterie de M. Hedan, à Auray, emploie dix paires de meules avec une force de 120 chevaux (Tresca. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. X, p. 311). — *La Lumière électrique*, XIV, 450. — Appareils Fontaine et Brault, *Publication industrielle d'Armengaud*, XV, 219).

([4]) Bélidor. *Architecture hydraulique*, I, pages 304 et suivantes.

([5]) *Ibidem*.

nieur, pour adopter celui de tous qui convient le mieux aux divers ensembles de circonstances ([1]).

S'il s'agit, en premier lieu, non plus à proprement parler d'une chute hydraulique, mais de la puissance vive d'un cours d'eau, la roue pendante pourra seule convenir.

En ce qui concerne les chutes proprement dites, dans le cas où, en présence d'une puissance surabondante pour le but que l'on poursuit, on voudrait tout sacrifier à la simplicité, l'on aura recours à la roue en dessous à aubes planes. Mais, sauf cette circonstance particulière, ce moteur, si inférieur comme rendement, devra être mis hors de cause, et la discussion restera limitée entre tous les autres. Elle procédera, d'une part, d'après l'importance de la hauteur de chute H, et, dans chaque catégorie de hauteurs, d'après celle du débit P.

Pour les chutes minimes, inférieures par exemple à un mètre, si le débit est faible de son côté, l'on aura recours à la roue Sagebien. S'il est considérable, on adoptera la turbine noyée ou à siphon.

Pour les faibles chutes, comprises entre 1 et 3 mètres, si le débit est restreint, on emploiera encore la roue Sagebien ; pour un débit moyen, la roue de côté radiale conduite plus rapidement ; et enfin, pour un grand débit, la roue Poncelet menée vite, ou la turbine.

Pour des chutes moyennes, s'étendant entre 3 et 12 mètres, on aura recours à la roue en dessus avec les moindres débits, et à la turbine, pour les cours d'eau plus importants.

Pour les grandes chutes, comprises entre 12 mètres et les chiffres les plus considérables, on se servira de la machine à colonne d'eau avec les débits restreints, et de la turbine pour les grandes dépenses.

On remarquera que la turbine fournit une solution à peu près générale, tandis que chacun des autres récepteurs reste spécial à des conditions déterminées.

249 — Le choix du récepteur ayant été ainsi arrêté dans chaque cas, on connaîtra avec une certaine approximation, d'après les

([1]) Prix de revient comparatifs des moteurs hydrauliques (*Lumière électrique*, t. XIV, p. 450).

indications qui ont été présentées pour chacun d'eux, le rendement λ que l'on en peut attendre. La *force théorique*, exprimée en *chevaux nominaux* étant (n° 147) :

$$\frac{PH}{75},$$

on pourra compter, comme *force disponible sur l'arbre*, sur le total :

$$\lambda \frac{PH}{75}.$$

On connaît d'ailleurs, d'après les études technologiques spéciales à chaque genre d'industrie, le rendement propre λ' de l'opérateur dont il s'agit : filature, pompe, scierie, etc. On pourra donc espérer recueillir définitivement, comme *force réelle en chevaux effectifs*, la quantité :

$$\lambda\lambda' \frac{PH}{75}.$$

Cette valeur servira à caractériser l'importance de l'usine qu'il y a lieu de construire pour utiliser la chute proposée.

250 — On aura ainsi jeté les premières bases du projet de l'usine d'un côté, et du récepteur d'autre part. Il restera encore à les relier l'un avec l'autre, au moyen d'un mécanisme convenable.

A cet égard, on connaîtra, d'après les indications qui ont été présentées dans la théorie de chacun des moteurs [1], la valeur de la vitesse u qui constituera pour lui l'allure la plus favorable. On sait, en même temps, quelle sera la meilleure marche à imprimer à l'opérateur. Par exemple, une pompe doit marcher lentement ; une scie doit attaquer le bois avec une certaine vivacité ; les bancs de

[1] Équations 77 (p. 234), 82 (p. 251), 86 (p. 259), 91 (p. 267), 93 (p. 272), 106 (p. 305).

broches doivent être conduits à une allure qui varie avec les divers textiles, etc.

Connaissant ainsi les vitesses qu'il y a lieu d'imprimer, tant à la roue qu'à l'arbre de couche de l'usine qui se trouve avec lui en équilibre de puissance dynamique, il deviendra facile, à l'aide des théories de la cinématique appliquée [1], d'établir le projet du mécanisme intermédiaire qui sera destiné à relier le récepteur et l'opérateur, tel, par exemple, que le train d'engrenages qui doit réaliser cette connexion.

[1] Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes.*

TROISIÈME PARTIE

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE XIII

GAZ PARFAITS

§ 1

PRÉLIMINAIRES

251 — *Énergie.* — La *thermodynamique,* ou *théorie mécanique de la chaleur,* a pour but de réunir en un corps de doctrine l'ensemble des rapports qui existent entre les phénomènes calorifiques et la production ou la disparition du travail dynamique [1]. Tout nous révèle, en effet, la concomitance de ces deux ordres d'influences, bien qu'elle n'ait été mise en évidence d'une manière définitive qu'à une époque récente.

En premier lieu, les variations de température s'accompagnent souvent d'un certain développement de travail. Sans invoquer, en ce moment, les innombrables exemples que l'on pourrait citer d'une semblable manifestation, il nous suffira d'indiquer la notion même de la température. On la rattache à la variation subie, dans

[1] Il est inutile, d'après cela, d'avertir que l'exposition de cette troisième partie du *Cours de Machines* suppose à la fois chez le lecteur la connaissance préalable des Cours de Physique expérimentale et de Mécanique générale, au moins dans leurs parties essentielles.

les phénomènes thermiques, par le volume d'un corps-type, qui n'est autre que le thermomètre à air. Les dilatations de tous les autres, sans suivre numériquement une marche identique, en demeureront cependant connexes, quand on viendra à leur communiquer une certaine quantité de chaleur (1). Or ils ne peuvent acquérir cet accroissement d'étendue qu'en déplaçant les corps qui les environnent immédiatement : obstacles solides ou atmosphère ambiante. Il leur faut donc pour cela repousser le point d'application d'un certain effort (2). De là une production de travail.

Réciproquement, une dépense de travail est apte à engendrer de la chaleur. Bornons-nous à citer sous ce rapport l'exemple du frottement. Chacun sait que les boîtes de roues s'échauffent dans la traction des véhicules. Le *thermogène* de Beaumont et Mayer (3) nous fournira également un exemple industriel de cette influence.

La force vive, que les théories de la mécanique nous ont déjà présentée comme un équivalent du travail, donne lieu à des remarques du même genre.

La chaleur est une source de force vive. Communiquée sans précautions à un liquide enfermé dans une enveloppe, elle peut déterminer la projection au loin des fragments de cette dernière.

Inversement, une destruction de force vive sans production apparente de travail est capable de déterminer une manifestation de chaleur. Il suffit de citer comme exemple une expérience célèbre de Foucault. Un disque de cuivre préalablement animé d'un mouvement rapide autour de son axe, s'arrêtera si l'on vient à exciter le magnétisme dans les deux pôles entre lesquels s'opère cette rotation. La force vive a disparu; mais le métal, qui était froid, est devenu brûlant.

Concluons donc que, si l'étude de la mécanique générale nous a jusqu'ici habitués à la transmutation mutuelle de deux fonctions numériques des données du mouvement : le travail dynamique et la force vive, le nouvel ordre de phénomènes dont nous abordons en

(1) Sauf dans quelques cas exceptionnels, tels que le maximum de densité de l'eau, auxquels il est inutile de nous arrêter en ce moment.

(2) Force d'inertie des corps adjacents, poids de ceux qu'il devient nécessaire de soulever, élasticité des enveloppes solides, pression de l'atmosphère environnante, etc.

(3) Voy. n° 535.

ce moment l'étude nous manifeste une troisième forme de ce même élément, à savoir la chaleur. Il devenait intéressant d'après cela de posséder, pour le désigner, un nom général indépendant des trois formes distinctes dont il est indifféremment susceptible. Young a introduit dans ce but la dénomination très expressive d'*énergie* [1].

252 — Il est toutefois bien important de placer ici la remarque suivante. Nous connaissons déjà une relation absolument déterminée entre les deux premières formes de l'énergie; la dépense de travail étant, en toutes circonstances, numériquement égale à la moitié de la production de force vive. Mais, en ce qui concerne la chaleur, nous sommes encore loin de discerner dans les aperçus précédents un lien aussi précis. Une telle constatation est cependant tout à fait indispensable pour justifier la conception d'un élément numérique, indestructible quant à sa quantité, bien que susceptible de trois formes concrètes différentes.

L'activité des physiciens s'est tournée vers cette recherche, et l'on a interrogé à cet égard l'observation dans les conditions les plus variées. Un très grand nombre de mesures ont été effectuées; et elles ont permis, par une généralisation intuitive, de formuler les deux énoncés suivants. Nous les accepterons provisoirement ici à titre de *postulatum*, largement justifié par d'aussi nombreuses vérifications. Ils recevront d'ailleurs ultérieurement (nº 434) la sanction d'une démonstration effective, lorsque les idées auront été assez préparées par nos premières études, pour nous permettre d'aborder les raisonnements de la thermodynamique avec toute la généralité que comporte cette science [2].

1° *Si une certaine quantité de travail exprimée en kilogrammètres vient à disparaître, sans que cette circonstance soit accom-*

[1] On distingue encore, comme quatrième forme, l'*énergie électrique*, qui est le produit de la force électromotrice par la quantité d'électricité. Mais, pour nous limiter dans les études déjà si étendues auxquelles nous consacrons cette troisième partie du Cours de Machines, nous en écarterons complètement les considérations relatives à l'électricité.

[2] Un long enseignement m'a mis à même de constater les avantages de cette manière de procéder. Si, néanmoins, elle venait à choquer les habitudes d'esprit de quelques lecteurs, il leur serait facile d'écarter cette difficulté en intercalant ici, avant d'aller plus loin, la lecture des nºˢ 430 à 434.

pagnée de la création correspondante d'une demi-force vive numériquement égale, une quantité de chaleur 424 fois moindre, si on l'exprime en calories, prend naissance sans aucune source apparente de production, autre que cette disparition même d'une quantité de travail que ne retrouvent pas les dynamomètres.

2° *Si une quantité de chaleur disparaît, sans que l'on puisse la retrouver dans les calorimètres, il s'opère une création de travail 424 fois plus grande, sans aucun moteur apparent, autre que cette disparition même de chaleur* (¹).

Il est inutile d'avertir que le nombre 424 ne constitue qu'une moyenne entre les résultats convenablement concordants de diverses expériences, eu égard au degré de précision dont elles sont susceptibles (²). On n'y doit donc voir qu'un chiffre provisoire, auquel les progrès de la science arriveront sans doute à donner plus tard une précision et une fixité plus satisfaisantes.

Ce coefficient a reçu le nom d'*équivalent mécanique de la chaleur*. On le représente par E. On désigne en même temps par A son inverse, appelé *équivalent calorifique du travail* :

$$E = 424, \qquad A = \frac{1}{424} = 0,0023585; \qquad AE = 1.$$

(¹) L'énoncé explicite de cette loi est, avec raison, rapporté au docteur Jules Robert Mayer de Heilbronn (*Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhang mit dem Stoffwechsel*, 1845). Il serait toutefois injuste de ne pas faire ici mention des vues suivantes, formulées par Sadi Carnot (mort en 1832), lesquelles, à la vérité, n'ont été imprimées que postérieurement à la publication de l'ouvrage de Mayer (*Lettre à M. le Président et à MM. les membres de l'Académie des sciences par M. Hippolyte Carnot, d'après les manuscrits originaux de Sadi Carnot déposés dans les archives de l'Institut*, in-4°, 1878, Gauthier-Villars, p. 69) :

« Partout où il y a destruction de puissance motrice, il y a en même temps production de chaleur, en quantité précisément proportionnelle à la quantité de puissance motrice détruite. Réciproquement, partout où il y a destruction de chaleur, il y a production de puissance motrice.

« D'après quelques idées que je me suis formées sur la théorie de la chaleur, la production d'une unité de puissance motrice nécessite la destruction de 2,7 unités de chaleur. »

La valeur de cette unité, ou *dynamie*, conduit au chiffre de 370 kilogrammètres, presque égale à l'équivalent mécanique de la chaleur, et un peu plus rapproché même de la valeur actuellement admise que le nombre 365, qui a été proposé par Mayer en 1842.

L'historique de cette question a été présenté avec beaucoup de soin par Clausius (*Théorie mécanique de la chaleur*, traduction de MM. Folie et Ronkar, p. 449).

(²) Je citerai notamment les nombres suivants, extraits des diverses publications

Une fois que l'on s'est arrêté, comme choix d'unités de travail, de temps et de chaleur, au kilogrammètre, à la seconde et à la calorie, les transformations mutuelles des diverses formes de l'énergie s'accomplissent d'après les modules suivants :

Force vive = 2 fois le *travail* = 848 fois la *chaleur*;
Travail = 424 fois la *chaleur* = $\frac{1}{2}$ de la *force vive*;
Chaleur = $\frac{1}{848}$ de la *force vive* = $\frac{1}{424}$ du *travail* [1].

L'énergie s'évalue indifféremment dans l'usage en calories ou en

qui se trouvent citées ci-après (n° 263, note) :

De Quintus Icilius.	Chaleur dégagée dans un fil électrique. . .	400
Favre.	Frottement du mercure.	413
Rosscha.	Pile de Daniel.	420
Joule.	Courant d'eau dans des tubes étroits. . . .	422
Joule.	Roue à palettes à eau.	424
Perot.	Vapeurs saturées.	424
Joule.	Roue à palettes à mercure.	425
Hirn.	Forage des métaux.	425
Hirn.	Écrasement du plomb.	425
Regnault.	Propriétés générales de l'air.	426
Amagat.	Compression de l'air.	434
Dupré.	Vaporisation.	437
Favre.	Machine magnéto-électrique.	443
Joule.	Compression de l'air.	443
Joule.	Courants induits.	452

La détermination la plus récente, due à M. Perot, a indiqué, d'après la discussion des possibilités d'erreur, la valeur :

$$424^{\text{kgm}},630 \pm 0^{\text{kgm}},135.$$

(1) L'équivalence du travail, de la force vive et de la chaleur sera considérée dans ce Traité comme un fait prouvé et incontestable, qui reste indépendant de toutes les idées théoriques que chacun peut se faire sur la constitution intime des corps, et dont nous n'aurons pas à nous occuper. Il y aurait toutefois de l'exagération à ne pas faire tout au moins mention ici de l'hypothèse qui est généralement admise à ce sujet, et dont l'origine remonte à Daniel Bernoulli.

Tout le monde à peu près est en effet aujourd'hui d'accord, tacitement ou explicitement, pour envisager la chaleur comme la manifestation extérieure de la force vive qui correspond aux mouvements des derniers éléments de la matière les uns par rapport aux autres. Ce genre d'agitation reste imperceptible à notre vue, même avec le secours des instruments d'optique les plus puissants. Cette portion de la force vive totale du corps demeure par là forcément distincte de celle que l'on saura évaluer, dans chaque cas, d'après les mouvements que discernent nos yeux; mais elle n'en est pas moins d'une nature identique, et dès lors les échanges mutuels en quantités équi-

kilogrammètres. Il est seulement très nécessaire, pour éviter de grossières erreurs, d'être bien prévenu dans chaque cas à cet égard.

valentes qui peuvent s'opérer entre ces deux formes de l'énergie, si différentes en apparence, ne présentent plus rien que de très simple à concevoir.

Des théories importantes ont été basées sur cette manière de voir. Leur autorité reste naturellement subordonnée à un point de vue hypothétique, à l'inverse de ce qui caractérise le corps de doctrine dont nous entreprenons ici l'exposé; lequel ne fera que développer méthodiquement les conséquences logiques d'un petit nombre de faits empruntés à l'observation directe. De plus, l'intérêt de ces considérations, quoique très réel, concerne beaucoup plutôt les progrès de la physique proprement dite et de nos connaissances, encore si restreintes, sur la constitution de la matière, que les notions que le mécanicien aura à mettre en œuvre pour asservir les forces de la nature, et les employer industriellement. Telle est surtout la raison qui motive ici mon abstention à l'égard de toute conception concrète de l'essence de la chaleur.

Parmi les ouvrages qui ont été plus spécialement écrits sur la chaleur considérée comme un mouvement des particules des corps, et sur la *théorie cinétique* qui prend pour base ces hypothèses, on peut citer les suivants :

Daniel Bernoulli. *Hydrodynamique*, Strasbourg, 1738, p. 200. — Pierre Prévost. *Traité de physique mécanique*, Genève, 1818. — Athanase Dupré. *Ann. de chim. et de phys.*, t. I à XIV, *passim*. — Hirn. *Ibidem*, 4ᵉ série, t. XI. — Briot. *Théorie mécanique de la chaleur*, chapitre IX. — Moutier. Sur une démonstration de la loi de Dulong et Petit. *Bulletin de la Société philomathique*, 7ᵉ série, t. I. — Blaserna. Sur la vitesse moyenne du mouvement de translation des molécules dans les gaz non parfaits. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXVIII. — Wœstyn. *Ann. de chimie et de phys.*, 3ᵉ série, t. XXIII. — Ladislas Natanson. Sur l'explication d'une expérience de Joule d'après la théorie cinétique des gaz. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CVII, p. 164. 166. *Moniteur industriel*, 26 juillet 1888, p. 233. — De Colnet d'Huart. Mouvements de translation et de rotation des atomes. *Société des Sc. nat. du grand-duché de Luxembourg*, t. X.

Krœnig. Principes fondamentaux d'une théorie des gaz. *Annales de Poggendorf*. t. XCIX, p. 315. — Clausius (Sur la nature du mouvement que nous appelons chaleur. *Ibidem*, t. C, p. 353. — On the dynamical theory of gases. *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. XIX, p. 434). — Naumann. Sur la vitesse des atomes. *Ann. de chimie et de pharmacie*, t. CXLII, p. 284. — Redtenbacher. *Dynamiden System*, 1857. Mannheim. — Jochmann. *Considérations sur la théorie des gaz*, 1859. — Holtzmann. *Sur la chaleur et la force élastique des gaz*, 1845, Mannheim. — Van der Walz. *Continuité de l'état fluide*. — Buijs-Ballot. *Annales de Poggendorf*, t. CIII, p. 240 ; CVIII, 153. — Wittner. *Zeitschrift für Math. und Physik*, t. XVII.

W. Rankine (On the centrifugal theory of elasticity, as applied to gases and vapours, *Phil. Mag.*, 4ᵉ série, 1851, t. II, p. 509. — On the hypothesis of molecular vortices. *Ibidem*, 4ᵉ série, t. XXVII, p. 313. — On the centrifugal theory of elasticity, and its connection with the theory of heat. *Edinburgh Transactions*, t. XX, p. 425. — On the thermal energy of molecular vortices. *Phil. Mag.*, 4ᵉ série, t. XXXVIII, p. 247. — Joule. Remarques sur la nature de la chaleur et de la constitution des fluides élastiques. *Mémoires de la Société littéraire et philosophique de Manchester*, 2ᵉ série, t. VII, 1846 ; IX, 1848 ; *Annales de chimie et de physique*, 3ᵉ série, t. L, p. 381. — Thomson. On vortex atoms. *Phil. Mag.*, 4ᵉ série, t. XXXIV, p. 15. — Maxweil. On the dynamical theory of gases. *Ibidem*, 4ᵉ série, t. XXXII, p. 390 ; XXXV, p. 129, 185. — Herapath. Mémoire sur les causes, les lois et les phénomènes de la chaleur. *Annals of philosophy*, 2ᵉ série, t. I.

253 — *Répartition de l'énergie.* — Lorsqu'une certaine quantité de chaleur Q est communiquée à un corps *immobile* [1], elle se répartit en trois portions distinctes :

1° Une première partie s'ajoute à la *chaleur sensible* dont le corps se trouve déjà dépositaire. Elle se manifeste par une variation de sa température.

2° Une seconde quantité disparaît avec production correspondante de *travail interne* T_i. Il faut, en effet, pour effectuer la dilatation qui accompagne en général une variation de température, que les divers points matériels s'éloignent géométriquement les uns des autres, sous l'empire des forces mutuelles dont ils sont le siège. De là un développement de travail.

3° Une troisième partie disparaît encore avec production équivalente de *travail externe* T_e. Cette circonstance ne se présenterait pas si le corps existait seul dans le vide, libre de s'y épanouir ou de s'y rétracter. Mais, dans les conditions de la réalité, il lui est au contraire nécessaire, pour se faire sa place avec ses nouvelles dimensions, de refouler les objets solides ou fluides qui l'environnent, et exercent sur lui certaines réactions. Un travail spécial devient donc nécessaire, ainsi, par conséquent, qu'une dépense corrélative de chaleur, pour y subvenir.

Il est inutile d'avertir que les différents termes de la répartition précédente sont susceptibles, suivant les circonstances, de prendre l'un ou l'autre des deux signes algébriques.

On les réduit souvent par la pensée à deux seulement. M. Clausius a réuni en effet, sous le nom d'*énergie interne*, la somme de la chaleur sensible et de celle qui est équivalente au travail interne [2]. Dans la plupart des cas, en effet, il demeure impossible d'opérer la séparation de ces deux sortes d'évaluations, que l'on ne peut plus alors effectuer qu'en bloc. On est dans l'usage de désigner par U le stock d'énergie interne renfermé à chaque instant dans un corps. On le rapporte pour cela par la pensée à une origine quel-

[1] Dans les phénomènes de mouvement, qui feront l'objet du chapitre suivant, l'*énergie visible*, ou la force vive, entre elle-même en ligne de compte pour cette répartition de la quantité de chaleur fournie, dont elle forme alors une quatrième partie.

[2] *Ergal* (Clausius), *Wirkungsfunktion* (Kirchhoff).

conque, et l'on n'a besoin de considérer dans les calculs que l'accroissement bien défini $U - U_0$ que subit cette quantité, pour passer de cet état, choisi arbitrairement, à d'autres conditions variables.

Si nous évaluons U en calories, nous pourrons donc poser, dans la transformation élémentaire d'un corps quelconque :

$$dQ = dU + AdT_e.$$

254 — *Travail externe.* — Pour que cette relation symbolique devienne une véritable équation différentielle entre les diverses variables qui définissent l'état d'un corps, il est nécessaire de posséder une expression générale du travail externe. Il nous suffira, à cet effet, de nous reporter à la recherche que nous avons déjà faite (13) du travail nécessaire pour refouler une pression p, uniformément répartie sur toute l'étendue de la surface, de forme quelconque, qui enferme le volume v du corps. Nous avons trouvé comme expression du travail externe qui permet de passer de la valeur initiale v_1 à la valeur finale v_2 :

$$(1) \qquad T_e = \int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

La quantité de chaleur correspondante sera par conséquent :

$$Q_e = A\int_{v_1}^{v_2} pdv,$$

et la relation précédente deviendra :

$$(2) \qquad dQ = dU + Apdv.$$

Il sera, bien entendu, nécessaire, si l'on veut être en état d'effectuer l'intégration en vue de quelque application distincte, de posséder la relation spéciale qui unit, dans ce cas, les variables p et v. Ce serait une erreur capitale de s'imaginer que la connaissance des états extrêmes (p_1, v_1) et (p_2, v_2) puisse suffire, pour assigner la dépense de travail externe capable de faire franchir au corps cet intervalle. Il faudrait pour cela que l'expression pdv fût une dif-

férentielle exacte, quand on y considère p et v comme des variables indépendantes, et elle ne présente manifestement pas ce caractère.

Nous avons déjà signalé à l'attention (n° 13) le cas très fréquent dans lequel la pression reste constante pendant toute la dilatation. Avec cette hypothèse, le travail externe devient le produit de cette pression par le *volume engendré :*

$$(3) \qquad T_e = p(v_2 - v_1), \qquad Q_e = Ap(v_2 - v_1).$$

Cette circonstance se présente d'ordinaire pour les objets qui se trouvent plongés au sein de la *pression atmosphérique*, laquelle ne saurait, en raison des énormes dimensions de la masse gazeuse ambiante, se trouver modifiée d'une manière appréciable par l'expansion qu'éprouvent ces corps. Toutefois quelques observations sont nécessaires à cet égard.

255 — Il est en effet incontestable que, *statiquement*, l'atmosphère, lorsqu'elle a repris son équilibre après le gonflement du corps qui s'y trouve immergé, ne saurait accuser cette dilatation par la moindre modification de sa propre pression. Mais il n'en sera pas nécessairement de même *dans l'état dynamique*, si les transformations s'exécutent avec une certaine brusquerie. Il peut alors arriver que le refoulement de l'atmosphère soit assez rapide pour n'avoir pas le temps de se propager au large, de manière à éviter une augmentation momentanée de tension dans la région avec laquelle le corps se trouve en rapport. C'est ainsi que les bolides, en pénétrant dans l'atmosphère terrestre avec une vitesse relative énorme, s'y échauffent au point de rougir, de fondre à la surface et de voler en éclats [1]. On a vu de même, dans des expériences rapportées par le général Morin, des projectiles lancés par une pièce d'artillerie au sein d'une masse d'eau à travers un barrage en charpente, soulever au-dessus de leur trajectoire une sorte de mur liquide; indiquant ainsi à quel point la pression échappait alors au régime hydrostatique. Ces exemples nous montrent que, si le mouvement ne présente pas une suffisante lenteur, on reste exposé à certaines erreurs

[1] Voy. plus loin (n° 355) ce qui concerne la pression dans l'état dynamique.

en calculant le travail externe d'après la valeur ***nominale*** de la tension que possède le milieu ambiant dans l'état ordinaire d'équilibre.

Une inexactitude du même genre peut se produire, si l'on fait cette évaluation à l'aide de la *force expansive* du corps qui se détend, lorsqu'il arrive que celle-ci n'a pas la même valeur que la *pression extérieure* qu'il s'agit de refouler; car c'est bien réellement cette dernière qui donne la mesure de l'effort vaincu, et du travail dépensé à cet effet; tandis que c'est essentiellement la première que désigne dans nos formules la lettre p, employée pour caractériser l'état du corps.

Supposons par exemple un piston arraché rapidement par une traction suffisante, telle que l'action d'un volant au point mort, par exemple, tandis que la masse gazeuse tend à remplir le cylindre. Celle-ci, en poursuivant, pour ainsi dire, cette portion de son enveloppe, n'exercera plus sur elle la pleine pression qu'elle eût, en repos, développée à son contact. On conçoit même que si, par la pensée, l'on imprime au piston des vitesses dépassant progressivement toutes limites, le fluide ne pouvant parvenir à le suivre dans ce mouvement par l'effet de sa propre expansion [1], la pression mutuelle deviendra nulle, ainsi, par conséquent, que le travail dépensé pour vaincre une résistance qui aura totalement disparu. Des circonstances équivalentes se produiront si l'enveloppe d'une masse gazeuse vient à faire explosion par l'excès de la tension intérieure sur la pression extérieure; si une veine fluide se trouve lancée dans un milieu raréfié, etc.

On voit par ces explications qu'il y a lieu de distinguer avec soin le cas du *travail incomplet*, plus ou moins différent du *travail complet* ou *maximum*. Ce dernier, *seul*, est exprimé par les formules précédentes. Mais, cette remarque une fois faite, il restera sous-entendu que ces hypothèses seront écartées des considérations qui vont suivre, à moins que le contraire ne vienne à être expressément spécifié. Nous supposerons donc constamment, jusqu'à nouvel ordre, que la tension intérieure du corps, et la pression extérieure qui lui est opposée par son enveloppe solide ou fluide, restent

[1] Voy. n° 293.

égales entre elles ; ou plutôt séparées par une différence infiniment petite dans un sens ou dans l'autre, selon que l'une quelconque d'entre elles se trouve appelée à surmonter la seconde, de manière à produire soit une expansion, soit une rétraction du corps.

256 — *Travail interne.* — En ce qui concerne le travail interne (¹), les théories de la mécanique générale nous en fournissent l'expression. Si l'on désigne par $f(l)$ la valeur commune des deux forces intérieures égales et opposées qu'exercent l'un sur l'autre deux points matériels du système, séparés par la distance l, on a, en étendant le signe $\sum$ à tout l'ensemble du corps considéré :

$$T_i = \sum \int_{l_1}^{l_2} f(l)\, dl,$$

et, pour la quantité de chaleur correspondante :

$$Q_i = A \sum \int_{l_1}^{l_2} f(l)\, dl.$$

Cette formule met en évidence cette proposition importante que *le travail interne ne dépend que des déplacements* RELATIFS *des diverses parties du corps*, et nullement de la situation d'ensemble qu'il peut occuper dans l'espace absolu (²).

Il s'ensuit notamment que *si un corps, après avoir subi une certaine évolution, revient exactement à son état initial, le travail interne total est alors identiquement nul.*

En d'autres termes, T_i, et par suite U, *est une* FONCTION-DE-POINT, *qui ne dépend des variables définissant l'état d'un corps que par leurs valeurs extrêmes, et nullement de la loi de variation con-*

(¹) Clausius. Mémoire sur l'application du principe de l'équivalence des transformations au travail intérieur. *Annales de Poggendorf*, 1862, t. CXVI.

(²) Cette proposition est ordinairement admise comme évidente. M. J. Bertrand a cependant fait remarquer avec raison (*Thermodynamique*, p. 69) qu'il est plus juste de la considérer comme résultant de l'accord de l'expérience avec la théorie qui est basée sur cet énoncé fondamental. Rien ne prouve en effet *a priori*, et d'une manière nécessaire, que l'action mutuelle de deux molécules ne puisse dépendre que de leur distance mutuelle l, et nullement de l'orientation de la droite qui les joint, de leurs vitesses respectives, du nombre de molécules qui s'interposent entre elles comme un écran, etc.

tinue qu'elles ont suivie dans l'intervalle. Si, en effet, il existait une différence entre les résultats fournis par deux de ces modes, on n'obtiendrait plus zéro, conformément à l'énoncé précédent, pour le total réalisé en allant par l'un d'eux de l'état initial à l'état final, et revenant par l'autre à l'état initial.

257 — Malgré l'intérêt théorique que peuvent présenter ces dernières formules, nous manquons des éléments indispensables pour en effectuer l'intégration ; car on ne possède actuellement que des notions insuffisantes sur les distances moléculaires l, et les actions mutuelles f qui en dépendent. Nous nous trouvons ainsi, dans cette voie, arrêtés dès le début.

On comprend, d'après cela, quel intérêt particulier s'attachera au cas d'une substance assez raréfiée pour que le terme T_i s'annule, ou devienne pratiquement inappréciable. On sait, en effet, avec certitude, que les forces f diminuent rapidement quand la distance l augmente au delà d'un certain degré. On peut donc les considérer comme nulles dans un état-limite, dont les corps s'approcheront asymptotiquement. Cet état spécial a reçu le nom de *gaz parfait*. Pour de pareils corps, mais pour ceux-là seulement, les deux expressions de chaleur sensible et de chaleur interne deviendront synonymes ; et la fonction générale U pourra être employée pour désigner la première de ces deux quantités.

Il reste, à la vérité, à savoir si la nature nous présente effectivement des corps assez dilatés pour que l'hypothèse précédente leur soit pratiquement applicable [1]. Il est naturel de chercher la réponse à cette question dans les gaz les plus éloignés de leur point de liquéfaction ; c'est-à-dire dans ceux que l'on a vu résister les derniers aux moyens de coercition mis en œuvre avec une puis-

[1] Cazin. Mémoire sur le travail interne dans les gaz. *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. XIX, 1870. — Moutier (Sur la chaleur consommée en travail interne lorsqu'un gaz se dilate sous la pression de l'atmosphère. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 11 janvier 1869. — Sur le travail interne qui accompagne la détente d'un gaz sans variation de chaleur. *Ibidem*, 22 avril 1872). — Bourget. Théorie mathématique des effets dynamiques de la chaleur donnée à un gaz permanent. *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. LVI, 1859. — Hirn. *Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur*, p. 52. — Bauschinger. *Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. VIII.

sance toujours croissante, qui a fini, dans les belles expériences de M. Cailletet, par dompter les plus rebelles. On y peut joindre évidemment les mélanges que ces gaz forment entre eux, et notamment l'air atmosphérique.

On connaît à cet égard la belle expérience imaginée par Gay-Lussac (1), et répétée par Joule (2), par Regnault (3), par Thomson (4). Deux récipients sont mis en communication à l'aide d'une tubulure fermée d'un robinet. On commence par produire dans l'un d'eux un vide aussi parfait que possible. Si alors on ouvre le robinet, l'air s'écoule hors de la première capacité pour remplir la seconde. Aucune variation de température ne se produit dans le fluide une fois réduit au repos, non plus que dans le bain du calorimètre au sein duquel l'appareil est plongé (5). Le gaz n'a donc pas employé sa propre chaleur à effectuer du travail, et il n'en a pas non plus reçu de l'extérieur. De l'absence de consommation de chaleur naît celle de travail total effectué. Mais il n'y a pas eu de travail externe développé, puisque le fluide n'a exercé sa pression que sur des parois immobiles. Par suite le travail interne est lui-même nul.

Nous voyons d'après cela se dessiner la marche que nous aurons

(1) Gay-Lussac. *Mémoires d'Arcueil*, 1806.

(2) *Philosophical Magazine*, 3e série, t. XXVI, 1845, p. 369. — *Annales de chimie et de physique*, 1851. — Verdet. *Théorie mécanique de la chaleur*, t. I, p. 77.

(3) *Mémoires de l'Académie des sciences*, t. XXVI. Introduction. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXVI.

(4) *Transactions de la Société royale de Londres*, t. CXLIII; CXLIV. — Verdet. *Théorie mécanique de la chaleur*, t. I, p. 93.

(5) Dans la réalité, on en observe une extrêmement faible; laquelle tient d'une part au frottement subi dans l'ajutage, et en outre au refoulement de la très petite quantité d'air que la machine pneumatique est impuissante à extraire de la première capacité. Cette perturbation diminue au fur et à mesure que l'on parvient à réaliser un vide plus complet.

Ajoutons que MM. Thomson et Joule ont imaginé un appareil plus sensible que le précédent, pour mettre en évidence la très faible influence du travail interne dans les gaz. Ils en ont constaté une pour l'air, une moindre pour l'hydrogène, une autre plus marquée avec l'acide carbonique. Ce ne serait donc, dans toute la rigueur du terme, que pour l'état asymptotique idéal désigné sous le nom de gaz parfait, que l'on pourrait admettre l'absence absolue de travail interne.

Mais il importe de faire remarquer que, si des mesures de ce genre présentent le plus grand intérêt pour la physique théorique, elles sont tellement délicates qu'elles ne sauraient exercer la moindre influence sur la pratique des machines dans lesquelles l'air est appelé à jouer un rôle. Nous n'hésiterons donc pas, pour la suite de ce Cours, à appliquer à ce fluide la proposition dans toute sa rigueur.

à suivre le plus utilement pour l'étude de la thermodynamique. Il sera naturel de nous attacher tout d'abord au cas le plus simple et le plus facile à élucider, pour nous élever ensuite de ce début à des recherches plus complexes. Nous devrons évidemment chercher une telle simplification dans les phénomènes pour lesquels disparait d'elle-même l'expression obscure et inconnue du travail interne. De là l'utilité d'élaborer d'abord avec soin la théorie des gaz parfaits, avant de passer à l'étude des corps quelconques.

§ 2

LOIS EXPÉRIMENTALES DES GAZ PARFAITS

258 — *Relation-typique.* — Nous adopterons comme une convention constante dans toute la thermodynamique, à moins que le contraire ne vienne à être expressément spécifié, que les raisonnements s'appliquent à l'unité de poids, c'est-à-dire à un kilogramme du corps considéré. Pour les applications industrielles, les quantités de chaleur, ainsi que les travaux correspondants, resteront évidemment proportionnels aux poids mis en jeu dans chaque cas.

La lettre v désignera essentiellement d'après cela le volume de l'unité de poids, ou ***volume spécifique*** de la substance considérée. Ce coefficient présente une relation très simple avec le ***poids spécifique*** ϖ, ou poids de l'unité de volume. En effet, le volume v pesant un kilogramme; 2, 3, ... volumes v pèseront 2, 3, ... kilogrammes. Le volume ϖv pèse donc ϖ kilogrammes. Mais le nombre ϖ définit précisément le poids de l'unité de volume; on a par conséquent :

$$\varpi v = 1,$$

$$(4) \qquad v = \frac{1}{\varpi}, \qquad \varpi = \frac{1}{v}.$$

Si l'on considère, par exemple, l'air *normal*, c'est-à-dire pris à la température de la glace fondante sous la pression p_0 qui cor-

respond à $0^m,76$ de mercure, le mètre cube de ce fluide pèse :

$$\varpi_0 = 1^{kg},293. \tag{5}$$

Il a par suite comme volume spécifique :

$$v_0 = \frac{1}{\varpi_0} = 0^{m^3},773. \tag{6}$$

Pour pouvoir évaluer à chaque instant le volume v qu'occupe un kilogramme d'un corps quelconque, il faut connaître, en même temps que la pression p à laquelle il est soumis, sa température. Nous désignerons par θ la *température centigrade* USUELLE, c'est-à-dire celle que fournit le thermomètre ordinaire, dont le zéro est déterminé par l'immersion dans la glace fondante. On conçoit d'ailleurs que les valeurs de ces deux éléments p et θ ne sauraient correspondre au même volume v pour toutes les substances possibles. Chaque essence de matière présente à cet égard une corrélation qui lui est spéciale, entre la série de ses volumes spécifiques successifs v et les deux variables indépendantes p et θ. En d'autres termes, chacun des corps de la nature est caractérisé par une *relation-typique* entre ces trois variables :

$$f(\theta, p, v) = 0,$$

qui lui appartient en propre, et lui sert, en quelque sorte, de définition analytique. Le point de départ de toute recherche relative à une substance déterminée doit donc consister à se procurer cette relation.

A cet égard, on pourrait, pour l'étude que nous poursuivons, concevoir deux manières de procéder. Dans la première, on imaginerait arbitrairement diverses formes analytiques, considérées comme caractérisant des corps hypothétiques, et l'on pourrait déduire de ce pur exercice de calcul des propriétés plus ou moins curieuses, suivant l'habileté qui aurait présidé au choix des fonctions envisagées. Mais cette voie stérile ne saurait évidemment solliciter un esprit juste.

La marche vraiment efficace consistera, au contraire, à interroger la nature par la voie de l'expérience, au sujet des corps qu'elle nous présente comme les plus utiles en vue des applications effectives; et à constituer pour chacun d'eux, d'après l'observation directe, la relation-typique qui représente son allure spéciale au milieu des transformations thermiques. Nous avons donc à exposer tout d'abord ce qu'ont fait connaître à cet égard les recherches entreprises par les physiciens au sujet des gaz parfaits, sur lesquels est en ce moment concentrée notre étude.

259 — Il nous suffira pour cela de rappeler ici les deux lois expérimentales qui portent les noms illustres de Mariotte et de Gay-Lussac. Soumises, dans ces derniers temps, au contrôle le plus minutieux [1] pour un certain nombre de fluides, elles ont accusé certains écarts qui vont en s'atténuant progressivement, au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point de liquéfaction [2]. Elles peuvent donc être considérées comme formulant l'état asymptotique que nous désignons sous le nom de gaz parfait.

Ces deux lois expriment les formes simples que revêt la relation-typique cherchée, dans les deux cas spéciaux où, parmi les deux variables indépendantes θ et p auxquelles nous rapportons par la pensée l'expression de v, on ne laisse varier chaque fois qu'une seule d'entre elles, en maintenant la seconde constante.

La loi de Mariotte est relative au cas où la pression seule se modifie, la température restant la même. Dans ces circonstances, *le volume varie en raison inverse de la pression :*

$$pv = p_1 v_1.$$

La valeur constante du produit de ces deux variables dépend, pour chaque expérience, des conditions initiales arbitraires p_1, v_1.

La loi de Gay-Lussac se rapporte au cas où la température seule varie, la pression étant maintenue constante. Dans ces conditions,

(1) Regnault. *Mémoires de l'Académie des sciences*, t. XXI, p. 426.

(2) L'hydrogène présente à cet égard, par rapport aux autres gaz, un renversement de sens fort curieux, qui a fait dire quelquefois que c'était un gaz *plus que parfait*.

le gaz se dilate proportionnellement à l'accroissement de température. On peut formuler cet énoncé de la manière suivante :

$$v = v_1 (1 + \alpha\theta),$$

en désignant par α le *coefficient de dilatation*, c'est-à-dire l'accroissement proportionnel de volume qu'éprouve le corps pour une élévation de température égale à un degré centigrade.

Un complément essentiel de cette loi consiste en ce que *le coefficient de dilatation est le même pour tous les gaz parfaits*. Cette valeur caractéristique constitue donc une des constantes générales de la nature. Elle a été trouvée égale à :

(7) $$\alpha = 0,00367 = \frac{1}{273}.$$

260 — A l'aide de ces deux lois, nous pouvons constituer dans toute sa généralité la relation-typique relative aux gaz parfaits.

Concevons à cet effet un kilogramme de gaz *normal*, pris à la température de la glace fondante et à la pression normale p_0. Nous désignerons son volume spécifique par v_0. Nous le portons (sans changer sa température, qui reste égale à celle de la glace fondante) à une pression quelconque p; d'où résulte pour le corps un certain volume transitoire V. Cette transformation étant régie par la loi de Mariotte, nous obtiendrons V à l'aide de la relation :

$$pV = p_0 v_0.$$

Dans une seconde partie de l'expérience, nous maintenons constante la pression p qui vient d'être atteinte, et nous élevons la température à partir de celle de la glace fondante jusqu'à θ. La loi de Gay-Lussac nous fournit avec ces nouvelles conditions :

$$v = V(1 + \alpha\theta).$$

Pour éliminer maintenant l'inconnue auxiliaire V, il suffit de multiplier membre à membre les deux relations précédentes, ce qui fournit l'équation cherchée :

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha\theta).$$

261 — On peut la simplifier, avec Clapeyron, en commençant par la mettre sous la forme :

$$pv = \alpha p_0 v_0 \left(\theta + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Nous poserons maintenant :

$$R = \alpha p_0 v_0, \tag{8}$$

et (7) :

$$t = \theta + \frac{1}{\alpha} = \theta + 273. \tag{9}$$

Il vient ainsi (¹) :

$$pv = Rt. \tag{10}$$

Telle est l'équation-typique des gaz parfaits (²).

La nouvelle variable t qui vient prendre, dans nos calculs, la

(¹) L'équation :

$$\frac{pv}{t} = \text{Const.} = R = \alpha p_0 v_0,$$

comporte une certaine généralisation (Hirsch. *Annales des Ponts et chaussées*, 5ᵉ série, t. VII, p. 465). On peut l'étendre au cas où une masse déterminée de gaz vient à prendre, dans ses diverses parties, différentes pressions et différentes températures.

Remarquons d'abord que le poids qui se trouvait, dans les raisonnements précédents, fixé à l'unité, peut, dans cette formule, être laissé quelconque par la pensée, puisque les deux volumes v et v_0 augmentent alors ensemble proportionnellement, en devenant V et V_0 :

$$\frac{pV}{t} = \alpha p_0 V_0.$$

En second lieu, si l'on applique séparément cette relation à chacune des parties homogènes dans lesquelles se décompose la masse totale, il viendra, en ajoutant membre à membre les égalités ainsi obtenues :

$$\Sigma \frac{pV}{t} = \Sigma \alpha p_0 V_0 = \alpha p_0 \ \Sigma V_0,$$

ΣV_0 désignant le volume total initial. On peut donc écrire d'une manière générale :

$$\Sigma \frac{pV}{t} = \text{Const.},$$

pour l'ensemble des diverses parties homogènes V, quelque petites et nombreuses qu'elles puissent devenir dans une masse quelconque de gaz.

(²) A cette forme explicite correspond cette équation différentielle très simple :

$$\frac{dt}{t} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}.$$

place de la température *usuelle* θ, porte le nom de *température absolue*. Elle reste *centigrade*, comme la première, en ce sens que la valeur intrinsèque du degré n'a pas changé. Mais le numéro d'ordre qui lui correspond dorénavant dans l'échelle thermométrique n'est plus le même. En d'autres termes, *nous opérons un déplacement d'origine sur la graduation*. Le zéro, qui correspondait jusqu'ici à la glace fondante, se trouve reporté à 273 divisions au-dessous. Ce nouveau point de départ des températures absolues porte lui-même le nom de *zéro absolu* [1].

La relation-typique (10) devient alors assez simple [2] pour pouvoir être énoncée comme un théorème, et l'on peut dire que, *dans les gaz parfaits, la température* ABSOLUE *reste proportionnelle au produit de la pression par le volume* [3].

Le coefficient R *de cette proportionnalité :*

$$R = \alpha p_0 v_0 = \frac{10336}{273} v_0 = 37{,}8608\, v_0,$$

varie, d'un gaz à l'autre, proportionnellement au volume spécifique, ou en raison inverse de la densité (éq. 4).

(1) Il sera bon de remarquer que cette conception reste ici d'ordre uniquement numérique, et dégagée de toute idée plus ou moins mystérieuse sur la nature de la température, la quantité de chaleur renfermée dans les corps, et le cas de nullité de ces deux éléments (voy. ci-dessus n° 387, note 1).

(2) Van der Waals en a donné une plus complexe pour les gaz éloignés de l'état parfait.

M. Amagat, en revenant sur ces recherches, ainsi que sur celles de M. Clausius et de M. Korteweg relatives au même sujet, présente de son côté une formule nouvelle à cet égard (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 27 mars 1882, p. 847).

On peut consulter également sur cette matière les ouvrages suivants, cités par M. Zeuner : Joule et Thomson. On the thermal effects of fluid in motion. *Philosophical Transactions*, 1854. — Jochmann. Beiträge zur Theorie der Gaze. *Programme des Kölnischen Realgymnasii*, 1859. — Reye. Die mechanische Wärmetheorie und das Spannungs gesetz der Gaze. *Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1861. — Schröder van der Kolk. Ueber die Abweichungen der wirklichen Gase vom Mariotte'schen Gesetz. *Poggendorf's Annalen*, 1862.

(3) On peut imaginer un mode de représentation géométrique de tout l'ensemble des états que peut prendre un gaz parfait, en construisant la relation (10) à l'aide de trois axes rectangulaires, sur lesquels on porterait les volumes en abscisses, les pressions en ordonnées horizontales, et les températures absolues en altitudes. On obtien ainsi l'équation d'un paraboloïde gauche équilatère, rapporté à ses plans directeurs et au plan tangent au sommet, surface dont l'allure bien connue se prête à peindre d'un seul coup toutes les modalités dont est susceptible l'état d'un gaz parfait.

Si par exemple on envisage, en particulier, l'air atmosphérique (¹), il viendra, en substituant la valeur (6) de v_0 :

$$(11) \qquad R = 29,2814.$$

262 — *Chaleurs spécifiques*. — Les trois variables p, v, t, constituent les aspects essentiels qui définissent, dans l'état actuel de nos connaissances, *l'état d'un corps*. La relation-typique en règle toutes les allures possibles ; mais on n'y envisage nullement les causes capables de provoquer effectivement ces transformations.

Cette distinction n'est pas sans analogie avec celle qui sépare, dans le domaine de la mécanique, la cinématique de la dynamique. Cette dernière prend tout naturellement pour base l'étude géométrique préalable des circonstances du mouvement, mais elle a pour but essentiel d'y combiner la notion de la cause efficiente des effets ainsi analysés, à savoir la force. La cause déterminante, dans les effets qui nous occupent actuellement, est la *quantité de chaleur*. De là une quatrième variable Q, qu'il y a lieu maintenant de rattacher aux précédentes.

On appelle *chaleur spécifique* d'un corps le rapport $\frac{dQ}{dt}$ de la quantité de chaleur qu'on lui communique pour produire une transformation élémentaire, à la variation de température qui en devient la conséquence. Il est toutefois indispensable d'ajouter que ce coefficient différentiel peut varier, non seulement d'un corps à l'autre, mais, pour une même substance, avec les circonstances qui caractérisent ses divers modes de transformation.

On pourrait ainsi concevoir, pour une même matière, une série

(¹) En faisant le même calcul pour l'hydrogène, on trouve :

$$R = 422,52.$$

M. Zeuner a été frappé de cette circonstance que le coefficient de celui de tous les corps qui se trouve placé au sommet de l'échelle des gaz parfaits, se confond presque exactement avec la valeur 424 de l'équivalent mécanique de la chaleur. Il suffirait, pour les identifier complètement, d'opérer une modification bien peu importante dans les chiffres donnés par Regnault; et d'ailleurs l'hydrogène est encore un corps concret, qui ne réalise pas nécessairement l'état limite, rigoureusement constitutif du gaz parfait (Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*, traduction de Cazin et Arnthal, p. 103, note).

indéfinie de chaleurs spécifiques ([1]); mais il s'en faut de beaucoup que toutes présentent un égal intérêt ([2]). Il en est deux surtout qui jouent dans les recherches un rôle capital, et auxquelles les physiciens se sont attachés d'une manière spéciale. Ce sont celles pour lesquelles on ne fait varier qu'une seule des deux variables indépendantes p et v. On les appelle ***chaleur spécifique à volume constant*** et ***chaleur spécifique à pression constante.*** Nous désignerons la première par c et la seconde par C.

En ce qui concerne les gaz parfaits, l'observation a permis d'établir les deux lois suivantes :

1° ***Pour chaque gaz parfait, les chaleurs spécifiques à pression ou à volume constant conservent des valeurs fixes.*** Les coefficients différentiels $\frac{dQ}{dt}$ relatifs à ces deux genres d'expériences seront donc des constantes ([3]), tandis que l'on doit se les représenter en général, pour les autres substances, comme des fonctions plus ou moins complexes.

2° ***Le rapport des deux chaleurs spécifiques de chacun des gaz parfaits est le même pour tous.*** Nous le désignerons par k, en écrivant :

$$C = kc. \tag{12}$$

Ce nombre constitue donc, de même que α, une constante générale de la nature. Sa détermination a été poursuivie par un grand nombre d'expérimentateurs ([4]). On admet ordinairement la valeur :

$$k = 1,41. \tag{13}$$

([1]) Cette indétermination n'offre rien que de très naturel. On possède en effet deux moyens distincts d'échauffer un gaz, à savoir : sa compression, et sa mise en rapport avec un corps chaud. Lorsque ces deux procédés se trouvent employés simultanément, il devient impossible de faire dans le total, s'il est donné seul, la part de chacun d'eux. La quantité de chaleur proprement dite dQ qui se trouve communiquée à un gaz pendant l'élévation dt de sa température, est donc indéterminée *a priori*, ainsi par conséquent que le rapport $\frac{dQ}{dt}$ de ces deux éléments.

([2]) Clausius. Sur la chaleur spécifique des gaz. *Annalen der Chemie*, t. CXV.

([3]) Certains correctifs se sont produits à cet égard, en ce qui concerne les températures très élevées (n° 415).

([4]) Voyez n° 304, note.

263 — *Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur.* — Ces divers emprunts à l'expérience nous suffisent pour déterminer dès à présent la valeur numérique de l'équivalent mécanique de la chaleur E ([1]). Le postulatum que nous avons admis jusqu'à nouvel ordre (n° 252), consiste en ce que la valeur de ce coefficient reste invariable, quel que soit le mécanisme qui préside à la transformation de la chaleur en travail. Il nous suffira

([1]) G. A. Hirn (Équivalent mécanique de la chaleur. *Cosmos*, t. XVI, p. 313. — *Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur*, 1858, Colmar). — Favre. Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLVI, p. 337. — Despretz. Note relative à l'équivalent mécanique de la chaleur. *Ibidem*, t. LI, p. 496. — Person. Note sur l'équivalent mécanique de la chaleur. *Ibidem*, t. XXXIX, p. 1131. — Bellanger. *De l'équivalent mécanique de la chaleur.* — Le Roux. Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. *Cosmos*, t. XII, p. 314. — Violle. Sur l'équivalent mécanique de la chaleur. *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. XXI, p. 64. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXX, p. 1283; LXXI, p. 522. — Perot. Sur la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. *Annales de chimie et de physique*, 6e série, t. XIII, p. 145. *Lumière électrique*, t. XXIX, p. 78. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 15 juin 1886. — D'Estocquois. Note sur l'équivalent mécanique de la chaleur. *Ibidem*, t. XLVI, p. 461. — Amagat. Équivalent mécanique. *Ibidem*, t. LXXVII, p. 1327. — Dahlander. Sur une détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. IV, p. 474. — Vellutini. Note sur l'équivalent mécanique de la chaleur. *Bulletin de la Société des anciens Élèves des écoles d'arts et métiers*, 1er septembre 1876. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. *Lumière électrique*, t. XVII, p. 543.

Joule. On the mechanical equivalent of heat. *Philosophical Magazine*, 3e série, t. XXXI, p. 173; XXXV, p. 335. *Philosophical Transactions*, 1850, t. I, p. 61. *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. XXXV, p. 121. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXV, p. 309; XXVIII, p. 132; XL, p. 310. *Annales de Poggendorf*, 1854, t. IV, p. 601. — W. Thomson. On a method of discovering experimentally the relation between the mechanical work spent and the heat produced. *Edinburgh Transactions*, 1851, t. XX, p. 289. *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LXIV, p. 504. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1852, p. 241. — Rankine. Note as to the dynamical equivalent of temperature. *Edinburgh Transactions*, t. XX, p. 191. — De Volson Wood. The mechanical equivalent of heat. *Scientific American supplement*, 26 mai 1888, p. 10331. *Engineering Journal*, t. LXII, p. 55. — Cowper and Anderson. Experiments on the mechanical equivalent of heat. *The Engineer*, 9 septembre 1887, p. 213.

Kuppfer. Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme. *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. X, p. 193. — Clausius. Sur une détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. *Les Mondes*, t. VI, p. 423. — Von Quintus Icilius. Sur l'échauffement, etc. *Annales de chimie et de physique*, t. LXXXIX, p. 377. — Société de physique de Berlin. Tableau des valeurs trouvées par différents expérimentateurs pour l'équivalent mécanique de la chaleur. *Fortschritte der Physik im Jahre* 1858, p. 351.

Provenzali. Sur l'équivalent mécanique de la chaleur. *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*. t. XXV, 1871-72.

donc, pour en connaître la valeur, d'imaginer à cet égard le mode le plus simple.

Considérons à cet effet un kilogramme d'air *normal* pris sous le volume spécifique $v_0=0,773$ et la pression $p_0=10336$. Nous le portons à la température usuelle θ au-dessus de la glace fondante, en maintenant constante sa tension p_0. D'après la loi de Gay-Lussac, son volume devient $v_0\ (1+\alpha\theta)$. Il s'est donc dilaté de de la quantité $\alpha v_0 \theta$, en refoulant d'autant la pression p_0 qui lui fait équilibre. De là un travail externe (3) qui a pour valeur $\alpha v_0 \theta.\ p_0$; et par conséquent une dépense de chaleur :

$$\frac{\alpha v_0 \theta p_0}{E}.$$

Mais nous pouvons obtenir une seconde évaluation de cette dernière. En effet, la dilatation ayant lieu sous pression constante exige, pour chaque degré centigrade, la quantité de chaleur C, ou kc (12). Pour gagner θ degrés, il a donc fallu fournir $kc\theta$ calories. Or cette quantité de chaleur s'est répartie, comme toujours, en trois portions : en premier lieu, celle que réclame la production du travail externe destiné à refouler préalablement l'atmosphère, pour préparer l'emplacement qui permettra cette expansion; et, en outre, celle qui est nécessaire pour élever de θ degrés la température à volume constant, le fluide pouvant ensuite se répandre librement dans le nouvel espace sans rien perdre de sa température, puisque le troisième terme de cette répartition, à savoir le travail interne, est nul dans les gaz parfaits. Or l'élévation de température à volume constant a réclamé $c\theta$ calories. Si donc l'on retranche cette quantité du total précédent, il reste, pour subvenir au travail externe :

$$(k-1)\,c\theta.$$

Égalons maintenant ces deux expressions. Il viendra, en supprimant le facteur commun θ :

$$(k-1)\,c=\frac{\alpha v_0 p_0}{E}=\frac{R}{E}.$$

De là une condition très importante qui relie les différents paramètres :

$$(14) \qquad R = (k - 1)\,cE,$$

et que nous appellerons la *relation paramétrique* (¹).

Si l'on remet pour R et k les nombres (11) et (13), et pour la chaleur spécifique de l'air sous volume constant sa valeur :

$$c = 0{,}16844;$$

il vient, en effectuant les calculs :

$$E = 423{,}128;$$

résultat très approché, comme on le voit, de celui que nous avons adopté en nombre rond : $E = 424$.

(¹) Cette équation a été donnée pour la première fois par M. Clausius (*Premier mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur*, p. 44).

CHAPITRE XIV

TRAVAIL DES GAZ

—

§ 1

FORMULE GÉNÉRALE

264 — Proposons-nous de déterminer la quantité de chaleur Q qui devra être fournie à un gaz parfait, pour l'amener d'un état initial (p_1, v_1, t_1) à un état final (p_2, v_2, t_2). Pendant cette évolution, les variables p, v, t n'ont pas cessé d'être reliées par l'équation typique (10) qui gouverne, en toutes circonstances, cette catégorie de fluides. Mais ce renseignement ne saurait suffire, si l'on n'y joignait, pour chaque cas particulier, la connaissance de la relation spéciale :

$$\varphi(p, v, t) = 0, \qquad (15)$$

définissant le genre d'expérience que l'on veut exécuter (nº 254).

Communiquons à un kilogramme de gaz la quantité élémentaire de chaleur dQ, et reprenons les raisonnements du numéro précédent. Cette provision de calorique se répartit en deux portions : 1° celle $Apdv$ qui correspond (1) à la production du travail externe destiné à refouler préalablement l'atmosphère ambiante, et à préparer l'emplacement dv qui permettra la dilatation du fluide; 2° celle qui est capable d'élever, à volume constant, la température au degré $t+dt$; (la libre expansion de ce volume dans la nouvelle capacité qui lui est offerte ne consommant ensuite aucun travail interne pour les

gaz parfaits). Cette seconde quantité sera cdt, et l'on aura pour le total :

$$(16) \qquad dQ = cdt + Apdv,$$

d'où, en intégrant entre les limites proposées :

$$(17) \qquad Q = c(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

Si l'on rapproche l'une de l'autre les équations différentielles (2) et (16), on obtient pour la valeur de l'accroissement de la chaleur interne :

$$(18) \qquad dU = cdt, \qquad U_2 - U_1 = c(t_2 - t_1).$$

Dans chaque cas, on déduira des relations (10) et (15) deux des variables p, v, t en fonction de la troisième, et en substituant leur expression dans la formule générale (17), on n'aura plus qu'à effectuer l'intégration d'une fonction comme d'une seule variable.

265 — Nous pouvons même avancer ce calcul une fois pour toutes, en employant la relation typique (10) à faire disparaître l'une des trois variables. La seconde partie de l'élimination ne pourra ensuite être complétée que lorsque, dans chaque cas particulier, l'équation (15) aura revêtu une forme déterminée.

Cette opération peut d'ailleurs se faire de trois façons différentes, puisqu'il existe trois quantités que l'on peut chasser à volonté. Adoptons en premier lieu les variables p et v.

Nous tirons, à cet effet, de la relation typique (10) :

$$dt = \frac{1}{R}(vdp + pdv),$$

et, en substituant dans l'expression (16) :

$$dQ = \frac{c}{R} vdp + \left(\frac{c}{R} + A\right) pdv.$$

Mais on déduit de la relation paramétrique (14), en divisant ses deux membres par ER :

$$\frac{1}{E} = \frac{(k-1)c}{R},$$

c'est-à-dire :

$$A + \frac{c}{R} = \frac{kc}{R}.$$

Il vient d'après cela :

$$dQ = \frac{c}{R}(vdp + kpdv). \tag{19}$$

Telle est l'équation différentielle de la chaleur dans les gaz parfaits.

Si l'on remplace successivement dans cette expression v et dv, p et dp au moyen de l'équation typique (10), on obtiendra de même, pour les deux autres systèmes de variables indépendantes, les expressions suivantes, moins souvent employées :

$$dQ = cdt + AR\frac{t}{v}dv,$$

$$dQ = kcdt - AR\frac{t}{p}dp.$$

266 — Nous pouvons maintenant constater directement la nécessité de posséder, pour la solution du problème qui nous occupe, la relation spéciale (15) qui définit chaque expérience en particulier; et reconnaître que l'expression de dQ ne saurait être intégrée d'une manière générale en fonction seulement des états limites, et indépendamment de la condition arbitraire qui gouverne dans chaque cas l'évolution thermique accomplie par le gaz.

En d'autres termes, l'expression de dQ n'est pas une différentielle exacte [1], en fonction des variables p et v supposées indépendantes. La condition à remplir pour cela serait en effet, en ce qui concerne la première (19), par exemple, des trois formules précédentes :

$$\frac{d\left(\frac{cv}{R}\right)}{dv} = \frac{d\left(\frac{ckp}{R}\right)}{dp},$$

[1] C'est M. Clausius qui, le premier, a formulé nettement cette vérité fondamentale de la thermodynamique

et elle se réduit à :

$$1 = k.$$

Or, nous avons vu (13) que k a la valeur 1,41.

Nous ne pouvons donc, si nous voulons aller ici jusqu'au bout de cette détermination, que supposer arbitrairement diverses formes pour la fonction (15), et achever alors la solution dans chaque cas. On pourrait assurément étendre beaucoup ces applications, au point de vue purement analytique, mais sans grande utilité pour l'application. Je me bornerai donc à envisager quatre hypothèses fondamentales, dans lesquelles chacune des quatre variables successivement t, v, p, Q, est supposée rester constante.

Nous connaitrons ainsi la quantité de chaleur qu'il est nécessaire d'inoculer au gaz pour lui faire accomplir l'évolution voulue. Ce résultat représentera également, sauf le signe, la quantité de chaleur que le fluide remettrait en liberté, s'il venait à subir une transformation précisément inverse. C'est même ainsi que l'on envisage le plus souvent la question, car les gaz sont appelés à travailler dans des machines où l'on recueille ce que l'on appelle leur *travail de détente*, c'est-à-dire l'équivalent dynamique de la chaleur dont je viens de parler. Ajoutons encore que l'on peut présenter les résultats sous deux formes distinctes, bien qu'équivalentes, suivant que l'on fait connaître le total de la chaleur engendrée, ou, séparément, la partie qui est convertie en travail externe, et qui forme ordinairement l'inconnue la plus directement utile des problèmes d'application. Il importe, dans chaque cas, d'être bien prévenu à cet égard. Nous désignerons le total du travail par T, en conservant, pour le travail externe, la notation T_e.

§ 2

DÉTENTES SPECIALES

267 — *Détente isotherme.* — On appelle détente *isotherme* celle pendant le cours de laquelle la température est maintenue cons-

tante. La relation (15) ne sera donc autre que la loi de Mariotte (259). Dans ces conditions, la variation de chaleur interne (18) s'annule directement, et le travail total T ne diffère pas du travail externe T_e. La formule (17) donne à cet effet :

$$T = T_e = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{v_1}^{v} \frac{p_1 v_1}{v} dv = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v},$$

d'où les quatre formes suivantes, que l'on peut employer indifféremment, et dans lesquelles la caractéristique L désigne essentiellement un logarithme *népérien* (¹) :

$$(20) \qquad T = T_e = p_1 v_1 L \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 L \frac{p_1}{p_2} = \mathrm{R}tL \frac{v_2}{v_1} = \mathrm{R}tL \frac{p_1}{p_2}.$$

Le travail de la détente isotherme est donc proportionnel à la fois à la température absolue et au logarithme du rapport des pressions ou des volumes extrêmes.

Nous conviendrons de désigner en toutes circonstances par ρ le rapport des pressions extrêmes, en le prenant de telle sorte que l'on ait :

$$\rho > 1, \qquad L\rho > 0.$$

Ce n'est, d'ailleurs, que dans le cas de la détente isotherme que ce quotient se confond, en vertu de la loi de Mariotte, avec le rapport inverse des volumes extrêmes, appelé *rapport de détente* (²).

S'il s'agit de l'air atmosphérique, on aura, en rendant à R sa valeur (11), et revenant des logarithmes népériens au système ordinaire (³) :

$$T = T_e = 29{,}2814 \times 2{,}3025 \; t \operatorname{Log} \rho = 67{,}42 \; t \operatorname{Log} \rho.$$

(¹) Nous conserverons cette notation pendant toute la suite de ce Cours, en affectant le signe *log* à la désignation des logarithmes du système décimal. On passe de l'un de ces systèmes à l'autre au moyen des modules de conversion 0,4343 et 2,3025.

(²) On appelle aussi parfois ce dernier : *rapport de détente géométrique*, et $\frac{1}{\rho}$ *rapport de détente dynamique*.

(³) On pourrait éprouver quelque étonnement en remarquant que, pour une détente complète, poussée jusqu'à l'hypothèse $\rho = \infty$, le logarithme devient infini. Il semble

268 — *Volume constant.* — Si nous supposons, en second lieu, le volume constant, c'est maintenant le travail externe qui disparaît de la formule (17), puisque sa production suppose essentiellement une variation d'étendue :

$$T_e = 0.$$

Il ne reste plus que l'influence de la chaleur sensible :

$$Q = U_2 - U_1 = c(t_2 - t_1),$$

et pour le travail qui lui correspondra, si l'on s'attache à capter la chaleur ainsi mise en liberté pour l'employer dynamiquement par un moyen quelconque :

$$T = Ec(t_2 - t_1),$$

c'est-à-dire d'après l'équation paramétrique (14) :

$$T = \frac{R}{k-1}(t_2 - t_1).$$

Si l'on rend à k sa valeur (13), on aura d'une manière générale :

$$T = 2,439\, R\,(t_2 - t_1),$$

et, en particulier, pour l'air atmosphérique (11) :

$$T = 2,439 \times 29,2814\,(t_2 - t_1) = 71,417\,(t_2 - t_1).$$

On voit que *le travail rendu disponible par une évolution accomplie sous volume constant est proportionnel à la chute de température. Le coefficient de proportionnalité est* $\frac{R}{k-1}$.

surprenant qu'une masse limitée de matière, à savoir un kilogramme de gaz, soit capable d'exercer ainsi une puissance indéfinie. Mais la difficulté disparaît si l'on fait attention que, pour maintenir jusqu'à cette extrémité la température constante, il a fallu fournir au gaz une quantité indéfinie de chaleur, dont il est dès lors naturel que l'on retrouve ainsi l'équivalent.

269 — *Pression constante.* — Dans une transformation sous pression constante ([1]), la chaleur totale s'exprime immédiatement par définition, au moyen de la chaleur spécifique C (12) ou kc ([2]) :

$$Q = kc\,(t_2 - t_1).$$

Pour dégager de ce total la portion Q_e, qui correspond au tra vail externe, il suffit d'en retrancher la variation d'énergie interne (18). Il vient ainsi :

$$Q_e = (k - 1)\,c\,(t_2 - t_1).$$

On en déduit :

$$T_e = (k - 1)\,cE\,(t_2 - t_1),$$

ou, d'après l'équation paramétrique (14) :

$$T_e = R\,(t_2 - t_1). \tag{21}$$

Le travail externe de la détente à pression constante est donc proportionnel à la chute de température. Le coefficient de proportionnalité est R.

On aura, en particulier, pour l'air atmosphérique (11) :

$$T_e = 29{,}2814\,(t_2 - t_1).$$

270 — *Détente adiabatique.* — Rankine a introduit dans la science l'expression de détente *adiabatique* ([3]) pour désigner les transformations pendant lesquelles le corps n'est mis en relation

([1]) Appelée aussi détente *isobare* (Murgue. Essai d'une exposition rationnelle de la théorie mécanique de la chaleur. *Bulletin de la Société de l'industrie minérale de Saint-Étienne*, 3e série, t. I, p. 868).

([2]) Ce résultat s'obtiendrait également à l'aide de l'équation (17), en y traitant p comme constante, et l'éliminant ainsi que v_1 et v_2 après l'intégration, au moyen de la relation-typique (10).

([3]) 'Αδιάβατος, impénétrable.

On ne doit pas confondre la détente *adiabatique*, dans laquelle le gaz exerce un travail externe, avec la détente *isodynamique*, pour laquelle on suppose de même l'absence d'échanges de chaleur avec les parois, mais en outre l'absence du travail externe; le gaz se précipitant dans le vide comme pour l'expérience de Gay-Lussac, de Joule, de Regnault (n° 257).

avec aucune source extérieure de chaleur, active ou soustractive. Il suit de là que le travail externe qu'il peut fournir dans ces conditions, ne saurait être exercé qu'aux dépens de son propre approvisionnement de chaleur interne. On aura donc, en changeant dans le cas actuel le signe de la formule (18), qui était supposée représenter pour le corps une acquisition d'énergie interne :

$$T_e = E(U_1 - U_2) = Ec(t_1 - t_2),$$

ou, d'après l'équation paramétrique (14) :

$$(22) \qquad T_e = \frac{R}{k-1}(t_1 - t_2).$$

Le travail externe de la détente adiabatique est proportionnel à la chute de température. Le coefficient est $\frac{R}{k-1}$.

On remarquera l'identité de cette formule avec celle du N° 268. Les mêmes transformations de l'équation peuvent donc se reproduire ici.

Je signalerai également la similitude des deux énoncés relatifs à la détente adiabatique et à celle qui s'effectue sous pression constante. La loi de proportionnalité subsiste dans les deux cas. Sa rapidité seule diffère d'après les coefficients. Le rapport de ces derniers est $k - 1$ ou 0,41. D'où cet énoncé : *Le travail développé sous pression constante est environ les deux cinquièmes du travail adiabatique, pour une même chute de température.*

§ 3

LOI DE LAPLACE

271 — *Loi de Laplace.* — En même temps que nous possédons les valeurs (20) et (21) du travail de la détente isotherme, et de celle qui s'exerce à pression constante, nous connaissons la loi de ces transformations, à savoir la constance même de la température ou de la pression. Nous avons de même la valeur (21) du travail de la détente adiabatique, mais nous ne connaissons pas

encore la relation entre t, v, p, qui préside à ce mode d'évolution. Cette loi réside au fond, à la vérité, dans l'absence d'échange direct de chaleur, mais il reste à la dégager explicitement.

Nous avons à cet égard la condition :

$$dQ = 0,$$

c'est-à-dire (19) :

$$vdp + kpdv = 0.$$

Pour rendre intégrable cette équation différentielle, divisons ses deux membres par le produit pv. Il vient ainsi :

$$\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0,$$

d'où, en intégrant :

$$Lp + kLv = \text{const.},$$

$$L(pv^k) = \text{const.} = L(p_1 v_1^k),$$

et enfin :

(25) $$pv^k = p_1 v_1^k,$$

ou sous une forme symétrique :

$$p^{\frac{1}{C}} v^{\frac{1}{c}} = \text{const.}$$

Telle est la relation cherchée, qui est connue sous le nom de loi de Laplace (¹) ou de Poisson.

(¹) Laplace. *Mécanique céleste*, livre XII. — Poisson (*Annales de chimie et de physique*, 2ᵉ série, t. XXIII. — *Traité de mécanique*, t. II, p. 646). — Reech. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1854. — Moutier. Sur la détente des gaz sans variation de chaleur. *Annales de chimie et de physique*, 5ᵉ série, t. VII, 1876. — Cazin. Essai sur la détente des gaz sans variation de chaleur. *Ibidem*, 3ᵉ série, t. LXVI, 1862. — Bourget. *Ibidem*, 1859. — Résal. *Annales des mines*, 1861. — Antoine. Variation de température des gaz et des vapeurs qui conservent la même quantité de chaleur sous des tensions différentes. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. t. CV, p. 1242; t. CVI, p. 57. — De Plana. *Mémoires de Turin*, 1842. — Ivory. *Philosophical Magazine*, 1827. — Clausius. *Annales de Poggendorf*, et *Annales de chimie et de physique*, 1852.

Elle est susceptible de trois énoncés distincts, suivant celle des trois variables t, v, p que l'on maintient absente de cette équation. Sa forme actuelle nous donne entre v et p :

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^k = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{1,41}.$$

La pression varie en raison inverse de la puissance k ou 1,41 du volume ([1]).

Pour éliminer la pression, nous écrirons ainsi la formule (23) :

$$pv \,.\, v^{k-1} = p_1 v_1 \,.\, v_1^{k-1},$$
$$Rt \,.\, v^{k-1} = Rt_1 \,.\, v_1^{k-1},$$

et enfin :

$$(24) \qquad \frac{t}{t_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{k-1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{0,41}.$$

La température absolue varie en raison inverse de la puissance $k-1$ ou 0,41 du volume.

Pour faire disparaître v, il suffit de transformer cette dernière relation au moyen de l'équation (23) :

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Il vient par là :

$$(25) \qquad \frac{t}{t_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{0,29}.$$

La température absolue varie en raison directe de la puissance $\frac{k-1}{k}$ ou 0,29 de la pression.

([1]) L'application de cette formule exigeant l'emploi d'une table de logarithmes, W. Rankine, pour dispenser de ce secours, a cherché (*On the Theory of explosive gas engine*, p. 466) à identifier approximativement la fonction $x^{1,41}$ avec une expression de la forme $A + Bx + Cx^2$. Il a montré que, pour des valeurs du rapport des volumes comprises entre 2 et 7, on peut employer avec une exactitude suffisante la formule :

$$\frac{p}{p_1} = 0,540\,\frac{v_1}{v}\left(1 - \frac{v_1}{v}\right) - 0,025.$$

On pourra faciliter l'emploi de ces diverses formules dans les applications au moyen de la table suivante ([1]) :

$\frac{p}{p_1}$	$\frac{v}{v_1}$	$\frac{v_1}{v}$	$\frac{t}{t_1}$	$\frac{t_1}{t}$
1,2	0,8786	1,1382	1,0543	0,9485
1,4	0,7875	1,2699	1,1024	0,9070
1,6	0,7163	1,3961	1,1460	0,8762
1,8	0,6588	1,5179	1,1859	0,8433
2,0	0,6115	1,6358	1,2226	0,8179
2,2	0,5713	1,7503	1,2569	0,7956
2,4	0,5371	1,8619	1,2890	0,7758
2,6	0,5074	1,9707	1,3193	0,7580
2,8	0,4814	2,0772	1,3480	0,7419
3,0	0,4584	2,1815	1,3752	0,7272
3,2	0,4379	2,2838	1,4012	0,7138
3,4	0,4194	2,3843	1,4260	0,7013
3,6	0,4027	2,4830	1,4498	0,6897
3,8	0,3876	2,5802	1,4728	0,6790
4,0	0,3757	2,6759	1,4948	0,6690
4,2	0,3610	2,7702	1,5161	0,6596
4,4	0,3493	2,8632	1,5367	0,6507
4,6	0,3384	2,9550	1,5567	0,6424
4,8	0,3283	3,0456	1,5760	0,6345
5,0	0,3190	3,1352	1,5948	0,6270
6,0	0,2802	3,5685	1,6813	0,5948
7,0	0,2512	3,9814	1,7582	0,5688
8,0	0,2285	4,3772	1,8276	0,5471
9,0	0,2101	4,7589	1,8912	0,5288
10,0	0,1950	5,1286	1,9500	0,5129
11,0	0,1824	5,4869	2,0044	0,4988
12,0	0,1713	5,8353	2,0556	0,4864
13,0	0,1618	6,1783	2,1040	0,4753
14,0	0,1535	6,5123	2,1497	0,4652
15,0	0,1462	6,8396	2,1931	0,4560

([1]) Elle est empruntée au *Traité des moteurs à gaz* de M. Gustave Richard (page 13), et calculée en supposant $k = 1,400$ (voy. n° 304, note). M. Mallard a construit de son côté une semblable table avec la valeur $k = 1,408$ et l'a poussée jusqu'à 10 atmosphères (*Bulletin de la Société de l'industrie minérale de Saint-Étienne*, 1re série, t. XII, p. 615). M. Pernolet l'a prolongée jusqu'à 15 atmosphères (*L'air comprimé et ses applications*, p. 49). MM. Hirsch et Debize ont dressé des tables très étendues relatives à ces diverses questions (*Leçons sur les machines à vapeur*, t. I, p. 246).

§ 4

TRANSVASEMENT DES GAZ

272 — *Formule générale.* — Imaginons qu'un premier récipient renferme un poids m_1 de gaz sous un volume total V_1, un volume spécifique v_1, une pression p_1, une température absolue t_1. Un autre vase présente les éléments correspondants : m_2, V_2, v_2, p_2, t_2. On met ces deux enceintes en communication. Si l'on suppose :

$$p_1 > p_2,$$

le gaz passera de la première dans la seconde, jusqu'à ce que la tension soit devenue égale de part et d'autre.

A un moment quelconque, un poids m a déjà effectué le passage. Le premier vase renferme alors la quantité de gaz $m_1 - m$ sous le volume total V_1, le volume spécifique v'_1, la pression p'_1, la température t'_1. Les éléments homologues sont, pour le second récipient : $m_2 + m$, V_2, v'_2, p'_2, t'_2. Proposons-nous de déterminer la loi de variation de ces diverses quantités, en supposant, pour fixer les idées, qu'aucun échange de chaleur avec les parois n'intervient dans le phénomène [1].

Le rapport des volumes spécifiques de l'instant initial et de l'instant quelconque pour le premier récipient est l'inverse de celui des poids qui occupent successivement ce même volume V_1 :

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{m_1}{m_1 - m}.$$

Celui des pressions sera donné par la formule (23), car le poids $m_1 - m$, actuellement renfermé dans le vase qu'il remplit en entier, s'y trouvait originairement condensé dans un moindre volume, et il y a subi une détente adiabatique :

$$\frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^k = \left(\frac{m_1 - m}{m_1}\right)^k.$$

(1) Bauschinger. Théorie de l'écoulement des gaz parfaits. *Journal de mathématiques et de physique de Schlœmilch*, t. VIII, p. 81.

Le rapport des températures sera, pour la même raison, fourni par l'équation (24) :

$$\frac{t'_1}{t_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{m_1 - m}{m_1}\right)^{k-1}.$$

L'état (v'_1, p'_1, t'_1) du premier récipient se trouve ainsi complètement connu à chaque instant.

273 — Le phénomène n'ayant exercé sur les objets extérieurs ni travail, ni échange de chaleur, le total de l'énergie interne des deux vases, quand nous les réunissons ensemble par la pensée, n'a pas dû changer. En désignant par U_0 la valeur qu'elle prend pour un kilogramme de gaz, au zéro du thermomètre absolu, elle sera $U_0 + ct$ à une température quelconque t (éq. 18). Dès lors le total de l'énergie interne avait comme valeur initiale :

$$m_1(U_0 + ct_1) + m_2(U_0 + ct_2),$$

et sera, pour un instant quelconque :

$$(m_1 - m)\,(U_0 + ct'_1) + (m_2 + m)\,(U_0 + ct'_2).$$

Si nous égalons entre elles ces deux expressions, les termes en U_0 disparaissent, ainsi qu'il était facile de le prévoir. Le coefficient c reste par suite en facteur commun, et, en le supprimant, nous obtenons l'égalité :

$$m_1t_1 + m_2t_2 = (m_1 - m)\,t'_1 + (m_2 + m)\,t'_2.$$

On en tire :

$$t'_2 = \frac{m_1t_1 + m_2t_2 - (m_1 - m)\,t'_1}{m_2 + m},$$

ou, d'après la valeur de t'_1 que nous fournit la dernière équation :

$$t'_2 = \frac{m_1t_1 + m_2t_2\left[1 - \left(\frac{m_1 - m}{m_1}\right)^k\right]}{m_2 + m}.$$

Telle est à chaque instant la température de la seconde enceinte.

Le volume spécifique du gaz qui la remplit est fourni par la proportion inverse des poids qui remplissent, aux deux instants considérés, son volume V_2 :

$$\frac{v'_2}{v_2} = \frac{m_2}{m_2 + m}.$$

Enfin nous déduirons la pression de l'équation typique :

$$\frac{p'_2 v'_2}{t'_2} = R = \frac{p_2 v_2}{t_2},$$

qui nous donne :

$$\frac{p'_2}{p_2} = \frac{v_2}{v'_2}\frac{t'_2}{t_2}$$
$$= \frac{m_2 + m}{m_2} \cdot \frac{m_2 + m_1 \frac{t_1}{t_2}\left[1 - \left(\frac{m_1 - m}{m_1}\right)^k\right]}{m_2 + m},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{p'_2}{p_2} = 1 + \frac{m_1 t_1}{m_2 t_2}\left[1 - \left(\frac{m_1 - m}{m_1}\right)^k\right].$$

L'état (v'_2, p'_2, t'_2) du second récipient se trouve donc également déterminé.

274 — Nous pouvons assigner d'après cela le terme de l'écoulement, et déterminer le poids total M qui sera définitivement passé d'une enceinte dans l'autre.

La condition à remplir pour cela est évidemment :

$$p'_1 = p'_2,$$

c'est-à-dire :

$$p_1 \left(\frac{m_1 - M}{m_1}\right)^k = p_2 \left\{1 + \frac{m_1 t_1}{m_2 t_2}\left[1 - \left(\frac{m_1 - M}{m_1}\right)^k\right]\right\}.$$

On en déduit :

$$\left(\frac{m_1 - M}{m_1}\right)^k = \frac{(m_1 t_1 + m_2 t_2) p_2}{m_1 t_1 p_2 + m_2 t_2 p_1}.$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{V_1}{m_1}}{\frac{V_2}{m_2}},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}\frac{v_2}{v_1};$$

et, en outre :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2},$$

d'où :

$$\frac{m_1 t_1}{m_2 t_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}.$$

Il vient ainsi :

$$\left(\frac{m_1 - M}{m_1}\right)^k = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 (V_1 + V_2)},$$

et, par conséquent :

$$M = m_1 \left\{ 1 - \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 (V_1 + V_2)}\right]^{\frac{1}{k}} \right\}.$$

Tel est le poids transvasé.

La température du récipient d'où est sorti le gaz est devenue par là :

$$\frac{T'_1}{t_1} = \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 (V_1 + V_2)}\right]^{\frac{k-1}{k}};$$

celle du second récipient :

$$T'_2 = \frac{V_2}{V_1 + V_2} \cdot \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_2 V_2}{t_2} + \frac{p_1 V_1}{t_1} \left\{ 1 - \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 (V_1 + V_2)}\right]^{\frac{1}{k}} \right\}}.$$

Enfin la pression commune a pour valeur :

$$P'_1 = P'_2 = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

275 — *Applications.* — Supposons en particulier qu'un vase de capacité finie V_1, et de tension p_1, se vide dans l'atmosphère à la tension p_2.

Il suffira, pour exprimer cette condition, de supposer $V_2 = \infty$. On aura pour le poids écoulé :

$$\frac{M}{m_1} = 1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{k}},$$

et, pour la température finale :

$$\frac{T'_1}{t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

La formule générale donne d'ailleurs :

$$T'_2 = t_2,$$

comme cela devait être.

276 — Imaginons en second lieu qu'un vase vide V_2 soit mis en communication avec l'atmosphère, qui a pour tension p_1. On devra supposer en premier lieu $p_2 = 0$, et en outre $V_1 = \infty$, $m = \infty$. La formule qui exprime le poids écoulé M prend alors la forme indéterminée $0 \times \infty$; mais on peut lever cet obstacle de la manière suivante. Après avoir introduit l'hypothèse $p_2 = 0$, on aura, en multipliant les deux membres par v_1, et remarquant que $m_1 v_1 = V_1$:

$$Mv_1 = V_1 \left[1 - \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{1}{k}}\right].$$

Nous pouvons développer cette expression par la série du binôme de Newton, puisque l'exposant est inférieur à l'unité en valeur absolue. En désignant par K la somme finie d'une certaine série convergente, on aura :

$$Mv_1 = V_1 \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{k}\frac{V_2}{V_1} + K\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right] \right\},$$

c'est-à-dire en réduisant :

$$M = \frac{V_2}{kv_1} - \frac{KV_2^2}{v_1 V_1},$$

et, en passant à la limite :

$$M = \frac{V_2}{kv_1}.$$

On trouve à l'aide d'un artifice analogue :

$$T'_2 = kt_1,$$

et en outre, ainsi qu'on devait s'y attendre :

$$T'_1 = t_1; \qquad P'_1 = P'_2 = p_1.$$

277 — Considérons enfin l'expérience de Joule (n° 257). Les deux volumes V_1, V_2 restent finis, mais le second est vide. On a donc $p_2 = 0$, $m_2 = 0$.

La masse écoulée devient dans ces conditions :

$$M = m_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^k\right],$$

et la température du récipient originairement plein d'air :

$$T'_1 = t_1 \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

On voit qu'elle a subi un abaissement, avant que les échanges de chaleur aient eu le temps de s'effectuer. Celle du vase primitivement vide prend alors pour valeur :

$$T'_2 = t_1 \frac{\dfrac{V_2}{V_1 + V_2}}{1 - \left(\dfrac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{1}{k}}},$$

et la pression finale :

$$P'_1 = P'_2 = p_2 \frac{V_1}{V_1 + V_2}.$$

§ 5

ENTROPIE

278 — *Théorème de Reech.* — Supposons que l'on fasse subir à une masse gazeuse une compression infiniment petite suivant le mode isotherme. L'invariabilité du produit pv, conformément à la loi de Mariotte, permet alors d'annuler sa différentielle totale :

$$pdv + vdp = 0,$$

$$dp = -\frac{p}{v}dv,$$

expression positive, puisque dv désigne une quantité négative.

Opérons de même une compression adiabatique élémentaire. La constance du produit pv^k, d'après la loi de Laplace, nous donne :

$$kpv^{k-1}dv + v^k dp = 0,$$

$$dp' = -\frac{kp}{v}dv.$$

On a donc, en supposant dans les deux cas une même compression dv :

$$\frac{dp'}{dp} = k;$$

d'où ce théorème de Reech [1] : *Le rapport des accroissements de pression que subit une masse de gaz en vertu d'une même diminution infiniment petite de volume, suivant que l'on emploie l'un ou l'autre des deux modes adiabatique ou isotherme, est invariable et égal au rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.*

279 — *Entropie.* — Nous avons reconnu (n° 266) que la différentielle dQ de la quantité de chaleur (19) n'est pas intégrable

[1] Reech. *Théorie des machines motrices et des effets mécaniques de la chaleur.*

lorsqu'on laisse aux variables p et v leur indépendance. En même temps, nous venons de voir (N° 271) que le résultat de sa division par pv, ou, si l'on veut, de sa multiplication par l'inverse $\frac{1}{t}$ de la température absolue, fournit au contraire une différentielle exacte. Il existe donc une fonction des variables indépendantes p, v qui ne dépend, dans les transformations des gaz parfaits, que de leurs états extrêmes (p_1, v_1); (p_2, v_2), et nullement de la succession d'états intermédiaires qui est spéciale à chaque cas.

On conçoit facilement qu'une telle fonction présente dès lors un très grand intérêt. M. Clausius a introduit, pour la désigner, la dénomination d'*entropie* (¹). Elle a pour différentielle :

$$\frac{dQ}{t} = c\left(\frac{dp}{p} + k\,\frac{dv}{v}\right),$$

c'est-à-dire (n° 271) :

$$\frac{dQ}{t} = cd\left[L(pv^k)\right].$$

L'entropie s, prise entre deux états extrêmes quelconques, $(p_1\, v_1)$; (p_2, v_2), a donc pour valeur :

$$s = cL\left(\frac{p_2 v_2^{\,k}}{p_1 v_1^{\,k}}\right). \tag{26}$$

280 — *Équation de Clausius.* — Parmi les transformations en nombre infini qu'il est possible d'imaginer, il en existe une classe très importante que l'on désigne sous le nom de *cycles fermés*, ou simplement de *cycles*. On appelle ainsi toute évolution dans laquelle un corps, une fois détourné de son état initial, s'y trouve ramené finalement après des vicissitudes quelconques.

Si l'on évalue l'entropie d'un pareil cycle d'après la formule (26), on voit qu'elle s'annule, avec le logarithme de l'unité. De là ce théorème capital dû à M. Clausius : *L'entropie d'un cycle fermé quelconque est toujours nulle pour un gaz parfait.*

(¹) Du mot grec τροπή, transformation.

On exprime ordinairement cette vérité en écrivant :

$$\int \frac{dQ}{t} = 0; \tag{27}$$

seulement il doit rester bien entendu qu'il ne s'agit pas, dans cette forme abrégée, d'une intégrale *indéfinie* ordinaire, mais, tout au contraire, d'une sommation d'éléments successifs aboutissant au point de départ de la série des transformations.

§ 6

DÉTENTE A TRAVAIL INCOMPLET

281 — Dans toutes les questions précédentes, nous avons supposé que le gaz fonctionne à travail complet; c'est-à-dire qu'il trouve derrière son enveloppe déformable une pression constamment égale à la sienne p, ou du moins infiniment peu inférieure $p-dp$, lorsqu'il se détend, ou infiniment peu supérieure $p+dp$, s'il se trouve au contraire comprimé par la contraction de cette enveloppe. Nous envisagerons actuellement une transformation à travail incomplet ([1]).

Considérons un gaz placé dans les conditions initiales (v_1, p_1, t_1), qui restent nécessairement liées entre elles par la relation typique :

$$p_1 v_1 = Rt_1.$$

Nous pouvons, pour fixer les idées, nous représenter ce fluide comme enfermé dans un cylindre, foncé à l'une de ses extrémités. Un piston mobile *sans masse*, et par suite *sans force d'inertie*, permettra l'expansion du gaz ou le refoulera sur lui-même, suivant les alternatives de la pression extérieure qu'il éprouve sur sa face externe. Supposons que cette dernière, qui était primitivement égale à la tension p du gaz, vienne à défaillir subitement, en tombant à

([1]) On verra plus loin (n° 430) que de telles évolutions sont appelées *irréversibles*.

une valeur moindre, variable d'ailleurs d'un instant à l'autre, et que je représenterai par P. Le piston se précipitera dans le *degré de vide* ainsi créé sur sa face libre, jusqu'à ce qu'il se trouve arrêté par un cran. A partir de ce moment, la force vive s'éteindra progressivement par l'action des remous, en se transformant en chaleur, et le gaz atteindra un état final (v_2, p_2, t_2) dont les éléments seront encore reliés par l'équation typique :

$$p_2 v_2 = R t_2.$$

Le volume final v_2, déterminé par la position de l'arrêt, est supposé connu, et il s'agit de trouver les valeurs de p_2 et de t_2.

Pour que la question admette une solution déterminée, il sera nécessaire de faire connaître, d'une part le total Q, positif ou négatif, de la chaleur qui aura été communiquée au gaz pendant la détente, et, en second lieu, la loi arbitraire qui préside à la variation de la pression extérieure P en fonction de la position du piston, c'est-à-dire de v. Dans ces conditions, Q sera, comme toujours, la somme de deux parties, à savoir : 1° l'énergie interne, qui est indépendante des conditions intermédiaires de la transformation, et ne dépend que des deux états extrêmes sous la forme (18) :

$$c(t_2 - t_1),$$

et 2° la chaleur équivalente au travail externe réellement dépensé pour refouler la force antagoniste, dont la valeur est P par unité de surface. Ce second terme a pour expression (1) :

$$A \int_{v_1}^{v_2} P dv.$$

On peut donc poser l'égalité :

$$Q = c(t_2 - t_1) + A \int_{v_1}^{v_2} P dv,$$

qui fera connaître t_2; après quoi l'équation typique fournira p_2 en fonction de v_2 et de t_2.

282 — Supposons, comme exemple, que la pression extérieure P reste constante. L'intégration s'effectuera alors sous la forme :

$$Q = c(t_2 - t_1) + AP(v_2 - v_1).$$

Imaginons en outre que la détente se produise sans aucun échange de chaleur entre le gaz et son enveloppe. Nous devrons pour cela faire $Q = 0$; d'où la condition :

$$c(t_2 - t_1) + AP(v_2 - v_1) = 0,$$

qui nous fournit la valeur de la température finale :

$$t_2 = t_1 - \frac{AP}{c}(v_2 - v_1),$$

ou, d'après la relation paramétrique (14) :

$$t_2 = t_1 - \frac{(k-1)P}{R}(v_2 - v_1).$$

On aura dès lors pour la pression finale :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{Rt_2}{v_2} \\ &= \frac{Rt_1}{v_2} - (k-1)P\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) \\ &= \frac{p_1 v_1}{v_2} - (k-1)P\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right), \end{aligned}$$

ou encore :

$$p_2 = [p_1 + (k-1)P]\frac{v_1}{v_2} - (k-1)P.$$

283 — Dans certains cas, au lieu de connaître directement le volume final v_2, c'est-à-dire le *degré de détente géométrique*, on assignera *a priori* la pression finale p_2, ou le *degré de détente dynamique*.

Dans ces conditions, la dernière égalité nous fournit pour la valeur de v_2 en fonction de p_2 :

$$v_2 = v_1 \frac{p_1 + (k-1)P}{p_2 + (k-1)P};$$

et la température finale t_2 devient par cette substitution :

$$t_2 = t_1 - \frac{(k-1)Pv_1}{R} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_2 + (k-1)P}.$$

Envisageons spécialement le cas de la *détente complète*, c'est-à-dire celui dans lequel on pousse l'expansion du gaz jusqu'à ce qu'il se mette en équilibre de pression avec l'extérieur. Nous poserons à cet effet :

$$p_2 = P,$$

et il viendra pour ce cas-limite :

$$v_2 = v_1 \frac{p_1 + (k-1)P}{kP},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k-1}{k} + \frac{p_1}{kP},$$

et, en second lieu :

$$t_2 = t_1 - \frac{(k-1)(p_1 - P)v_1}{kR},$$

d'où :

$$\frac{t_2}{t_1} = 1 - \frac{k-1}{k}\left(\frac{p_1 v_1}{Rt_1} - \frac{Pv_1}{Rt_1}\right)$$
$$= 1 - \frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{P}{p_1}\right),$$

et enfin :

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\frac{P}{p_1}.$$

Quant au travail ainsi développé, il aura pour valeur $P(v_2 - v_1)$, c'est-à-dire :

$$\frac{(p_1 - P)v_1}{k}.$$

Si, par exemple, la pression extérieure était égale à la moitié de la tension intérieure, on aurait pour la détente complète effectuée dans ces conditions :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2} = 0,5000;$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k+1}{k} = 1,7092;$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{k+1}{2k} = 0,8546.$$

Le travail externe prendrait en même temps pour valeur :

$$\frac{p_1 v_1}{2k} = 0,3546\, p_1 v_1.$$

CHAPITRE XV

ÉCOULEMENT D'UN GAZ PAR UN ORIFICE. VITESSE

—

§ 1

FORMULE GÉNÉRALE

284 — On désigne sous le nom de *Pneumatique* l'ensemble des lois qui président au mouvement des gaz parfaits. Ainsi que nous l'avons fait pour l'Hydraulique (n° 38), nous étudierons successivement les points singuliers de l'écoulement et ses longs parcours. Nous commencerons par l'étude du mouvement permanent [1] qui se produit à travers un orifice (fig. 188).

Nous représenterons le temps par τ. Au bout d'un intervalle élémentaire $d\tau$, les molécules qui occupent la section AB de l'ouverture seront arrivées en A_1B_1, tandis que l'on rencontrera en AB celles qui formaient, à l'origine de ce temps, une certaine tranche A'B'. Cette dernière section est elle-même occupée, à l'instant final, par des points matériels qui se trouvaient au début en A''B'', et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à découper la masse intérieure en tranches successives : ABA'B', A'B'A''B'', ..., $M_2N_2M_1N_1$, M_1N_1MN, emboîtées en quelque sorte les unes dans les autres, et telles que, dans le cours de cet intervalle de temps, chacune d'elles vient prendre la place de celle qui la précédait immédiatement. Les sections de ces

[1] J. Ville. Appareil destiné à régulariser l'écoulement d'un gaz à une pression quelconque. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 13 mars 1882, p. 724.

tranches s'amplifient de plus en plus, à mesure que l'on avance par la pensée vers l'intérieur, en même temps que se ralentissent, par cela même, les mouvements dont elles sont animées.

Nous envisagerons ici la masse finie qui se trouve comprise entre AB et une section MN suffisamment reculée pour que la vitesse (et surtout son carré) puisse être négligée dans l'équation des forces vives vis-à-vis de celle u de l'écoulement qui s'opère à travers l'orifice, lequel est ordinairement très rapide.

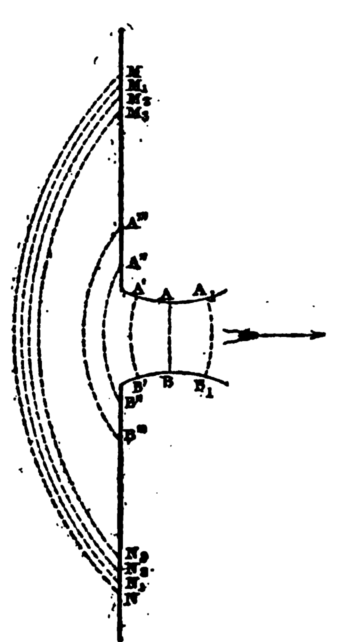


Fig. 188.

Dans la région ultérieure, qui reste ainsi sensiblement stationnaire, règne une pression que l'on peut considérer comme uniforme, et que nous désignerons par p_1. Nous représenterons de même par p_2 celle de l'enceinte extérieure, dans laquelle se déverse le fluide.

L'équation des forces vives, que nous appliquerons durant l'intervalle $d\tau$, consiste en ce que la demi-force vive de la masse MNAB subit, pendant le passage en $M_1N_1A_1B_1$, un accroissement égal au travail qui résulte 1° des forces extérieures ([1]), à savoir la pesanteur et la réaction des parois environnantes, 2° de la conversion dynamique de la chaleur inoculée ou soustraite durant cet intervalle, sauf la partie qui sert à modifier la provision de chaleur sensible.

En raison de la permanence du mouvement, tout reste identique pour les deux instants extrêmes dans l'espace M_1N_1AB. La demi-force vive de cette portion figure donc avec deux signes contraires dans l'accroissement de celle de la masse MNAB passant en $M_1N_1A_1B_1$. Il ne reste dès lors dans le premier membre que la différence con-

([1]) Les forces intérieures figurent également en général dans le théorème des forces vives; mais elles disparaissent dans le cas particulier qui nous occupe, puisque le travail interne est nul pour les gaz parfaits.

cernant les deux tranches ABA_1B_1 et MNM_1N_1. Ces deux volumes comprennent des masses égales, dont la valeur commune sera représentée par $\frac{Pd\tau}{g}$, si P désigne le *débit en poids*. Comme d'ailleurs nous négligeons le carré de la vitesse d'amont vis-à-vis de celui de la vitesse d'aval, il ne restera, pour constituer le premier membre, que la demi-force vive de la tranche ABA_1B_1, c'est-à-dire :

$$Pd\tau \frac{u^2}{2g}.$$

285 — Dans le second membre, nous commencerons par négliger, pour simplifier, le travail de la pesanteur, qui est ordinairement insignifiant dans le phénomène en question [1].

Nous pouvons de même faire abstraction du travail du frottement exercé par les parois solides, pour un aussi faible parcours. Une partie de ce travail se transforme d'ailleurs en chaleur, et nous reviendrons plus loin sur la prise en considération des quantités de chaleur communiquées au gaz pendant son trajet [2].

En ce qui concerne les réactions normales des parois, nous pouvons considérer successivement trois régions, à savoir : la paroi solide MABN, ainsi que la section AB et la section MN du courant.

La première est sans influence, car les efforts normaux aux trajectoires qui sont suivies à son contact par le fluide ne développent aucun travail.

Si nous admettons pour le moment [3] que la pression moyenne par unité de surface soit égale à p_2 dans toute l'étendue de la tranche AB, l'effort résistant total qui s'y trouve développé aura pour

[1] Nous aurons soin de le rétablir plus loin (n° 318), lorsqu'il acquerra une importance suffisante pour être pris en considération.

[2] Quant au frottement de la veine gazeuse contre le milieu ambiant au sein duquel se déverse le courant, il peut, dans certaines conditions que nous écartons en ce moment, prendre un développement considérable, et donner lieu aux phénomènes connus sous le nom d'entraînement latéral de l'air (Félix de Romilly. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 18 janvier et 12 avril 1875. — *Les Mondes*, 27 mai 1875) analogue à celui de l'eau (n° 90, note), et à celui de la vapeur dans les injecteurs dont nous nous occuperons plus tard, et pour lesquels le phénomène devient encore plus complexe qu'avec les gaz parfaits.

[3] Nous reviendrons plus loin avec détail sur ce point essentiel (n° 304).

valeur $p_2\omega_2$, en désignant par ω_2 l'étendue de cette section. Le déplacement étant $ud\tau$, le travail correspondant sera $-p_2\omega_2 ud\tau$. Mais $\omega_2 ud\tau$ mesure le volume de la tranche ABA_1B_1, et peut s'exprimer au moyen du quotient de son poids effectif $Pd\tau$ par le poids spécifique ϖ_2 ou $\frac{1}{v_2}$ (éq. 4). L'expression du travail résistant devient par là :

$$- Pd\tau \, . \, p_2 v_2 .$$

Celui de la pression motrice exercée sur la section d'amont MN aura donc de même pour valeur :

$$+ Pd\tau \, . \, p_1 v_1 .$$

286 — Il reste encore à envisager l'influence des échanges de chaleur sur la transformation éprouvée par le fluide, en passant de l'état MNAB aux conditions $M_1N_1A_1B_1$. Cette somme d'énergie se compose de l'ensemble de celle qui est développée simultanément pour la tranche MNM_1N_1 passant en $M_1N_1M_2N_2$, pour $M_1N_1M_2N_2$ venant en $M_2N_2M_3N_3$, ..., pour $A''B''A'B'$ passant en $A'B'AB$, et enfin pour $A'B'AB$ arrivant en ABA_1B_1. Il reviendra évidemment au même, pour effectuer cette sommation, au lieu de nous représenter par la pensée (ce qui est en effet la réalité) tout l'ensemble des tranches comprises entre MN et AB comme faisant simultanément chacune un pas en prenant la place de la précédente, d'imaginer qu'une seule d'entre elles, à savoir MMN_1N_1, franchisse successivement tous les pas qui la séparent de la situation finale ABA_1B_1. Au moyen de cet artifice, nous substituons à la transformation proposée de la masse finie MNAB en $M_1N_1A_1B_1$ pendant un parcours élémentaire, celle de la masse élémentaire MNM_1N_1 en ABA_1B_1 sur un parcours fini.

Le résultat de cette évaluation sera celui que nous avons appris à effectuer (chap. XIV, § 2) pour l'unité de poids, en ayant soin de le multiplier par le poids $Pd\tau$ de la tranche. Or ce facteur figure déjà dans tous les termes que nous avons calculés. Convenons donc, dès à présent, de le supprimer de l'équation qu'il s'agit de former, en réduisant son premier membre à :

$$\frac{u^2}{2g},$$

ainsi que l'influence des pressions extrêmes dans le second membre à :

$$p_1v_1 - p_2v_2,$$

et raisonnant dorénavant sur l'unité de poids.

La chaleur communiquée, défalcation faite de celle qui conserve la forme thermique pour s'adjoindre à la provision déjà existante de chaleur sensible, ne fournit pas de travail interne, puisqu'il s'agit d'un gaz parfait, mais seulement le travail externe nécessaire pour refouler le milieu environnant, de manière à permettre à la masse l'expansion qu'elle doit prendre du volume v_1 au volume v_2. Elle n'introduit donc dans la relation des forces vives que le terme :

$$\int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

287 — Nous pouvons dès lors écrire ainsi cette équation :

$$\frac{u^2}{2g} = p_1v_1 - p_2v_2 + \int_{v_1}^{v_2} pdv. \tag{28}$$

Mais il est facile, à l'aide de l'intégration par parties, de l'amener à une forme encore plus condensée. Nous avons en effet identiquement :

$$\int pdv = pv - \int vdp,$$

$$\int_{v_1}^{v_2} pdv = p_2v_2 - p_1v_1 - \int_{p_1}^{p_2} vdp$$

$$= p_2v_2 - p_1v_1 + \int_{p_2}^{p_1} vdp.$$

En substituant, on obtient simplement [1] :

[1] De Saint-Venant et Wantzel. Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air. *Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe cahier, 1837, p. 102. — Zeuner. *Das Locomotiven Blasrohr*, 1863, p. 68. — Bauschinger. Théorie de l'écoulement des gaz parfaits. *Journal de mécanique et de physique de Schlœmilch*, t. VIII, p. 81. — Dupré. Sur la vitesse d'écoulement des gaz par des orifices en mince paroi. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LVIII, p. 1004.

(29) $$\frac{u^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} vdp,$$

ou encore :

(30) $$\frac{u^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\varpi}.$$

Mentionnons encore une dernière transformation de la relation (28) à l'aide de l'équation typique des gaz parfaits (10) :

(31) $$\frac{u^2}{2g} = \mathrm{R}(t_1 - t_2) + \int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

On remarquera l'analogie de la formule (30) avec celle qui gouverne l'écoulement d'un liquide (n° 40), lorsqu'on y néglige, comme nous l'avons fait dans le cas actuel, le travail de la pesanteur :

(32) $$\frac{u^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\varpi}.$$

Le résultat est absolument semblable ; seulement, au lieu de prendre simplement la différence des valeurs extrêmes $\frac{p_1}{\varpi}$ et $\frac{p_2}{\varpi}$, il nous faut ici additionner successivement les accroissements $\frac{dp}{\varpi}$, en tenant compte pour chacun d'eux de la variation, arbitraire *a priori*, que subit la densité. C'est le caractère le plus saillant de ce nouveau phénomène. Au lieu de comporter une solution unique comme le mouvement des liquides, le problème de l'écoulement des gaz en admet une infinité, en raison des différents modes d'après lesquels sera instituée l'expérience, au point de vue de la communication de la chaleur à la masse en mouvement.

Nous ne pouvons donc, en ce moment, pour fixer plus complètement les idées, que nous attacher à un certain nombre d'hypothèses déterminées, qui nous permettent d'achever l'intégration. Comme ci-dessus (Chap. XIV, § 2), je me limiterai aux quatre cas fondamentaux qui résultent de la constance de l'une quelconque des quatre quantités p, v, t, Q. Remarquons même que ce point de vue ne don-

nera lieu ici qu'à trois exemples distincts, car l'égalité de pression au dedans et en dehors supprimerait tout écoulement, ainsi que le montre d'ailleurs immédiatement la formule (29).

§ 2

APPLICATIONS

288 — *Écoulement à densité constante.* — Considérons en premier lieu le cas où le poids spécifique reste invariable; soit que l'on ménage des échanges de chaleur déterminés avec précision en vue d'amener ce résultat, soit que l'on se borne à traiter par approximation le cas des faibles dépressions, très fréquent dans la pratique, en négligeant les petites variations qu'elles entraînent pour la densité. L'équation (30) ramène alors immédiatement à celle (31) du mouvement des liquides, ce qui est bien naturel, puisque ces derniers sont définis par la constance même de leur poids spécifique.

Cette relation :

$$u = \sqrt{2g\,\frac{p_1 - p_2}{\varpi}},$$

permet d'effectuer certains rapprochements qui ne sont pas sans intérêt. Pour formuler ces énoncés, je ferai remarquer que, dans une section déterminée, le *débit en volume* reste proportionnel à la vitesse, c'est-à-dire à la fonction :

$$\sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\varpi}}.$$

Le *débit en poids* étant le produit du précédent par le poids spécifique ϖ, le sera de son côté à l'expression :

$$\sqrt{(p_1 - p_2)\varpi}.$$

Nous obtiendrons ainsi, dans l'hypothèse qui nous occupe, les énoncés suivants :

THÉORÈME A. — *A pression effective* (1) *égale, la vitesse et le débit en volume augmentent en raison* INVERSE *de la racine des densités.*

THÉORÈME B. — *A densité égale, la vitesse ou le débit en volume varient en raison* DIRECTE *de la racine des pressions effectives.*

THÉORÈME C. — *Pour réaliser avec des fluides distincts la même vitesse ou le même débit en volume, il faut employer des pressions effectives en raison* DIRECTE *des densités.*

THÉORÈME A'. — *A pression effective égale, le débit en poids varie en raison* DIRECTE *de la racine des densités* (2).

THÉORÈME B'. — *A densité égale, le débit en poids varie en raison* DIRECTE *de la racine des pressions effectives* (3).

THÉORÈME C'. — *Pour réaliser avec des fluides distincts le même débit en poids, il faut employer des pressions effectives en raison* INVERSE *des densités* (4).

Pour appliquer ces aperçus à un exemple, comparons les résultats propres à l'eau et à l'air *normal*. Le rapport de leurs poids spécifiques donne exactement :

$$\frac{1000}{1,293} = 773,395; \qquad \sqrt{\frac{1000}{1,293}} = 27,809;$$

mais, pour abréger, nous formulerons les énoncés suivants en employant seulement les nombres entiers 773 et 28.

Les théorèmes A et A' montrent que, à pression effective égale, la vitesse et le débit en volume sont 28 *fois plus grands avec l'air qu'avec l'eau*, et le débit en poids, au contraire, 28 *fois plus grand avec l'eau qu'avec l'air.*

Les théorèmes B et B' n'ont pas à intervenir, puisqu'ils ont pour objet la comparaison de fluides de même densité.

(1) Rappelons que l'on appelle *pression effective* (n° 9) la différence de pression de l'intérieur à l'extérieur.

(2) Dans le théorème A, la proportion était *inverse.*

(3) Il en est de même dans le théorème B, ce qui est naturel, puisque, à densité égale, les poids sont entre eux comme les volumes.

(4) Dans le théorème C, la proportion était *directe.*

Le théorème C montre que, pour réaliser la même vitesse, ou débiter le même volume, il faut une pression 773 *fois plus grande avec l'eau qu'avec l'air*.

Le théorème C′ indique que, pour débiter le même poids, il faut une pression effective 773 *fois plus grande avec l'air qu'avec l'eau*.

Quand un gaz passe d'une tension supérieure à une pression moindre, il a tendance à se dilater. Il faut donc, pour que sa densité reste la même, qu'un abaissement de la température intervienne pour le contracter en sens inverse. Il est facile d'en obtenir l'évaluation. On a, en effet, d'après l'équation typique (10) :

$$p_1 v = \mathrm{R}t_1, \qquad p_2 v = \mathrm{R}t_2,$$

$$t_1 - t_2 = \frac{v}{\mathrm{R}}(p_1 - p_2),$$

ou encore :

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1} = \frac{p_1 - p_2}{p_1},$$

proportion qui fait connaître la chute de température en fonction des pressions et de la température initiale.

289 — *Écoulement isotherme*. — Supposons, en second lieu, la température constante. Le premier terme de la formule (31) s'évanouit. Le second, qui subsiste seul, a déjà été évalué (20). Nous obtenons ainsi l'*équation de Navier* (¹) :

$$\frac{u^2}{2g} = \mathrm{R}tL\,\frac{p_1}{p_2}. \tag{33}$$

On aura, en particulier, pour l'air atmosphérique, avec un logarithme ordinaire, et en introduisant le rapport ρ des pressions :

$$\frac{u^2}{2g} = 67{,}42\,t\,\mathrm{Log}\,\rho,$$

$$u = 36{,}368\,\sqrt{t\,\mathrm{Log}\,\rho}.$$

(¹) Navier. Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1829, t. IX, p. 311.

Pour prendre une idée, d'après un exemple effectif, de la vitesse que comporte ce genre d'écoulement, imaginons une température absolue de 300 degrés [1], et un rapport de pressions de moitié. On obtient, dans ces conditions :

$$u = 36{,}368 \sqrt{300 \text{ Log } 2} = 345{,}60\,;$$

plus de 345 mètres par seconde [2].

290 — *Écoulement adiabatique.* — Envisageons enfin l'écoulement sans échange de chaleur. Si nous substituons dans l'équation (31) la valeur (22), qui a été trouvée dans ce cas pour l'intégrale du travail externe, il vient :

$$\frac{u^2}{2g} = (\text{R} + \text{E}c)\,(t_1 - t_2),$$

ou, d'après l'équation paramétrique (14) :

$$\frac{u^2}{2g} = kc\text{E}\,(t_1 - t_2).$$

(1) C'est-à-dire 27 degrés du thermomètre usuel.

(2) J'emprunte aux notes ajoutées par M. G. Richard à sa traduction du *Manuel de la Machine à vapeur* de W. Rankine (p. 648) le tableau suivant, qui présente les valeurs de la vitesse relatives à une certaine gradation du rapport des pressions :

PRESSIONS		VITESSE — Mètres par seconde — u	OBSERVATIONS
SURPRESSION — Millimètres de mercure	RAPPORT DES PRESSIONS ρ		
1	1,00132	14	Grands vents.
10	1,01316	45	Petits hauts-fourneaux.
50	1,06579	101	
100	1,13158	142	Grands hauts-fourneaux.
150	1,19737	165	
200	1,26316	192	
380	1,50000	249	Appareils Bessemer.
750	2,00000	345	

On déduit de là, pour un gaz parfait quelconque, l'*équation de Weissbach* ([1]) :

$$(34) \qquad u = \sqrt{2gkEc(t_1 - t_2)}$$
$$= 108,292\sqrt{c(t_1 - t_2)}.$$

Il viendra, en particulier avec l'air atmosphérique :

$$u = 44,444\sqrt{t_1 - t_2}.$$

Nous voyons, par exemple, qu'une différence d'un seul degré centigrade donne naissance à une vitesse de plus de 44 mètres par seconde, égale à celle des plus grands ouragans.

On peut également exprimer la vitesse en fonction du rapport des pressions. Nous avons à cet effet la relation (25) :

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Il vient par suite :

$$\frac{u^2}{2g} = kcEt_1\left(1 - \frac{1}{\rho^{\frac{k-1}{k}}}\right),$$

ou, en effectuant, pour un gaz quelconque :

$$u = 108,292\sqrt{ct_1\left(1 - \frac{1}{\rho^{0,29}}\right)},$$

et, en particulier, avec l'air atmosphérique ([2]) :

$$u = 44.444\sqrt{t_1\left(1 - \frac{1}{\rho^{0,29}}\right)}.$$

([1]) De Saint-Venant et Wantzel. *Journal de l'École Polytechnique*, t. XVI, p. 102. — Weissbach (*Ingenieur und Maschinen Mechanik*, 1855, t. I, p. 821. — Vorlaüfige Mittheilungen über die Ergebnisse verglischender Versuche über die Aùsflùss der Lüft ùnd des Wassers ùnter hohem Drücke. *Civil Ingenieur*, t. V, p. 1). — Grashof. Ueber die Bewegung der Gase im Beharrungszustande in Röhrenleitungen ùnd Kanalen. *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, t. VII, p. 243, 280.

([2]) Les trois hypothèses que nous venons d'envisager ne se rencontrent pas avec

Pour comparer, sur un exemple effectif, le mode adiabatique avec celui du mouvement isotherme, supposons de nouveau :

$$t_1 = 300, \qquad \rho = 2.$$

Il vient alors :

$$u = 328,49.$$

La nouvelle vitesse est donc, dans ce cas, inférieure de 5 °/₀ environ à celle de l'écoulement isotherme [1].

Quant à la température finale, elle aura pour valeur :

$$t_2 = t_1 \left(\frac{1}{\rho}\right)^{0,29} = 245^{\text{D}},37.$$

Il se produit ainsi une chute de température de $54^{\text{D}},63$; le thermomètre usuel tombant de 27 degrés au-dessus de la glace fondante à $27^{\text{D}},63$ au-dessous.

une rigueur absolue dans la pratique. Les conditions réelles d'un écoulement effectif sont toujours plus compliquées, et trop mal définies pour que l'on puisse espérer une solution complètement exacte. On en sera quitte pour se contenter d'appliquer celle des trois formules (32, 33, 34) qui paraîtra devoir s'en rapprocher le mieux chaque fois. On se trouvera d'ailleurs guidé pour ce choix, si l'on fait attention que la première suppose que le gaz est refroidi par des moyens extérieurs, la seconde qu'il est réchauffé, la troisième qu'il ne subit aucun échange de chaleur. Les circonstances de l'expérience se rapprocheront nécessairement davantage de l'un de ces trois types que des deux autres. Bien souvent les phénomènes sont si rapides, qu'ils se prêtent difficilement aux échanges de chaleur. Aussi la formule de Weissbach est-elle de l'usage le plus fréquent.

[1] On trouvera dans la *Nouvelle Mécanique industrielle* de M. Pochet (p. 400) une table numérique très détaillée des diverses vitesses d'écoulement que prend l'air suivant les variations de la température et de la pression.

CHAPITRE XVI

ÉCOULEMENT D'UN GAZ PAR UN ORIFICE. DÉBIT

—

§ 1

FORMULE GÉNÉRALE

291 — L'équation de continuité établie dans l'étude de l'hydraulique (n° 19) régit encore l'écoulement d'une veine gazeuse. Seulement, il est nécessaire de ne pas perdre de vue que le *débit en volume* ne constitue plus une constante, comme cela avait lieu pour les liquides incompressibles. Ce caractère appartient exclusivement au *débit en poids* P, qui est le produit du poids spécifique ϖ par le débit en volume ωu, si ω désigne l'aire de la section du filet gazeux. On obtient ainsi la nouvelle équation de continuité [1] :

$$P = \varpi \omega u. \tag{35}$$

On ne devra pas oublier que, pour appliquer cette formule à l'évaluation de l'écoulement par un orifice, en substituant pour u l'une des valeurs fournies par les équations (28 à 34), la lettre ϖ devra représenter le poids spécifique correspondant à la section

[1] L'équation de continuité du mouvement des gaz sous forme de veine finie suppose, comme celle des liquides, l'hypothèse de la conservation des tranches. Il y a donc lieu de faire, en ce qui concerne l'état vibratoire de l'écoulement, la réserve qui a été déjà présentée ci-dessus au n° 71. De Saint-Venant et Wantzel. *Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe cahier, p. 90. — J. Maurat. Des mouvements vibratoires qui accompagnent l'écoulement des gaz et des liquides. *Revue des cours scientifiques*, 1868, p. 490.

où se développe cette vitesse, c'est-à-dire à la pression de l'enceinte d'*aval* dans laquelle le déverse le courant; puisqu'il a été admis jusqu'à nouvel ordre que la tension de cette dernière se propageait dans toute l'étendue de la section transversale.

Quant à celle-ci, nous la représenterons par $m\Omega$, en appelant Ω l'aire de l'orifice, et désignant par m un *coefficient de contraction* dont on ne peut, dans l'état actuel de la science, que demander la détermination à l'expérience. Rien n'autorise même d'une manière certaine à admettre *a priori* que ce facteur doive être invariable pour un type d'orifice donné, et indépendant des pressions.

Il vient dans ces conditions, comme expression du débit en poids :

$$P = m\Omega\varpi_1 u.$$

292 — Avec un orifice en mince paroi [1], on adopte pour m une valeur :

$$m = 0,636;$$

un peu supérieure à celle 0,62 qui concerne l'écoulement de l'eau (n° 39).

Pour un ajutage cylindrique on admet le chiffre :

$$m = 0,93;$$

dont l'écart est encore plus sensible par rapport à celui de l'hydraulique : 0,82 (n° 64).

Avec une tuyère convergente, on emploie le nombre :

$$m = 0,95;$$

qui diffère à peine du maximum 0,942 relatif aux liquides (n° 66), tout en continuant à lui rester supérieur.

On aurait enfin théoriquement :

$$m = 1,00;$$

[1] Daubuisson (*Annales des mines*, 1826. — (*Traité d'hydraulique*, p. 578).

pour un orifice parfaitement évasé (n° 43) ; bien que, dans la réalité, l'on n'arrive pas à dépasser la valeur 0,99 (¹).

§ 2

ÉCOULEMENT DANS LE VIDE

293 — Supposons que l'on ait réalisé le vide absolu sur le côté de la paroi opposé à celui qui maintient le fluide, et que, au fur et à mesure que l'écoulement se produit, on extraie le gaz de l'enceinte d'aval avec assez d'activité pour que l'on puisse continuer à admettre la condition limite :

$$p_2 = 0.$$

Il y a lieu d'envisager successivement les conséquences auxquelles conduisent, pour ce cas hypothétique, les trois lois spéciales d'écoulement que nous avons étudiées ci-dessus.

L'hypothèse de la densité constante indique alors une vitesse finie :

$$u' = \sqrt{2g\frac{p_1}{\varpi}} = \sqrt{2gRt_1}.$$

Toutefois cette conception abstraite ne saurait se rattacher à aucune réalisation, même approximative, puisque l'équation typique (14) montre que si p_2 s'annule sans que v_2 devienne infini, la température t_2 doit s'abaisser au zéro absolu.

L'écoulement isotherme présente un obstacle de même nature, car l'équation de Navier (33) indique alors une vitesse infinie ; paradoxe apparent dont nous avons déjà fourni l'explication (page 411, note 3).

Quant au mode adiabatique, il donne, d'après la formule de Weissbach (34), la valeur finie (²) :

$$u'' = \sqrt{2gkEct_1}.$$

(¹) Macquorn Rankine. *Écoulement de la vapeur*, traduction par Viollet, 1870, p. 39.
(²) Cette circonstance a donné lieu à une controverse intéressante, pour laquelle on

On a, pour le rapport de ces deux résultats :

$$\frac{u'}{u''} = \sqrt{\frac{R}{kEc}},$$

ou, d'après l'équation paramétrique (14) :

$$\frac{u'}{u''} = \sqrt{\frac{k-1}{k}} = 0,54.$$

Le mode adiabatique conduirait donc à une vitesse presque double de la première.

Il vient en particulier pour l'air atmosphérique :

$$u' = 23,966\sqrt{t_1}, \qquad u'' = 44,444\sqrt{t_1}.$$

Si, par exemple, nous reprenons l'hypothèse qui nous a servi pour les applications précédentes (n°s 280, 281) :

$$t_1 = 300,$$

il viendra :

$$u' = 415^m,10; \qquad u'' = 769^m,79.$$

294 — Le débit en poids donne lieu à des observations analogues (35).

Dans l'écoulement à densité constante, il conserve une valeur finie, puisqu'il en est ainsi séparément pour la vitesse et pour le poids spécifique.

peut consulter les sources suivantes : G. A. Hirn (*Annales de chimie et de physique*, 6e série, t. VII. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 12 juillet, 9 août, 20 septembre 1886. — *Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement des gaz*, etc. Gauthier-Villars, 1886. — *Recherches expérimentales sur la limite de la vitesse que prend un gaz*, etc. Gauthier-Villars, 1886. — *Nouvelle réfutation générale des théories appelées cinétiques*. Gauthier-Villars, 1886. — *L'avenir du dynamisme dans les sciences physiques*. — *La critique moderne et le dynamisme de l'avenir*. Gauthier-Villars, 1886. — *Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température*. Gauthier-Villars, 1886). — Clausius. *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. IX n° 3, 1886. — Hugoniot. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 28 juin, 26 juillet 1886; t. CIII, p. 241. — Parenty. *Ibidem*, 5 avril, 12 juillet 1886. — Giannantonio Zanon *La cinetica combattuta et vinta da G. A. Hirn*. Roma, in-8°, 1887.

En ce qui concerne le mode isotherme, nous avons vu que la vitesse augmente indéfiniment. De son côté, le poids spécifique tend vers zéro, puisqu'il varie en raison directe de la pression d'après la loi de Mariotte. De là une indétermination apparente qu'il est facile d'écarter.

Nous avons en effet, pour l'expression de $\varpi_2 u$ (33), sauf un facteur constant :

$$\frac{1}{v_2}\sqrt{L\rho} = \frac{p_2}{p_1 v_1}\sqrt{L\rho} = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{\sqrt{L\rho}}{\rho}.$$

Les deux termes de cette fraction deviennent à la fois infinis. Si donc nous leur substituons respectivement leurs dérivées, le dénominateur deviendra l'unité et le numérateur sera remplacé par :

$$\frac{\frac{1}{\rho}}{2\sqrt{L\rho}} = \frac{1}{2\rho\sqrt{L\rho}}.$$

Actuellement, les deux facteurs de ce nouveau dénominateur croissant à la fois au delà de toute limite, la fraction s'annule. On voit ainsi que le débit en poids tend vers zéro ; la raréfaction s'accélérant encore plus que la rapidité du mouvement.

Avec l'écoulement adiabatique, il s'opère de même une raréfaction indéfinie, puisque pv^k doit demeurer constant (23), en même temps que p tend vers zéro. On a vu d'ailleurs que la vitesse possède alors une limite finie u''. Le débit tend donc encore vers zéro.

Ces singularités analytiques ne présenteraient pas par elles-mêmes un grand intérêt, si elles ne mettaient en évidence un résultat fort important. On voit en effet que, dans ces deux derniers modes, le débit tend à s'annuler, tout aussi bien lorsque les pressions tendent vers l'égalité, que lorsqu'elles s'écartent autant que possible l'une de l'autre. Il doit donc exister dans l'intervalle une certaine valeur du rapport des pressions, pour laquelle la dépense atteint son maximum. Proposons-nous d'en effectuer la détermination.

§ 3

ECOULEMENT MAXIMUM

295 — *Écoulement isotherme.* — L'équation de continuité (35) nous montre que ce maximum se produira en même temps que celui de la fonction $\varpi_2 u$.

Si l'écoulement a lieu suivant le mode isotherme, nous avons vu que cette fonction renferme, sauf un coefficient constant, le facteur :

$$\frac{\sqrt{L\rho}}{\rho}.$$

Il suffira, pour la recherche du maximnm, d'en envisager le carré :

$$\frac{L\rho}{\rho^2},$$

et d'égaler à zéro la dérivée de ce dernier :

$$\frac{1}{\rho^3} - \frac{2}{\rho^3} L\rho = 0,$$

ce qui donne :

$$2L\rho = 1,$$

$$L(\rho^2) = 1 = Le,$$

$$\rho^2 = e,$$

$$\rho = \sqrt{e} = 1{,}6487.$$

Le maximum du débit en poids s'obtient donc, dans le mode isotherme, lorsque l'on détend la pression à peu près dans le rapport de 5 *à* 3.

La vitesse prend alors la valeur :

$$u = \sqrt{g\mathrm{R}t},$$

et, en particulier, pour l'air atmosphérique :

$$u = 16,947\sqrt{t}.$$

Quant à la valeur maximum du débit, elle se présente sous a forme suivante :

$$P = m\Omega\varpi_2 u = m\Omega\sqrt{gRt\,.\,\varpi_2^2} = m\Omega\sqrt{g\,.\,p_2v_2\,.\,\frac{1}{v_2^2}}$$

$$= m\Omega\sqrt{g\frac{p_2}{v_2}} = m\Omega\sqrt{g\frac{p_2^2}{p_1v_1}} = m\Omega\sqrt{g\frac{p_1^2}{ep_1v_1}},$$

et enfin :

$$P = m\Omega\sqrt{\frac{g}{e}\,.\,\frac{p_1}{v_1}} = 1,8996\,m\Omega\sqrt{\frac{p_1}{v_1}}.$$

296 — *Écoulement adiabatique.* — La fonction qu'il s'agit de rendre maximum $\varpi_2 u$, ou $\frac{u}{v_2}$, peut être remplacée, pour cette recherche, par son carré $\frac{u^2}{v_2^2}$. D'après la formule de Weissbach (34), on peut également substituer à ce dernier, sauf un facteur constant :

$$\frac{t_1 - t_2}{v_2^2},$$

ou, d'après la relation (24) :

$$\frac{t_1 - t_2}{v_1^2\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{2}{k-1}}},$$

c'est-à-dire enfin, en continuant à supprimer les facteurs invariables :

$$(t_1 - t_2)t_2^{\frac{2}{k-1}}.$$

L'équation dérivée par rapport à t_2 sera donc :

$$\frac{2}{k-1}(t_1 - t_2)t_2^{\frac{2}{k-1}-1} - t_2^{\frac{2}{k-1}} = 0$$

Multiplions par $(k - 1) t_2^{1-\frac{2}{k-1}}$, il viendra :

$$2(t_1 - t_2) - (k - 1)t_2 = 0,$$

et enfin :

$$t_2 = \frac{2}{k+1} t_1 = 0,83 t_1.$$

Cette condition très simple peut encore s'exprimer en fonction du rapport des pressions. On a en effet alors (25) :

$$\rho = \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1,9157.$$

On voit par là que *le maximum du débit en poids s'obtient, dans le mode adiabatique, lorsque l'on détend la pression à peu près à moitié.*

La vitesse est dans ce cas (34) :

$$u = \sqrt{2gk\mathrm{E}c} \sqrt{t_1 \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)} = \sqrt{2g\mathrm{E}c \frac{k(k-1)}{k+1}} \sqrt{t_1},$$

c'est-à-dire :

$$u = 44,665 \sqrt{ct_1},$$

et, en particulier, pour l'air atmosphérique :

$$u = 18,532 \sqrt{t_1}.$$

On remarquera que le rapport de cette vitesse à celle qui correspond au maximum de l'écoulement isotherme a pour expression :

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{E}c}{\mathrm{R}} \cdot \frac{k(k-1)}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} = 1,0817.$$

Quant à la valeur maximum du débit pour le mode adiabatique, elle sera la suivante :

$$\frac{P}{m\Omega} = \varpi_2 u = \frac{u}{v_2} = \frac{u}{v_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{u}{v_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{u}{v_1}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{1}{v_1^2} \cdot 2g\text{E}c\,\frac{k(k-1)}{k+1} \cdot \frac{p_1 v_1}{\text{R}}},$$

et enfin :

$$\text{P} = m\Omega\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{2g\frac{k}{k+1}}\sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = 2{,}1498\, m\Omega\sqrt{\frac{p_1}{v_1}}.$$

Le rapport de ce débit maximum à celui du mode isotherme a pour valeur :

$$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{2e\frac{k}{k+1}} = 1{,}1317.$$

§ 4

DÉBIT VARIÉ

297 — *Remplissage.* — Les théories précédentes concernent exclusivement l'écoulement permanent des gaz. Nous nous proposerons, en second lieu, l'étude de leur mouvement varié [1], en opérant comme il a été expliqué au n° 53, c'est-à-dire en appropriant les lois du mouvement permanent au mouvement instantané du fluide. J'envisagerai successivement le remplissage et la vidange progressifs d'un récipient.

Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse de remplir un vase de volume V, qui se trouve originairement à la pression p_2, et que l'on met en communication avec un réservoir maintenu, au moyen de compresseurs, à la tension constante p_1.

Le poids renfermé dans la première enceinte a pour valeur, à un instant quelconque, $\text{V}\varpi$. Dans un temps infiniment petit $d\tau$, il reçoit un accroissement exprimé par sa différentielle $\text{V}d\varpi$. D'autre

[1] Haton de la Goupillière. Lois de l'écoulement varié des gaz. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 19 et 26 octobre, 2 novembre 1886.

part, $m\Omega\varpi u$ représentant le débit en poids, la quantité de gaz qui traverse l'orifice dans le temps $d\tau$ pour pénétrer à l'intérieur du récipient a pour valeur $m\Omega\varpi u d\tau$. De là l'équation différentielle :

$$(36) \qquad V d\varpi = m\Omega\varpi u d\tau,$$

$$\frac{m\Omega}{V} d\tau = \frac{1}{u}\frac{d\varpi}{\varpi}.$$

Mais la relation (4) donne, en différenciant les logarithmes de ses deux membres :

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = -\frac{dv}{v},$$

et l'équation (29) :

$$u = \sqrt{2g\int_v^{v_1} v\frac{dp}{dv}dv},$$

après que l'on aura exprimé p en fonction de v, d'après l'équation spéciale destinée à définir, dans chaque cas, le mode d'écoulement que l'on se propose d'envisager. Il vient ainsi, en intégrant à partir de l'état initial v_2 du volume spécifique variable v, et intervertissant à la fois le signe et les limites de l'intégrale :

$$\tau = \frac{V}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_v^{v_2}\frac{dv}{v\sqrt{\int_v^{v_1} v\frac{dp}{dv}dv}}.$$

298 — Considérons en premier lieu l'écoulement isotherme :

$$pv = Rt, \qquad p = \frac{Rt}{v},$$

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{Rt}{v^2}, \qquad v\frac{dp}{dv} = -\frac{Rt}{v},$$

$$\int_v^{v_1} v\frac{dp}{dv}dv = Rt L\frac{v}{v}.$$

La seconde quadrature donne ensuite :

$$\int_v^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{\int_v^{v_1} v\,\frac{dp}{dv}\,dv}} = \frac{1}{\sqrt{Rt}} \int_v^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{L\,\frac{v}{v_1}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{Rt}} \int_{L\frac{v}{v_1}}^{L\frac{v_2}{v_1}} \frac{d\left(L\,\frac{v}{v_1}\right)}{2\sqrt{L\,\frac{v}{v_1}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{Rt}} \left(\sqrt{L\,\frac{v_2}{v_1}} - \sqrt{L\,\frac{v}{v_1}}\right).$$

Il vient donc :

$$\tau = \frac{V}{m\Omega} \sqrt{\frac{2}{gRt}} \left(\sqrt{L\,\frac{p_1}{p_2}} - \sqrt{L\,\frac{p}{p_1}}\right).$$

Il serait d'ailleurs facile de résoudre inversement cette équation, de manière à exprimer directement p en fonction de τ.

Quant à la durée totale τ' du remplissage isotherme, elle sera fournie par l'hypothèse $p = p_1$:

$$\tau' = \frac{V}{m\Omega} \sqrt{\frac{2}{gRt}\,L\rho}.$$

299 — Envisageons de même l'écoulement adiabatique .

$$pv^k = p_1 v_1^k, \qquad p = p_1 v_1^k v^{-k},$$

$$\frac{dp}{dv} = -\,k p_1 v_1^k v^{-k-1}, \qquad v\,\frac{dp}{dv} = -\,k p_1 v_1^k v^{-k},$$

$$(37) \qquad \int_v^{v_1} v\,\frac{dp}{dv}\,dv = \frac{k}{k-1}\,p_1 v_1^k (v_1^{1-k} - v^{1-k}).$$

La seconde quadrature donne ensuite :

$$\int_v^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{v\,\frac{dp}{dv}\,dv}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{k-1}\,p_1 v_1^k}} \int_v^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{v_1^{1-k} - v^{1-k}}}$$

$$= \sqrt{\frac{k-1}{k p_1 v_1}} \int_v^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^{1-k}}}.$$

Pour effectuer cette intégration, nous prendrons comme variable auxiliaire :

$$x^2 = \left(\frac{v}{v_1}\right)^{1-k} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

$$2Lx = (1 - k)Lv - (1 - k)Lv_1,$$

$$2\frac{dx}{x} = (1 - k)\frac{dv}{v}.$$

On peut donc écrire, en changeant à la fois le signe et les limites :

$$\int_v^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{\int_v^{v_1} v\frac{dp}{dv}dv}} = \frac{2}{\sqrt{k(k-1)Rt_1}}\int_{x_2}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

et, par suite :

$$\tau = \frac{V}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{gk(k-1)Rt_1}}\,L\left[\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x_2^2}}{x_2}\right],$$

ou, enfin :

$$\tau = \frac{V}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{gk(k-1)Rt_1}}\,L\left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}}\right].$$

300 — Nous pouvons également résoudre cette équation par rapport à p en fonction de τ. Il vient en effet :

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1+\sqrt{1-x_2^2}}{x_2}\,e^{-\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{gk(k-1)Rt_1}{2}}}.$$

Si l'on multiplie respectivement les deux termes de ces fractions par :

$$1 - \sqrt{1-x^2}, \qquad \text{et} \qquad 1 - \sqrt{1-x_2^2},$$

on aura, après simplification :

$$\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x_2}{1-\sqrt{1-x_2^2}}\, e^{-\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{gk(k-1)Rt_1}{2}}},$$

d'où, en prenant les inverses des deux membres :

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x_2^2}}{x_2}\, e^{\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{k(k-1)gRt_1}{2}}}.$$

Si l'on ajoute maintenant avec l'équation précédente, on obtient :

$$2\frac{x_2}{x} = \left(1+\sqrt{1-x_2^2}\right) e^{-\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{k(k-1)gRt_1}{2}}} + \left(1-\sqrt{1-x_2^2}\right) e^{\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{k(k-1)gRt_1}{2}}},$$

c'est-à-dire, en rendant à x et x_2 leurs valeurs :

$$2\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}} = \left\{ \begin{array}{l} \left[1+\sqrt{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}\right] e^{-\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{k(k-1)gRt_1}{2}}} \\ +\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}\right] e^{\frac{m\Omega\tau}{V}\sqrt{\frac{k(k-1)gRt_1}{2}}} \end{array} \right\}.$$

Telle est l'expression de p en fonction de τ.

301 — La durée complète τ'' du remplissage adiabatique s'obtiendra en supposant $p = p_1$, ce qui donne :

$$\tau'' = \frac{V}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{k(k-1)gRt_1}}\, L\left[\rho^{\frac{k-1}{2k}}\left(1+\sqrt{1-\rho^{-\frac{k-1}{k}}}\right)\right],$$

ou enfin :

$$\tau'' = \frac{V}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{k(k-1)gRt_1}}\, L\left(\rho^{\frac{k-1}{2k}} + \sqrt{\rho^{\frac{k-1}{k}} - 1}\right).$$

Si l'on remet pour m, k, g, R leurs valeurs numériques, et que l'on ait soin de multiplier le résultat par le module 2,3026 des

logarithmes ordinaires, afin de les substituer au système népérien, on obtiendra cette formule très simple :

$$\tau'' = 0,3883 \frac{V}{\Omega\sqrt{t_1}} \operatorname{Log}\left[\rho^{0,1454} + \sqrt{\rho^{0,2908} - 1}\right].$$

Pour un récipient d'un mètre cube et un orifice circulaire d'un décimètre de diamètre, nous pouvons former le tableau suivant, d'après une certaine gradation du rapport des pressions :

RAPPORT DES PRESSIONS	DURÉE TOTALE EN SECONDES	RAPPORT DES PRESSIONS	DURÉE TOTALE EN SECONDES
ρ	τ''	ρ	τ''
2	4,56	10	6,85
3	5,16	20	7,87
4	5,57	50	9,51
5	5,88	100	10,49

Dans un cas quelconque, il suffirait de multiplier ces résultats par le nombre de mètres cubes du récipient, et de diviser en même temps par le carré du nombre de décimètres du diamètre de l'orifice ([1]).

302 — *Vidange*. — Envisageons maintenant le problème inverse, dans lequel le récipient se vide au dehors. L'équation différentielle (36) doit alors subir deux modifications essentielles.

Tout d'abord, il faut changer le signe du premier membre, destiné à représenter la valeur *absolue* de la variation de poids;

([1]) La courbe représentative que l'on construirait en prenant pour abscisses le rapport ρ des pressions extrêmes, et, comme ordonnées, la durée totale τ'', est une *transformée de chaînette à axe horizontal*, pour laquelle, sans changer l'ordonnée de la chaînette, on substituerait à l'abscisse sa puissance $\frac{k-1}{2k}$. Un tel mode de transformation présente la propriété de conserver proportionnellement les sous-tangentes sur l'axe des ordonnées. Cette remarque permettra donc de construire facilement la tangente de la courbe représentative, puisque celle de la chaînette est bien connue.

attendu que ϖ devient alors une fonction décroissante, et $d\varpi$ une quantité négative.

En second lieu, le poids spécifique qui figure dans le second membre, et qui doit toujours se rapporter aux conditions d'aval (n° 282), cesse maintenant d'être variable, et prend la valeur fixe ϖ_2.

Il vient d'après cela :

$$-\,\mathrm{V}d\varpi = \varpi_2 m\,\Omega\, u d\tau,$$

$$\frac{\varpi_2 m\Omega}{\mathrm{V}}\,d\tau = -\,\frac{d\varpi}{u}.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne :

$$d\varpi = -\,\frac{dv}{v^2}.$$

Si en outre on substitue la valeur (29) de u, en ayant soin d'employer les limites d'intégration qui correspondent au cas actuel, il viendra :

$$\frac{\varpi_2 m\,\Omega\sqrt{2g}}{\mathrm{V}}\,d\tau = \frac{dv}{v^2\sqrt{\int_{v_2}^{v} v\,\frac{dp}{dv}\,dv}},$$

et, en intégrant à partir de l'état initial v_1 :

$$\tau = \frac{\mathrm{V}}{\varpi_2 m\,\Omega\sqrt{2g}}\int_{v_1}^{v}\frac{dv}{v^2\sqrt{\int_{v_2}^{v} v\,\frac{dp}{dv}\,dv}}.$$

Cette modification, qui altère à peine l'écriture de la formule, n'en trouble pas moins profondément sa nature. Les intégrations qui ont réussi tout à l'heure en termes finis pour les deux applications fondamentales, ne peuvent plus s'effectuer directement. L'équation de l'écoulement isotherme notamment ne s'intègre plus qu'en série convergente, que je crois inutile de développer ici.

303 — Quant à l'écoulement adiabatique, nous en pourrons effectuer l'intégration complète en modifiant légèrement l'expo-

sant de la loi de Laplace, et adoptant, pour cette circonstance, la valeur [1] :

$$k = 1{,}40 = \frac{7}{5}.$$

Si nous reprenons, à cet effet, la formule (37) :

$$\int_{v_2}^{v} v\,\frac{dp}{dv} = \frac{k}{k-1}\,p_2 v_2^{\,k}\,(v_1^{\,1-k} - v_2^{\,1-k}),$$

la seconde quadrature donnera :

$$\int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v^2\sqrt{\int_{v_2}^{v} v\,\frac{dp}{dv}\,dv}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{k-1}\,p_2 v_2^{\,k}}}\int_{v_1}^{v}\frac{dv}{v^2\sqrt{v^{1-k} - v_2^{\,1-k}}}$$

$$= \sqrt{\frac{k-1}{kp_2v_2}}\int_{v_2}^{v}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(\frac{v}{v_2}\right)^{1-k} - 1}}.$$

Nous prendrons comme variable auxiliaire :

$$y^2 = \left(\frac{v_2}{v}\right)^{1-k} = \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

(1) La détermination de ce paramètre a varié dans l'origine entre les valeurs 1,35 (Clément et Desormes) et 1,4196 (Masson. *Annales de chimie et de physique*, 2e série, t. III, p. 268). Les expériences de Cazin ont fourni, en 1862, la valeur, généralement adoptée depuis lors : 1,41. Cependant cet éminent physicien a retrouvé par une autre voie, en 1869, le nombre 1,407, auquel il attachait d'ailleurs moins de confiance qu'au précédent ; Regnault a déduit de ses propres expériences sur la vitesse du son le rapport 1,3945 ; et M. Amagat, de la compression de l'air, le nombre 1,397 (Mohr. Expression du rapport des deux chaleurs spécifiques déduite de la théorie mécanique de la chaleur. *Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch*, t. XVI).

La valeur 1,40 s'intercale assez convenablement entre ces derniers résultats. Elle est du reste adoptée par certains auteurs (Potier. *Cours de physique de l'École Polytechnique*, feuilles lithographiées. — G. Richard. *Les moteurs à gaz*). Ajoutons que M. Lucas a été amené, par des considérations directes, à penser que la véritable valeur du rapport *k*, indépendamment des erreurs d'observation relatives à sa détermination expérimentale, devait être prise *a priori* égale à 1,40 (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CIII, p. 1181, 1251).

On tire de là, d'après la valeur numérique $k = \frac{7}{5}$:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_2} y^{\frac{2}{1-k}} = \frac{1}{v_2} y^{-5},$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{5}{v_2} y^{-6}\, dy,$$

et par suite :

$$\tau = \frac{5\,\mathrm{V}}{\varpi_2 v_2 m\,\Omega} \sqrt{\frac{k-1}{2gk\mathrm{R}t_2}} \int_{y_1}^{y} \frac{dy}{y^6 \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}}$$

$$= \frac{5\mathrm{V}}{m\,\Omega\sqrt{7g\mathrm{R}t_2}} \int_{y_1}^{y} \frac{dy}{y^5\sqrt{1 - y^2}}.$$

Or on a :

$$\int \frac{dy}{y^5\sqrt{1-y^2}} = \frac{3}{8} L\left(\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}\right) - \frac{3}{8}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2}\left(1 + \frac{2}{3y^2}\right).$$

Il vient donc, en rendant à y sa valeur, et prenant l'intégrale entre les limites p_1 et p :

$$\tau = \frac{15\mathrm{V}}{8m\,\Omega\sqrt{7g\mathrm{R}t_2}} \left\{ \begin{array}{l} L\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{7}} \dfrac{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{7}}}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{2}{7}}}}\right] \\ - \left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{1}{7}} + \frac{2}{3}\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{3}{7}}\right]\sqrt{\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{2}{7}} - 1} \\ + \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{7}} + \frac{2}{5}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{3}{7}}\right]\sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{7}} - 1} \end{array} \right\}.$$

La durée totale τ''' de la vidange adiabatique s'obtiendra en faisant $p = p_2$, ce qui donne :

$$\tau''' = \frac{15\,\mathrm{V}}{8m\,\Omega\sqrt{7g\mathrm{R}t_2}}\left[L\left(\rho^{\frac{1}{7}} + \sqrt{\rho^{\frac{2}{7}} - 1}\right) + \left(\rho^{\frac{1}{7}} + \frac{2}{3}\rho^{\frac{3}{7}}\right)\sqrt{\rho^{\frac{2}{7}} - 1}\right].$$

§ 5

PRESSION DANS LA VEINE

304 — C'est d'après une hypothèse gratuite que nous avons, au début de cette étude (n° 285), étendu à l'écoulement d'un gaz la règle admise pour celui des liquides (n° 40), relativement à la constance, dans toute l'étendue de la section contractée, d'une pression égale à celle de l'enceinte au milieu de laquelle s'opère le déversement. Cette supposition était en effet naturelle, et elle a été longtemps acceptée sans conteste. Les premiers doutes émis à ce sujet ont été formulés en 1839 par de Saint-Venant et Wantzel [1]. Le capitaine Hugoniot est revenu récemment sur ce point, qu'il a beaucoup contribué à élucider [2].

Si l'on applique aux diverses tranches de la veine fluide l'équation de continuité (35), en y déterminant la vitesse u d'après l'équation des forces vives (29), on peut exprimer de la manière suivante la section variable de la veine fluide :

$$\omega = \frac{P}{\varpi u}.$$

Le minimum de ω correspond donc au maximum de la fonction ϖu. Or cette dernière recherche a été précisément effectuée ci-dessus (n°s 286, 287).

En continuant à désigner par p_1 la pression en amont, en des points assez reculés pour que l'on y puisse considérer le fluide comme stagnant, et par p la tension dans une section quelconque, nous avons reconnu que le maximum avait lieu, avec le mode isotherme, pour la valeur :

$$\frac{p_1}{p} = \sqrt{e} = 1,6487 ;$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0,6065 ;$$

(1) De Saint-Venant et Wantzel. Mémoires et expériences sur l'écoulement de l'air

et, dans les conditions adiabatiques, lorsque l'on a :

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1{,}9157;$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0{,}5220.$$

Nous désignerons par α la valeur spéciale de celui de ces rapports de pressions qui sera relatif au mode envisagé :

$$\frac{p}{p_1} = \alpha, \qquad \alpha < 1.$$

305 — Distinguons actuellement deux cas. Si la force élastique p_2 de l'enceinte d'aval est supérieure à αp_1, la tension qui décroît progressivement à partir de la pression d'amont p_1, ne pouvant, bien entendu, s'abaisser au-dessous de p_2, et, par suite, de αp_1, ne saurait atteindre la valeur qui correspond au minimum de ω. La section ne pourra donc recommencer à croître, après une phase de décroissance ; on n'aura pas, à proprement parler, de section contractée, et le calibre de la veine ira toujours en diminuant. En même temps la pression p, incessamment décroissante d'un bout à l'autre de la veine, finira par s'abaisser jusqu'à la tension p_2 qui règne dans l'enceinte d'aval. On pourra par conséquent considérer alors comme réalisée l'hypothèse qui nous occupe.

Si, au contraire, la pression d'aval p_2 est inférieure au produit αp_1, la tension p variable le long du jet gazeux passera par cette valeur αp_1 avant de s'abaisser jusqu'à p_2. A ce moment, l'aire ω deviendra minimum, ainsi que nous venons de le voir. Il y aura véritablement une section contractée, et l'on pourra la rapporter à la surface immédiatement connue Ω de l'orifice, au moyen d'un coefficient de contraction m déterminé, bien qu'inconnu *a priori*. Il sera dès lors facile d'exprimer le débit de l'écoulement à l'aide

déterminé par des différences de pression considérables. *Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe cahier, p. 102. — Hugoniot (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CII, p. 1545 ; CIII, 241, 1178, 1253. — *Annales de chimie et de physique*, novembre 1886).

de ces éléments et de la vitesse correspondante, déduite des formules de Navier (33) ou de Weissbach (34). Mais il est dans ce cas très essentiel, pour l'application de ces équations, de noter que la pression qu'il y aura lieu d'y introduire n'est plus alors p_2, mais bien αp_1. La vitesse se trouve déterminée dans ce cas, en fonction de la tension d'amont p_1, quelle que soit celle d'aval p_2.

Si, pour fixer encore davantage le langage, nous nous bornons en ce moment au mode adiabatique, et que, pour simplifier autant que possible les énoncés, nous réduisions à $\alpha = \frac{1}{2}$ la valeur 0,522 indiquée ci-dessus, on voit que c'est avec les faibles chutes de pression que la force élastique qui se développe dans la veine peut être égale à la tension *d'aval*, à savoir celles pour lesquelles le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ des pressions est supérieur à $\frac{1}{2}$ (¹). Pour les grandes détentes, au contraire, dans lesquelles ce rapport est moindre que $\frac{1}{2}$, la tension de la veine ne peut s'abaisser au-dessous de la moitié de la pression *d'amont*, et cette limite s'observera dans la section contractée.

306 — A l'aide de ces lumières nouvelles, nous pouvons maintenant revenir sur la théorie de l'écoulement varié pour y introduire ces distinctions.

Attachons-nous d'abord au cas des faibles détentes, c'est-à-dire celui pour lequel les valeurs *initiales* des pressions satisfont à la relation :

$$p_2 > \alpha p_1, \qquad \rho < \frac{1}{\alpha}.$$

Dans le cas du remplissage d'un récipient, p_1 est fixe, et la pression d'aval va en croissant à partir de p_2; pour la vidange, au contraire, p_2 reste constant, et la tension d'amont diminue sans cesse à partir de p_1. De l'une ou l'autre manière, on voit que l'inégalité précédente, supposée vérifiée à l'instant initial, subsistera

(¹) L'exactitude de cette proposition avait, en effet, été vérifiée par les expériences de Weissbach pour des pressions s'élevant jusqu'au double de la tension extérieure (Macquorn Rankine. *Sur les lois de l'écoulement de la vapeur*, traduction par Viollet 1870, p. 38).

a fortiori pendant toute la durée du phénomène. On pourra donc, d'après ce qui précède, admettre incessamment que la pression intérieure de l'écoulement ne diffère pas de celle de l'enceinte d'aval. Nos formules s'appliqueront alors sans modification.

Pour le cas des grandes chutes de pression, dans lequel les valeurs initiales satisfont à la condition :

$$p_2 < \alpha p_1, \qquad \rho > \frac{1}{\alpha},$$

il est, au contraire, indispensable d'opérer une distinction. Les remarques précédentes montrent que l'inégalité tend alors à s'atténuer, à mesure que le temps s'écoule. Il viendra un instant où elle sera remplacée par l'égalité, pour se renverser ensuite en sens contraire.

Pendant cette seconde partie de l'écoulement, les formules pourront encore s'appliquer. Il est même à remarquer que le calcul en peut être effectué *une fois pour toutes*, puisque cette phase s'étend toujours entre les mêmes limites du rapport des pressions, à savoir $\frac{1}{\alpha}$ et 1.

Durant toute la première période, au contraire, on rentre dans les conditions du mouvement *permanent*, puisque l'on a en amont la tension fixe p_1 du compresseur, et en aval la pression constante αp_1. Le débit est donc alors simplement proportionnel au temps.

307 — Hugoniot a effectué tous ces calculs [1], et évalué numériquement les intégrales définies auxquelles ils conduisent. Il a trouvé pour la durée totale du remplissage, dans le mode isotherme :

$$\tau_1 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{gRt}}\left[\sqrt{2L\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{2L\frac{1}{\alpha}}}\left(1 - \frac{1}{\alpha\rho}\right)\right],$$

c'est-à-dire :

$$\tau_1 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{Rt}}\left(0,6385 - 0,5264\,\frac{1}{\rho}\right);$$

[1] *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CIII, p. 922, 1002.

et, avec l'écoulement adiabatique :

$$\tau_2 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{gRt_1}}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2}{k(k-1)}}\,L\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{k-1}{2k}}+\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1}\right]\\ +\sqrt{\frac{k-1}{2k}}\,\frac{\alpha-\frac{1}{\rho}}{\sqrt{\alpha^{\frac{2}{k}}-\alpha^{\frac{k+1}{k}}}}\end{array}\right\},$$

c'est-à-dire :

$$\tau_2 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{gRt_1}}\left(0{,}5051 - 0{,}4652\,\frac{1}{\rho}\right).$$

Pour le problème de la vidange, il vient de même, dans le mode isotherme :

$$\tau_3 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{2gRt}}\left(\frac{L\alpha\rho}{\alpha\sqrt{L\frac{1}{\alpha}}} + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{x^2}dx\right),$$

c'est-à-dire :

$$\tau_3 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{2gRt}}\,(0{,}120 + 1{,}212\,\mathrm{Log}\,\rho);$$

et, avec la loi adiabatique :

$$\tau_4 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{gRt_1}}\sqrt{\frac{2}{k(k-1)}}\left[\frac{(\alpha\rho)^{\frac{k-1}{2k}}-1}{\alpha^{\frac{2}{k}}-\alpha^{\frac{k+1}{k}}} + \rho^{\frac{k-1}{2k}}\int_0^{\sqrt{\frac{k-1}{2}}}(1+x^2)^{\frac{2-k}{k-1}}dx\right].$$

c'est-à-dire :

$$\tau_4 = \frac{V}{m\Omega\sqrt{Rt_1}}\,(2{,}565\sqrt[7]{\rho} - 2{,}269).$$

Ces formules montrent notamment que le temps nécessaire pour remplir un réservoir est bien inférieur à celui qu'il met à se vider.

CHAPITRE XVII

ÉCOULEMENT D'UN GAZ DANS UN TUYAU

—

§ 1

FORMULES GÉNÉRALES

308 — *Equation fondamentale.* — Pour étudier le mouvement des gaz dans un tuyau d'une longueur notable [1], nous appliquerons encore l'équation des forces vives qui nous a conduits à la formule (29), mais en ayant soin d'y rétablir les deux influences dont nous avons négligé l'influence dans le cas précédent, ce qui était alors permis en raison de la faible étendue du parcours, à savoir la pesanteur et le frottement.

Si nous différencions l'équation (29), en ayant égard au sens des limites de l'intégrale, il vient [2] :

$$\frac{udu}{g} = -\ vdp.$$

[1] Combes. *Mémoire sur le mouvement de l'air dans les tuyaux de conduite*, in-8°, 1836. — Daubuisson. Du mouvement de l'air dans les tuyaux de conduite. *Traité d'hydraulique*, p. 586. — Navier. Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques dans les tuyaux. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1829. — Grashof. Étude sur le mouvement permanent des gaz dans les tuyaux. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, t. XXVII, p. 51, 387, 461 ; XXX, p. 102. — Girard. Mémoire sur l'écoulement uniforme de l'eau et des gaz dans les tuyaux de conduite, in-8°. — Stockalper. Expériences au Saint-Gothard sur l'écoulement de l'air comprimé en longues conduites métalliques. *Revue universelle des minès et de la métallurgie*, 2° série, t. VII, p. 257. — Poncelet. *Leçons lithographiées de l'École de Metz.* — Péclet. *Traité de la chaleur considérée dans ses applications*. 3° édition, t. I, n° 298 ; t. III, n° 38. — Ser. *Traité de physique industrielle*, t. I, 1887.

[2] Voir (n° 103, note) les explications permettant d'exprimer la force vive en fonction de la vitesse *moyenne u* qui se développe dans la section considérée.

On se rappelle que cette relation se trouve appliquée à l'unité de poids du gaz, d'après les explications du n° 286. Le travail de la pesanteur se réduira donc à $-dz$, en représentant par z l'altitude au-dessus d'un plan de comparaison inférieur.

En ce qui concerne le frottement, il sera (n° 71) pour un tronçon fluide de longueur ds :

$$\varpi\chi\varphi(u)ds, \tag{38}$$

si l'on désigne par χ le périmètre de la section, et par $\varphi(u)$ une fonction empirique de la vitesse moyenne u [1]. Son travail est par conséquent :

$$\varpi\chi\varphi(u)ds \,.\, ud\tau.$$

Pour avoir, ainsi qu'il vient d'être dit, le travail par *unité de poids*. nous diviserons par le débit en poids $\varpi\Omega ud\tau$ qui passe pendant le temps considéré $d\tau$:

$$-\frac{\chi}{\Omega}\varphi(u)ds,$$

en attribuant le signe négatif au quotient, puisqu'il s'agit d'un travail résistant.

L'équation ainsi complétée deviendra :

$$\frac{udu}{g}+\frac{dp}{\varpi}+dz+\frac{\chi}{\Omega}\varphi(u)ds=0,$$

si l'on ramène dans le premier membre les termes du second, qui sont tous affectés du signe négatif.

Lorsque la forme du tuyau sera complètement déterminée *a priori*. z, χ, Ω constitueront des fonctions connues de s. On possédera en second lieu l'équation de continuité (35) :

$$P=\varpi\Omega u,$$

[1] Il est toutefois très essentiel de remarquer que la mise en évidence du poids spécifique ϖ ne constituait, dans le cas des liquides, pour lesquels ce facteur est constant, qu'une simplification de notations, nullement nécessaire en elle-même. Pour les gaz, au contraire, elle exprime une véritable loi empirique, à joindre à celles qui ont été déjà formulées sur ce sujet (n° 71).

qui permet, d'une manière générale, de remplacer u en fonction de ϖ. Il restera, en troisième lieu, à fournir dans chaque cas particulier une relation entre p et v, ou entre p et ϖ, pour définir la transformation que subit le gaz tout le long du trajet.

On obtiendra alors, en éliminant encore ϖ à l'aide de cette condition, une équation différentielle entre p et s. Si l'on réussit à l'intégrer, on connaîtra ainsi, pour un point quelconque de la conduite, désigné par la valeur de s, la pression p qui s'exerce en ce lieu. On en déduira, d'après l'équation directement fournie, le poids spécifique ϖ, et par l'équation de continuité, la vitesse u. La question se trouvera ainsi complètement résolue.

309 — Envisageons, par exemple, un tuyau rectiligne incliné sous l'angle i par rapport à l'horizon; l'on aura :

$$z = s \sin i.$$

Si ce tuyau est cylindrique, χ et Ω deviendront des constantes; et s'il est de section ronde (¹), ayant pour diamètre D, il viendra (75) :

$$\frac{\chi}{\Omega} = \frac{4}{D}.$$

En ce qui concerne la forme de la fonction empirique $\varphi(u)$, on choisit, en général, parmi les divers types qui ont été mis en avant à l'occasion des liquides (n° 72), le plus simple de tous :

$$\varphi(u) = Bu^2,$$

avec le coefficient (²) :

$$B = 0,00037.$$

(¹) Pour conduire, sur une distance de 32 kilomètres, et avec une pression de 35 atmosphères, le gaz naturel des puits de Pennsylvanie jusqu'à la ville de Pittsburg, on a employé la forme *télescopique*, qui est caractérisée par un diamètre croissant (n° 82). La plus petite section se trouvant près du puits, la vitesse y est maximum, et, d'après le théorème de Bernoulli (n° 26), la pression minimum; ce qui tend à faciliter le dégement (*Génie civil;* t. XIII, p. 300).

(²) Cette valeur, proposée par Daubuisson pour un tuyau métallique, doit subir des modifications importantes lorsqu'il s'agit de la circulation de l'air dans un réseau de travaux souterrains plus ou moins compliqués. J'en ai cité plusieurs exemples (Haton

Si nous introduisons ces diverses hypothèses dans l'équation générale, elle prend la forme :

$$\frac{udu}{g} + \frac{dp}{\varpi} + ds \sin i + \frac{4B}{D} u^2 ds = 0.$$

310 — *Écoulement isotherme.* — Pour présenter un exemple de l'intégration complète de cette formule, nous supposerons que les échanges de chaleur soient tellement gradués le long du tuyau, que la température demeure constante. La relation à fournir directement sera dès lors la loi de Mariotte :

$$\varpi = \frac{\varpi_1}{p_1} p.$$

L'équation de continuité donne dans ces conditions :

$$u = \frac{P}{\Omega} \frac{1}{\varpi} = \frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1} \frac{1}{p}, \qquad du = -\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1} \frac{dp}{p^2}.$$

de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 389). Le coefficient le plus usité dans ce cas est celui qui a été indiqué par M. Devillez : 0,0018. M. Pochet emploie la valeur 0,000 367 ; mais u désigne pour lui la vitesse *à la paroi*, et non la *vitesse moyenne* comme nous le supposons ici (*Nouvelle Mécanique industrielle*, p. 268). M. Arson a été conduit par un ensemble considérable d'expériences sur la canalisation du gaz d'éclairage, à admettre des résultats analogues à ceux qui ont été obtenus avec l'eau par Darcy (n° 72). Il a donné des tables très étendues pour faire connaître la valeur que prend, suivant les circonstances, la perte de charge (Arson, Monard et Honoré. Expériences sur l'écoulement des gaz en longues conduites. *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, 1867). Il a également indiqué, en employant la formule de De Prony $au + bu^2$, les valeurs suivantes des coefficients, pour des diamètres gradués des tuyaux :

DIAMÈTRE — Mètres	a	b	NOMBRE des EXPÉRIENCES
0,500	0,000 020	0,000 246	27
0,325	0,000 151	0,000 326	31
0,254	0,000 237	0,000 389	4
0,105	0,000 560	0,000 480	7
0,081	0,000 589	0,000 489	10
0,050	0,000 702	0,000 595	5

Ces divers nombres se rapportent à des conduites en fonte. Quatre expériences exécutées avec des tuyaux de fer-blanc de $0^m,050$ de diamètre ont indiqué les valeurs :

$$a = 0{,}000\ 738 ; \qquad b = 0{,}000\ 345.$$

Il vient en substituant :

$$-\frac{1}{g}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{dp}{p^3}+\frac{p_1}{\varpi_1}\frac{dp}{p}+ds\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{ds}{p^2}=0,$$

ou, en séparant les variables :

$$ds=\frac{\frac{1}{g}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{dp}{p^3}-\frac{p_1}{\varpi_1}\frac{dp}{p}}{\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{1}{p^2}};$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$ds=\left\{\begin{array}{l}-\frac{D}{8Bg}\left[\frac{-\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{2dp}{p^3}}{\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{1}{p^2}}\right]\\ -\frac{p_1}{2\varpi_1\sin i}\left[\frac{2\sin i\,.\,pdp}{p^2\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2}\right]\end{array}\right\}.$$

Si l'on remarque que, dans chacune de ces deux fractions, le numérateur est devenu la différentielle du dénominateur, on aura, en intégrant avec des logarithmes népériens, et en prenant pour limite de l'intégration l'origine des arcs, à laquelle a été affecté l'indice 1 :

$$s=\left\{\begin{array}{l}\frac{D}{8Bg}L\left[\frac{\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{1}{p_1^2}}{\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2\frac{1}{p^2}}\right]\\ +\frac{p_1}{2\varpi_1\sin i}L\left[\frac{p_1^2\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2}{p^2\sin i+\frac{4B}{D}\left(\frac{Pp_1}{\Omega\varpi_1}\right)^2}\right]\end{array}\right\}.$$

311 — *Cas des faibles dépressions.* — Telle est la relation qui, pour le cas d'une température constante, définit la pression p dans la section située à la distance quelconque s du point (p_1, ϖ_1). Mal-

heureusement, cette formule se prête peu, dans son état actuel, à des applications pratiques, puisqu'elle ne saurait être résolue par rapport à p.

En vue d'en déduire une relation plus utile, on a développé les logarithmes en série, en s'autorisant, pour réduire celles-ci à leurs premiers termes, de la convergence qu'elles présentent *pour les faibles différences de pression*. On constate alors que le résultat de cette transformation reproduit identiquement celui que nous avons obtenu dans l'hydraulique. Il était d'ailleurs facile de s'y attendre, puisque, quand on en vient à négliger la faible compressibilité mise en jeu par ces petites dépressions, on doit nécessairement retomber sur les lois du mouvement des fluides incompressibles.

Mais il devient dès lors inutile, pour arriver à un tel résultat, d'employer un aussi long détour, qui, outre ce qu'il présente de pénible, a l'inconvénient de paraître subordonner cette conclusion à la loi de Mariotte, tandis qu'elle reste absolument générale. Nous sommes, au contraire, d'après les explications qui précèdent, autorisés à l'admettre directement comme évidente.

Reprenons donc, pour le mouvement uniforme de l'air dans un tuyau *sous de faibles dépressions*, l'équation fondamentale de l'hydraulique (n° 74) :

$$J = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u),$$

dans laquelle J désigne la perte de charge par unité de longueur :

$$J = \frac{\left(\frac{p_1}{\varpi} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\varpi} + z_2\right)}{l},$$

c'est-à-dire :

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\varpi l} + \sin i.$$

Il vient, d'après cela :

$$(39) \qquad p_2 - p_1 = \varpi l \left(\sin i + \frac{\chi}{\Omega} B u^2\right)$$

Tel est, par exemple, le cas de la ventilation des mines; mais j'ai considéré ailleurs ([1]) cette application, avec les développements que comporte sa grande importance. Je n'y reviendrai donc pas ici, et je me contenterai d'emprunter à l'industrie d'autres exemples.

§ 2

APPLICATIONS

312 — *Tuyauterie d'air comprimé* ([2]). — L'emploi de l'air comprimé ([3]) se répand de plus en plus dans les mines, en raison des facilités qu'il présente. Une telle installation comprend : 1° une *machine passive*, ou *compresseur*, commandée par un moteur direct, hydraulique ou à vapeur, et destinée à mettre l'air en tension (chap. XIX); 2° une *tuyauterie* pour permettre à ce dernier de franchir la distance qui sépare les deux appareils; 3° une *machine active*, ou *récepteur à air comprimé* (chap. XX), actionnant l'engin quelconque que l'on désire mettre en jeu.

Attachons-nous, en ce moment, à rechercher l'influence exercée spécialement par la tuyauterie. Nous aurons pour cela deux questions à envisager : 1° la chute de pression qui se produit dans la conduite; 2° la perte réalisée sur le travail dépensé.

La chute de pression h que détermine un parcours de longueur l est déterminée par la formule (39) :

$$h = \varpi \frac{\chi}{\Omega} Bu^2 l.$$

([1]) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 386.

([2]) Stockalper. Expériences au Saint-Gothard sur l'écoulement de l'air comprimé en longues conduites métalliques. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 2e série, t. VII, p. 257. — Projet de distribution de la force de 15000 chevaux par l'air comprimé à Birmingham. *Génie civil*, t. IX, p. 424. — Transmission par l'air comprimé. *Portefeuille économique des machines d'Oppermann*, 1883, p. 124. — Monnier. *Conduites de distribution de gaz*, chez Baudry. — Jules Bourdin. Transport de l'énergie par l'air comprimé. *La Lumière électrique*, t. XX, p. 199.

Horloges pneumatiques de la ville de Paris, actionnées par l'usine centrale de MM. Popp et Resch, à Pantin.

([3]) Ou de l'air raréfié, d'après une idée qui remonte à Denis Papin (*Actes des savants de Leipzick*. 1688), et qui a été appliquée sur une grande échelle pour l'extraction des mines à Épinac.

On a, de plus (10), en désignant par ρ le rapport de la pression du compresseur à celle de l'atmosphère, que nous supposerons normale pour fixer les idées : $p_0 = 10336$:

$$Rt = pv = \frac{p}{\varpi} = \frac{\rho p_0}{\varpi},$$

$$\varpi = \frac{\rho p_0}{Rt}.$$

Il vient d'ailleurs (n° 75), en désignant par D le diamètre du tuyau :

$$\frac{\chi}{\Omega} = \frac{4}{D}.$$

On peut donc écrire :

$$h = \frac{4Bp_0}{R} \cdot \frac{u^2 l\rho}{Dt},$$

ou, en effectuant [1] :

$$h = 0{,}52238\,\frac{u^2 l\rho}{Dt}.$$

Quant à la chute *proportionnelle* de pression, elle sera :

$$\frac{h}{p} = \frac{\varpi}{p} \cdot \frac{B\chi l u^2}{\Omega} = \frac{1}{pv} \cdot \frac{B\chi l u^2}{\Omega} = \frac{B\chi l u^2}{Rt\Omega}.$$

[1] Il ne sera pas inutile de rapprocher de cette formule, celle qui a été déduite des expériences exécutées au percement du tunnel du Mont-Cenis (*Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 1re série, t. IV). Elles ont, à cette époque, fourni l'expression :

$$0{,}00936\,\frac{u^2 l}{D}.$$

La température n'ayant jamais dépassé 29°,5 nous pouvons admettre $t = 300$. Quant à la pression, elle était de 7 kilogrammes par centimètre carré, ce qui suppose $\rho = 6{,}772$. La formule ci-dessus devient par là :

$$0{,}01179\,\frac{u^2 l}{D},$$

et diffère peu, comme on le voit, de la précédente.

Des écarts de cet ordre n'ont d'ailleurs pas lieu de surprendre dans cette matière encore imparfaitement connue. « Les formules relatives à l'influence des conduites « ne doivent être prises que sous bénéfice d'inventaire. La loi empirique sur laquelle « elles sont fondées, vraie pour certains cas, n'offre en effet aucune garantie de géné« ralité. Il est donc bon de n'user qu'avec circonspection de ces équations. » (Pernolet. *L'air comprimé*, p. 49).

En désignant par V le volume d'air comprimé qui est transmis par seconde :

$$V = \Omega u,$$

on pourra écrire :

$$\frac{h}{p} = \frac{BlV^2}{Rt} \cdot \frac{\chi}{\Omega^3} = \frac{64B}{\pi^2 R} \cdot \frac{lV^2}{tD^5},$$

ou, en effectuant :

$$\frac{h}{p} = 0{,}000\,081\,939\,\frac{lV^2}{tD^5}.$$

Si nous admettons comme température absolue, $t = 300$:

$$\frac{h}{p} = 0{,}000\,000\,273\,13\,\frac{lV^2}{D^5},$$

c'est-à-dire *par kilomètre*, en faisant $l = 1000$ [1] :

$$\frac{h}{p} = 0{,}000\,273\,13\,\frac{V^2}{D^5}.$$

[1] Reprenons l'exemple du Mont-Cenis, en complétant les données de la manière suivante.

Le diamètre des conduites était :

$$D = 0^m,20.$$

On envoyait 5 mètres cubes par minute, d'où :

$$V = 0{,}0833.$$

On trouve ainsi :

$$\frac{h}{p} = 0{,}00597\,;$$

soit environ 6 millièmes, quantité presque inappréciable. Mais de telles conditions étaient exceptionnellement favorables.

Dans les travaux de mines ordinaires, le volume envoyé par minute se rapprochera plutôt d'un mètre cube, soit : $V = 0{,}0167$. Quant au diamètre, il ne doit pas s'abaisser au-dessous de 5 à 7 centimètres. Pour $D = 0{,}07$ on aura :

$$\frac{h}{p} = 0{,}045317\,;$$

c'est-à-dire près de 5 %, valeur encore favorable mais déjà plus sensible. Pour $D = 0{,}05$ on arriverait à :

$$\frac{h}{p} = 0{,}24373\,;$$

soit une perte d'environ un quart, inacceptable économiquement. On voit ainsi à quel

Les considérations précédentes supposent une transmission horizontale. Si elle s'étend, au contraire, de la surface au fond d'un puits de mines, l'influence de la dénivellation peut devenir capable de compenser, et au delà, les pertes de tension dues au frottement. J'ai montré, par exemple [1], qu'à 500 mètres de profondeur la pression se trouve augmentée de 6 %, et, à 1000 mètres, de près de 13 %. D'une manière générale, elle est, dans nos climats, fournie en fonction de la hauteur H du puits par la relation :

$$\text{Log}\,\frac{p}{p'} = 0{,}000\,051\,746\ \text{H}.$$

313 — Passons, en second lieu, à la recherche du rendement dynamique. Nous admettrons, pour fixer les idées, le mode isotherme pour la mise en tension de l'air [2].

Le travail nécessaire pour réaliser sur un kilogramme d'air le rapport de pressions ρ sera alors (20) :

$$pv\,L\rho,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{p}{\varpi}\,L\rho.$$

Si P désigne le débit par seconde, on aura donc à fournir :

$$\frac{\text{P}pL\rho}{\varpi}.$$

Le frottement exercé par un tuyau de longueur l a pour valeur (38) :

$$\varpi\chi l\text{B}u^2\,;$$

point il est essentiel de ne pas faire de fausses économies sur le diamètre des conduites.

On ne doit d'ailleurs pas perdre de vue une autre cause de chute de pression, qui consiste dans les fuites à travers les joints; déperdition beaucoup plus difficile à éviter avec l'air qu'avec l'eau.

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 371, note 1.

[2] Il serait facile de reprendre des calculs analogues en se fondant sur le mode adiabatique.

son travail par seconde s'obtiendra en multipliant par u :

$$\varpi \chi l B u^3,$$

ou, en introduisant le débit en poids (35) :

$$\frac{B \chi l P^3}{\varpi^2 \Omega^3}.$$

Appelons λ le rendement. La *perte proportionnelle* $1 - \lambda$ s'obtiendra en prenant le rapport des deux expressions que nous venons d'obtenir :

$$1 - \lambda = \frac{B \chi l P^2}{\varpi \Omega^3 p L \rho}.$$

Pour la mettre sous une forme plus pratique, introduisons la force en chevaux N que l'on se propose de transmettre, sauf la déperdition inévitable :

$$N = \frac{1}{75} \frac{P p L \rho}{\varpi}.$$

En éliminant, à l'aide de cette relation, le débit en poids, il viendra :

$$1 - \lambda = \frac{(75)^2 B \chi l \varpi N^2}{\Omega^3 p^3 (L \rho)^3}$$

On a d'ailleurs, en invoquant la loi de Mariotte, puisque nous avons admis le régime isotherme :

$$\frac{\varpi}{p^3} = \frac{\varpi}{p} \frac{1}{p^2} = \frac{\varpi_0}{p_0} \left(\frac{1}{\rho p_0} \right)^2 = \frac{\varpi_0}{\rho^2 p_0^3},$$

et, par suite :

$$1 - \lambda = \frac{(75)^2 B \varpi_0 \chi l N^2}{p_0^3 \Omega^3 \rho^2 (L \rho)^3}.$$

Supposons maintenant la section circulaire et de diamètre D :

$$\chi = \pi D, \qquad \Omega = \frac{\pi D^2}{4}, \qquad \frac{\chi}{\Omega^3} = \frac{64}{\pi^2 D^5}.$$

Il viendra ainsi :

$$1 - \lambda = \frac{(75)^2 . 64 . B\varpi_0}{\pi^2 p_0^3} \cdot \frac{lN^2}{D^5 \rho^2 (L\rho)^3}.$$

En remplaçant B, ϖ_0 et p_0 par leurs valeurs, et transformant les logarithmes népériens en logarithmes ordinaires à l'aide du module 2,3025, nous obtenons définitivement :

$$1 - \lambda = \frac{(75)^2 . 64 . 0{,}00037 . 1{,}293}{(3{,}1416)^2 . (10336)^3 . (2{,}3025)^3} \cdot \frac{lN^2}{D^5 \rho^2 (\text{Log } \rho)^3},$$

ou, en effectuant :

$$1 - \lambda = \frac{0{,}158032}{10^{10}} \cdot \frac{lN^2}{D^5 \rho^2 (\text{Log } \rho)^3}.$$

La perte est donc proportionnelle à la distance et au carré de la puissance à transmettre. Elle varie en raison inverse de la cinquième puissance du diamètre des conduites, ce qui fournit un moyen très efficace d'en réduire l'importance. Elle dépend enfin du rapport des pressions d'après une fonction plus compliquée et assez rapide :

$$\frac{1}{\rho^2 (\text{Log } \rho)^3}.$$

314 — Supposons par exemple une compression à 5 atmosphères, moyenne qui varie peu, en général, dans les applications :

$$\rho = 5, \qquad 1 - \lambda = \frac{0{,}00151646}{10^{10}} \cdot \frac{lN^2}{D^5}.$$

Rapportons la perte proportionnelle au kilomètre :

$$l = 1000, \qquad 1 - \lambda = \frac{1{,}51646}{10^{10}} \cdot \frac{N^2}{D^5}.$$

Supposons que la puissance à transmettre soit de 10 chevaux :

$$N = 10, \qquad 1 - \lambda = \frac{151{,}646}{10^{10}} \cdot \frac{1}{D^5}.$$

Nous avons vu que le diamètre, sauf pour de très courts branchements, ne doit pas descendre au-dessous de 5 centimètres. Admettons cette limite extrême :

$$D = 0{,}05; \qquad 1 - \lambda = 0{,}0485267.$$

Les praticiens admettent ordinairement en bloc une perte de 5 % environ, dans toutes les conditions de la pratique. L'évaluation précédente rend compte de ce résultat; mais nos formules permettront de le nuancer davantage. La distance dépassera parfois 1 kilomètre, mais bien souvent aussi elle restera en dessous de cette valeur. Il serait d'ailleurs facile de trouver, dans la dilatation de la section, une compensation à l'augmentation du trajet. Si, par exemple, pour 2 kilomètres, on prend un diamètre de $0^{m},06$, le déficit s'abaisse à 0,039. Si, à 5 kilomètres, on adopte $0^{m},07$, on obtient 0,036. Ces chiffres se tiennent ainsi dans des limites assez constantes, et, en les majorant légèrement pour tenir compte des résistances accessoires occasionnées par les coudes, étranglements, etc., on retombe sensiblement sur le coefficient de 5 %.

Reconnaissons, dans tous les cas, combien la tuyauterie, *à ne l'envisager qu'en elle-même*, constitue, avec l'air comprimé, un mode avantageux de transmission de la force. Malheureusement cette influence ne saurait être, dans la réalité, disjointe de celle des deux appareils extrêmes; et alors la conclusion se renversera, comme nous le reconnaîtrons quand nous nous occuperons de ces organes.

315 — *Comparaison de la transmission de la puissance dynamique par l'air comprimé ou par l'eau forcée.* — Parmi les différentes solutions [1] que comporte le problème, aujourd'hui à l'ordre du jour, de la transmission de l'énergie à distance, il en est deux dont le rapprochement se présente naturellement à l'esprit, à savoir la circulation dans une conduite de l'air comprimé ou de l'eau forcée. Proposons-nous d'en effectuer la comparaison au point de vue économique [2].

[1] Arbres de couche, barres de renvoi, câbles télédynamiques, air comprimé, air raréfié, eau forcée, électricité.

[2] Jules Lauriol. Comparaison entre les différents systèmes de transmission de la

Envisageons à cet égard 1 kilogramme d'air, que nous prenons dans les conditions initiales (p_0, v_0,) pour le comprimer d'après un rapport de pressions ρ. Nous admettrons comme tout à l'heure pour cette opération le mode isotherme [1]. Le travail ainsi emmagasiné dans le fluide sera (20) :

$$p_0 v_0 L\rho.$$

Si on le rapporte à l'unité de volume, en divisant par v_0, il viendra pour le travail par mètre cube d'*air naturel :*

$$p_0 L\rho.$$

Toutefois ce gaz, par le fait de la compression qu'il subit sous l'empire de la loi de Mariotte, n'occupera plus que le volume de $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{m3}$.

Un égal volume d'eau pèserait, d'après cela :

$$\left(\frac{1000}{\rho}\right)^{kg}.$$

En divisant par ce poids la quantité de travail dont nous voulons également rendre cette eau dépositaire, nous obtiendrons la hauteur de chute hydraulique qu'il faudrait théoriquement consacrer à cette opération (n° 147) :

$$h = \frac{p_0 \rho L\rho}{1000}.$$

Si nous faisons voyager *pendant le même temps* ce *même volume* d'air ou d'eau *dans un même tuyau*, il prendra pour les deux cas une même vitesse u. Le travail consommé en frottements *par*

force motrice. *Génie civil*, t. IX, p. 315, 345. — Arendt. Comparaison du transport de la force par l'électricité et les autres modes mécaniques les plus usités. *Revue universelle des mines et des usines*, t. XV, p. 522. — Achard. De la transmission des forces motrices à grande distance. *Annales des mines*, 7e série, t. VI, VII, VIII. — Reumeaux. Note sur quelques applications nouvelles des transmissions par l'intermédiaire d'un corps fluide. *Comptes rendus mensuels des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1887, p. 17. — Distribution hydraulique de la force à Londres. *Annales industrielles*, 21 octobre 1888, p. 518.

[1] Rien ne serait plus facile que de reprendre la même marche, en partant de l'expression du travail adiabatique.

unité de temps dans l'une et l'autre expérience aura donc pour expressions (n° 304) :

$$\varpi\chi l B u^3, \qquad \varpi'\chi l B' u^3.$$

Nous pouvons même, en raison de la très faible différence qui sépare les valeurs de B et de B′ (n°s 72 et 300), ainsi que du degré d'incertitude qui pèse encore sur leur détermination, confondre entre eux ces deux facteurs. Dans ces circonstances, les pertes de travail seront entre elles comme les densités des fluides. Si donc on emploie de l'air normal (n° 279), le déficit sera 773 fois moindre avec ce corps qu'avec l'eau. A la vérité, les conditions dans lesquelles nous venons d'effectuer cette comparaison sont fort étroites; mais nous pouvons leur donner plus d'élasticité.

Imaginons à cet effet que ce même volume d'eau soit mis en tension, non plus précisément par la colonne hydrostatique bien déterminée qui vient d'être évaluée h, mais par celle H d'un accumulateur hydraulique quelconque. Il suffira alors d'un volume d'eau $\frac{h}{H}$ fois moindre pour transmettre le même travail. La vitesse qu'il prendra *dans le même tuyau* sera de son côté $\frac{h}{H}$ fois moindre, et par suite le travail du frottement se trouvera réduit dans le rapport $\left(\frac{h}{H}\right)^3$. Cette perte sera donc, à l'égard de celle qui est relative à l'emploi de l'air, dans le rapport :

$$773\left(\frac{h}{H}\right)^3,$$

c'est-à-dire :

$$0{,}000\,000\,773\left(\frac{p_0\rho\, L\rho}{H}\right)^3,$$

ou, en employant les logarithmes ordinaires :

$$0{,}000\,009\,405\left(\frac{p_0\rho \operatorname{Log}\rho}{H}\right)^3,$$

et en rendant à p_0 sa valeur 10336 :

$$1038500 \left(\frac{\rho \operatorname{Log} \rho}{H}\right)^3.$$

Si l'on suppose, par exemple, que l'air soit comprimé à cinq atmosphères, et l'eau sous une pression de 100 mètres, le premier mode reste encore 45 fois plus avantageux que le second.

D'autres considérations viennent également du reste militer en faveur du choix de l'air. Son emploi permet beaucoup plus de propreté que celui de l'eau, en raison des fuites. Il ne coûte rien, et se trouve partout. L'eau exige au contraire certains aménagements. L'air comprimé assainit par son échappement les galeries souterraines, tandis que l'eau y nécessitera des moyens d'épuisement. Enfin la détente a pour effet de rafraîchir la température des chantiers, parfois même avec excès, ainsi que nous le verrons plus tard. Ces divers points de vue sont de nature à expliquer l'immense essor qu'a pris l'application de l'air comprimé à l'art des mines, par comparaison avec le développement beaucoup plus restreint qu'a reçu l'emploi de l'eau sous pression.

316 — *Poste pneumatique.* — Le service parisien des Postes et Télégraphes emploie un réseau de tuyaux souterrains, dans lesquels des machines motrices refoulent l'air comprimé. De petits étuis renfermant les dépêches s'y trouvent engagés, et la pression effective pousse le train d'une station à une autre avec une grande rapidité [1].

[1]) Bontemps. *Les systèmes télégraphiques aériens, électriques, pneumatiques*, in-8°, 1876. — Crespin (*La poste atmosphérique*, in-8°, 1875. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXX, p. 1405). — Duméry. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale.* — Les Merveilles de la locomotion, p. 296.

On peut rapprocher de cette application l'emploi du vide pour l'extraction dans les mines d'Épinac, créé par Zulma Blanchet; pour lequel toutefois les conditions diffèrent notablement en raison de l'influence de la pesanteur (Haton de la Goupillière, *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 171 à 200).

Nous citerons encore, sous ce rapport, l'ancien système du chemin de fer atmosphérique incliné de Saint-Germain.

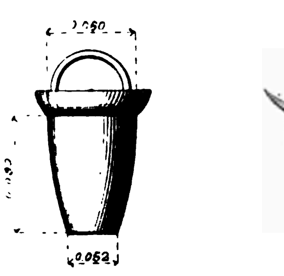
M. Berlier a rédigé un projet de transmission pneumatique entre Paris et Londres (*Génie civil*, 7 mars, 1885, p. 303).

Les conduites ont $0^{m},065$ de diamètre intérieur. Elles sont en fer étiré, soudé à recouvrement. Les bouts sont de 5 à 6 mètres de longueur, assemblés à l'aide de joints à brides et de boulons. Les courbes présentent des rayons de 10 à 50 mètres.

Les boîtes (fig. 189 et 190) sont de forme cylindrique et à double enveloppe. Le revêtement extérieur est en cuir, l'ossature intérieure en forte tôle. La première pèse 64 grammes, et la seconde 182. Chaque tube peut renfermer 30 à 35 plis. La boîte, avec son chargement, pèse 355 grammes. Un train complet est composé de dix boîtes et d'un piston étanche (fig. 191 et 192). Ce dernier pèse 565 grammes, et le train $4^{kg},115$ au maximum.

Fig. 189. Fig. 190.
Boîte de la poste pneumatique.
(Perspective.) (Coupe.)

La pression initiale est de $0^{m},45$ de mercure, et la pression finale de $0^{m},19$. Leur moyenne arithmétique $0^{m},32$ représente un effort de $0^{kg},434$ par centimètre carré, ou 14 kilogrammes environ sur la section effective du piston [1].



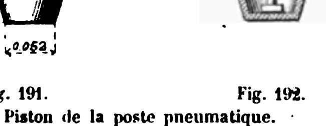


Fig. 191. Fig. 192.
Piston de la poste pneumatique.
(Élévation.) (Coupe.)

Ce chiffre correspond, par conséquent, à un travail de 14000 kilogrammètres par kilomètre. On parcourt facilement cette distance en une minute, ce qui représente une puissance effective d'environ 3 chevaux.

[1] Ces chiffres fourniraient une caractéristique très inférieure, si l'on effectuait la comparaison de ce mode de transport avec celui de la grande industrie. Une force de 14 kilogrammes employée à pousser un train de 4 kilogrammes environ, représente un rapport égal à 3,5. Ce même rapport est de $\frac{1}{30}$ sur les routes, $\frac{1}{100}$ sur les chemins de fer, $\frac{1}{1000}$ sur les canaux. Le halage est donc 3500 fois plus efficace que la poste pneumatique, au point de vue de l'économie dynamique. Il est d'ailleurs inutile de faire observer que le but recherché dans ce genre d'applications est tout autre, et que le point de vue du rendement théorique reste absolument secondaire dans la question.

Ordinairement, cependant, la rapidité du trajet est moindre. Supposons, par exemple, une vitesse de 10 mètres par seconde. Si, dans la formule qui exprime le travail du frottement *de l'unité de poids des gaz* (n° 299) :

$$\frac{\chi}{\Omega}\,\mathrm{B}u^2l = \frac{4\mathrm{B}u^2l}{\mathrm{D}} = 0{,}00148\,\frac{u^2l}{\mathrm{D}},$$

nous introduisons les hypothèses :

$$u = 10, \qquad l = 1000, \qquad \mathrm{D} = 0{,}065\,;$$

nous trouvons 2277 kilogrammètres. Le tuyau renfermant d'ailleurs, sur la longueur d'un kilomètre, environ 6 kilogrammes d'air, le résultat sera de 13662 kilogrammètres.

Quant à la création de demi-force vive nécessaire pour animer de la vitesse voulue ces 6 kilogrammes d'air, ainsi que les 4 kilogrammes du train, elle exige :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9{,}81}\cdot(10)^2 = 51^{\mathrm{kgm}}.$$

L'ensemble forme 13713 kilogrammètres. La différence avec le chiffre disponible 14000, à savoir 287 kilogrammètres, correspond au travail de frottement sur 1 kilomètre, ce qui représente une force de $0^{\mathrm{kg}},287$. Son rapport au poids du convoi : 0,07 constituerait donc le coefficient de frottement [1].

317 — Pour nous rendre compte de la manière dont la tension du compresseur est utilisée pour la propulsion du train, appelons p_2 la pression atmosphérique appliquée à l'orifice libre du tube, et p_1 celle que l'on réalise à l'autre bout, à l'aide du compresseur. Soient p' et p'' les tensions qui, pendant la marche, se développent

[1] Bien que ce chiffre soit sans doute un peu faible, on voit que les deux évaluations concordent convenablement. Des écarts plus importants encore n'auraient même pas lieu de surprendre, en présence d'une approximation aussi gratuite que celle de la moyenne arithmétique des pressions extrêmes, qui a été employée pour représenter l'impulsion moyenne pendant la marche.

immédiatement au contact du piston, sur ses faces postérieure et antérieure. Elles sont nécessairement différentes des précédentes; les excès respectifs constituant les forces impulsives des deux colonnes d'air dont le mouvement est connexe de celui du train.

Admettons, par approximation, l'uniformité de l'écoulement de l'air depuis l'entrée de la conduite jusqu'au piston, avec une certaine densité moyenne. Si nous désignons par x la longueur de ce segment, qui est variable à chaque instant, l'équation du mouvement prendra la forme (39) :

$$\frac{p_1 - p'}{\varpi} = \frac{\chi}{\Omega} \mathrm{B}u^2 x.$$

Appelons F l'effort nécessaire pour pousser les véhicules, d'une allure constante, en surmontant les résistances; il aura pour valeur :

$$\mathrm{F} = (p' - p'')\Omega,$$

ce qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{p' - p''}{\varpi} = \frac{\mathrm{F}}{\varpi\Omega}.$$

Désignons enfin par $n\varpi$ le poids spécifique moyen de la travée d'aval, qui a pour longueur $l - x$. L'équation du mouvement de l'air qui la remplit sera de même :

$$\frac{p'' - p_2}{\varpi} = n \frac{\chi}{\Omega} \mathrm{B}u^2 (l - x).$$

La vitesse u reste en effet identique, puisque le fluide se trouve déplacé par l'avant du train avec une rapidité égale à celle que le courant moteur est obligé de prendre pour suivre le piston, si l'on veut pouvoir, dans les conditions simplifiées où nous nous sommes placés par la pensée, supposer constantes les pressions au contact.

En ajoutant les trois équations précédentes, on obtient l'égalité :

$$\frac{p_1 - p_2}{\varpi} = \frac{\mathrm{F}}{\varpi\Omega} + \frac{\chi}{\Omega} \mathrm{B}u_2 \left[nl + (1 - n)x\right],$$

et, en divisant membre à membre avec la relation intermédiaire :

$$\frac{p' - p''}{p_1 - p_2} = \frac{1}{1 + \frac{\varpi\chi B u^2}{F}\left[nl + (1 - n)x\right]}.$$

Tel est le rapport de la dépression $p' - p''$ immédiatement utilisée pour la propulsion du train, à celle $p_1 - p_2$ que réalise directement le compresseur.

Ce rapport atteint son maximum à l'instant initial, pour $x = 0$; et son minimum :

$$\frac{1}{1 + \frac{\varpi\chi B u^2 l}{F}},$$

au moment de l'arrivée, lorsque $x = l$. On voit que la longueur totale l constitue un élément défavorable, ainsi que la vitesse u. La rapidité des transmissions exerce même l'influence la plus nuisible des deux, puisqu'elle figure par son carré. Au contraire, la masse du train, c'est-à-dire la force F nécessaire pour entretenir le mouvement malgré les résistances, est favorable à l'utilisation de la dépression réalisée par le compresseur. Enfin les petits tubes sont les plus avantageux en raison du facteur χ, ainsi que les fortes dépressions, d'après le facteur ϖ (¹).

318 — *Tirage des cheminées.* — J'envisagerai, comme dernière application, le tirage des cheminées (²), nécessaire pour provoquer le passage de l'air à travers les foyers des chaudières à vapeur ou des appareils métallurgiques (³), en même temps que

(¹) Je n'ai pas besoin d'ajouter que ces conclusions, strictement relatives à la discussion de l'équation du mouvement, sont formulées ici sous réserve de tous les points de vue accessoires que la pratique du service peut conduire à associer avec ces considérations théoriques.

(²) Puizeger. Cheminées d'usine. *Revue mensuelle des mines et de la métallurgie*. 1877, t. I, p. 191. — Cordier. *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1887, p. 130.

(³) Ou encore dans les foyers d'aérage, employés pour l'assainissement des mines; question que nous avons traitée ailleurs avec les détails que mérite son importance Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 485).

pour porter les gaz délétères à une grande hauteur au-dessus du sol [1].

Nous pouvons à cet égard nous représenter (fig. 193) un tube en U composé de deux branches, dont l'une est formée par la cheminée elle-même, et l'autre située à l'extérieur sur une hauteur égale. Celle-ci trouve dans l'atmosphère ambiante, en son pied une pression p_1, et à son sommet une tension p'_1. Dans la cheminée se développent de même des pressions p_2 et p'_2 aux extrémités inférieure et supérieure. A ces forces élastiques correspondent, pour les deux branches de ce siphon renversé, des poids spécifiques *moyens* ϖ_1 et ϖ_2, sous l'influence des températures absolues *moyennes* t_1 et t_2. Dans la réalité, les éléments ϖ et t varient, d'une manière continue, d'un bout à l'autre de chacune de ces travées; mais nous ferons ici abstraction de cette complication, dont la loi resterait d'ailleurs inconnue *a priori*, et éminemment variable avec les circonstances.

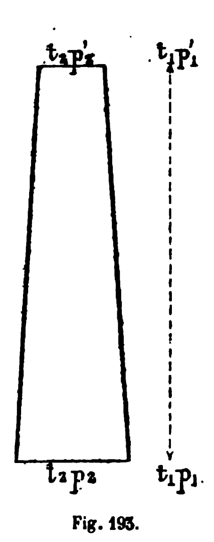


Fig. 193.

Si nous supposons, à titre d'approximation, l'écoulement uniforme par filets rectilignes (bien que ce régime se trouve contrarié par diverses causes, et notamment par l'influence de la conicité de la cheminée, sur laquelle nous reviendrons plus loin), nous pourrons appliquer à chacune de ces masses gazeuses l'équation fondamentale de l'hydrostatique (nos 7 et 21) :

$$p_1 = p'_1 + \varpi_1 h,$$
$$p_2 = p'_2 + \varpi_2 h.$$

La dépression motrice qui règne d'une face à l'autre du foyer est $p_1 - p_2$. On en obtiendra la valeur en retranchant ces deux éga-

[1] On signale comme la plus haute cheminée du monde celle de Mechernich (Prusse rhénane), qui a 134m,60 d'élévation et, à la base, 7m,50; 3m,50 de diamètres extérieur et intérieur; dimensions qui, au sommet, se réduisent à 3m,50 et 3m,00.

On peut citer également la cheminée de 132m,50 de MM. Tennant à Saint-Rollon (Angleterre).

lités. Nous négligerons, pour plus de simplicité, la différence $p'_1 - p'_2$, en nous fondant sur ce que la masse gazeuse finit par reprendre place dans l'atmosphère stagnante ([1]). Il viendra ainsi :

$$p_1 - p_2 = (\varpi_1 - \varpi_2)h.$$

Nous admettrons, pour la relation de ϖ_1 et ϖ_2, la loi de Gay-Lussac. C'est encore une approximation motivée par la faiblesse de la dépression, qui permet de considérer l'échauffement comme opéré à pression constante. Il vient dans ces conditions :

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_2}{t_1},$$

$$\frac{\varpi_1 - \varpi_2}{\varpi_2} = \frac{t_2 - t_1}{t_1},$$

et en multipliant membre à membre :

$$\frac{p_1 - p_2}{\varpi_2} = \frac{t_2 - t_1}{t_1} h.$$

Telle est la hauteur piézométrique motrice.

319. — Cela posé, si nous formons l'équation des forces vives, nous aurons (n° 284) pour la demi-force vive acquise par l'unité de poids $\frac{u^2}{2g}$.

Il nous faut l'égaler à la somme des divers travaux appliqués à cette masse, à savoir ([2]) : 1° la hauteur piézométrique qui correspond à la pression motrice, et que nous venons de déterminer : 2° le travail du frottement *par unité de poids* (n° 309) ([3]) :

$$-\frac{\chi}{\Omega} Bu^2 h,$$

([1]) A la vérité, ce n'est pas précisément au débouché de la cheminée : mais nous continuons, en cela, à procéder par approximation.

([2]) La pesanteur n'a pas à figurer dans cette énumération, puisque l'élévation d'un certain poids d'air dans la cheminée s'accompagne forcément de l'abaissement d'une quantité égale au dehors.

([3]) En désignant par Ω la section *moyenne* du tronc de cône ou de pyramide qui constitue la paroi interne de la cheminée.

3° les résistances spéciales créées dans les changements de section ou les coudes que présentent l'appareil de chauffage et la traversée du combustible, ainsi que le dispositif des carneaux, des rampants, etc. Il serait fort difficile d'en assigner une expression numérique précise, mais nous avons vu (n° 78) qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse. Nous la représenterons donc par Cu^2 (¹).

L'équation des forces vives devient dans ces conditions :

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{t_2 - t_1}{t_1} h - \frac{\chi}{\Omega} Bu^2 h - Cu^2,$$

et l'on en déduit comme valeur de la vitesse :

$$u = \sqrt{\frac{(t_2 - t_1)h}{\left(\frac{1}{2g} + C + B\frac{\chi}{\Omega} h\right)t_1}}.$$

Pour obtenir celle du débit en volume V_2 évalué à la température t_2, nous aurons, d'après l'équation de continuité :

$$V_2 = m\omega u,$$

si ω désigne la section du débouché de la cheminée, et m le coefficient de contraction qui convient à son degré de conicité (n° 292). Mais on obtiendra plus de clarté en ramenant cette dépense au volume correspondant V_1 d'air extérieur pris à la température t La loi de Gay-Lussac donnera à cet égard :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\varpi_2}{\varpi_1} = \frac{t_1}{t_2},$$

d'où :

$$V_1 = m\omega \frac{t_1}{t_2} u,$$

(¹) Le coefficient C reste, à la vérité, affecté, d'une manière imparfaitement connue, par la variation que subit le poids spécifique pour passer, pendant cette traversée, de la valeur ϖ_1 à ϖ_2. La vitesse se trouve souvent réduite d'un cinquième par ces influences accessoires.

et enfin (¹) :

$$V_1 = \frac{m\omega}{t_2}\sqrt{\frac{(t_2 - t_1)t_1 h}{\frac{1}{2g} + C + B\frac{\chi}{\Omega}h}}.$$

320 — Cette formule permet de discerner les influences respectives des éléments arbitraires de la question, à savoir la température d'échauffement t_2, et les dimensions de la cheminée : hauteur et diamètres.

En ce qui concerne la température, on voit que, pour rendre maximum V_1, ou, pour plus de simplicité, son carré, il suffit (²) de s'attacher à la fonction :

$$\frac{t_2 - t_1}{t^2_2} = \frac{1}{t_2} - \frac{t_1}{t^2_2}.$$

Sa dérivée donne, en l'égalant à zéro :

$$-\frac{1}{t^2_2} + \frac{2t_1}{t^3_2} = 0,$$

d'où cette relation très simple :

$$t_2 = 2t_1.$$

Il convient donc que la température ABSOLUE *de l'intérieur soit double de celle de l'extérieur.*

Si l'on revient, pour plus de clarté, aux températures usuelles, on aura (³) :

$$\theta_2 + 273 = 2(\theta_1 + 273),$$
$$\theta_2 = 2\theta_1 + 273.$$

(¹) Suivant Péclet, une cheminée employée pour la ventilation peut appeler mille mètres cubes d'air par kilogramme de houille. Mais, si l'on doit employer un combustible spécial, et non pas des chaleurs perdues, les ventilateurs seront bien préférables.

(²) Sans oublier toutefois que le coefficient C subit lui-même une certaine influence de la part de t_2, mais beaucoup moins directe que celle qui se trouve ici mise en évidence en fonction de cette variable.

(³) Si par exemple nous supposons comme une température ambiante assez ordinaire :

$$\theta_1 = 13^{\text{D}},5;$$

il viendra :

$$\theta_2 = 300^{\text{D}}.$$

On a donc intérêt à forcer le feu quand le thermomètre s'élève à l'extérieur.

321 — Passons à l'influence des dimensions de l'appareil [1]. Nous pouvons, à cet égard, nous contenter d'envisager la fonction [2] :

$$\omega \sqrt{h},$$

ou, en l'élevant au carré, représentant par D le diamètre au sommet, et supprimant de nouveau les facteurs constants :

$$hD^4.$$

On reconnaît par là qu'il est beaucoup plus fructueux d'agir sur le diamètre que sur la hauteur [3], puisque le premier figure ici par une puissance quatre fois plus élevée que cette dernière [4]. Il existe, à la vérité, un motif de commencer par donner à h une valeur de quelque importance, afin d'en obtenir de suffisantes pour la vitesse et pour la dépression, qui peuvent avoir elles-mêmes un rôle à jouer dans les questions d'application, et dont l'expression ne renferme ni D ni ω en numérateur. Mais, ce résultat une fois atteint, il y a lieu, au point de vue du débit, d'insister plutôt sur le diamètre que sur la hauteur.

Il y a même plus ; si l'on met l'expression de la vitesse sous la forme :

(1) On peut consulter, dans l'aide-mémoire de Claudel (*Formules, tables et renseignements usuels*, partie pratique, 1872, p. 576), une table détaillée qui fait connaître le côté de la section carrée, ou le diamètre de la section ronde, ainsi que la hauteur des cheminées, en rapport avec les diverses valeurs de la consommation de houille. A la page 581 du même recueil se trouve une table analytique rapportée directement à la force en chevaux des générateurs de vapeur qui sont desservis par une telle cheminée.

(2) En faisant encore abstraction, pour plus de simplicité dans cet aperçu, de la présence de ces éléments dans le dénominateur avec le très faible coefficient B.

(3) Indépendamment de cette circonstance que l'exagération de cette dernière conduit à l'instabilité, tandis que le premier de ces facteurs est, au contraire, un élément de solidité.

(4) En doublant la hauteur, on augmente la dépense de 40 %. En doublant le diamètre, on quadruple ce débit.

$$u = \sqrt{\frac{\frac{t_2}{t_1} - 1}{B\frac{\chi}{\Omega} + \frac{C + \frac{1}{2g}}{h}}},$$

on reconnaît que, lorsque h devient très grand, le terme dans lequel il figure, devenu lui-même très faible, ne saurait éprouver des variations importantes en valeur absolue. Par suite, u ne varie presque plus, et tend vers une limite infranchissable pour les hauteurs les plus excessives. Il serait donc malavisé de poursuivre l'effet désiré en exagérant la hauteur au delà de ce qui est nécessaire au premier point de vue. Cette remarque est surtout vraie pour les cheminées étroites, dans lesquelles la petitesse de Ω rend le premier terme du dénominateur d'autant plus important par lui-même, en comparaison du second, qui est variable avec h.

Quant à la différence qui sépare ω de Ω, elle a surtout pour objet la stabilité de l'édifice sous l'action des vents régnants. Mais elle n'est pas sans influence sur la vitesse. En raison de l'équation de continuité, à égalité de section moyenne Ω, le rétrécissement du débouché ω tend à augmenter u, en permettant à la colonne gazeuse de mieux fendre l'atmosphère, pour porter à de plus grandes hauteurs les produits délétères, et empêcher les cheminées de *fumer*, ou de *rabattre* sous l'action du vent. Mais, au point de vue du débit, au contraire, le résultat ne saurait être influencé dans un sens favorable, puisque l'on ne fait qu'accentuer davantage les résistances en rétrécissant la section. On reconnaît en effet que V_1 augmente avec ω, lorsque Ω conserve une valeur fixe.

§ 3

JAUGEAGES

322 — Il est naturel, ainsi que nous l'avons fait pour l'Hydraulique (chap. VII), de terminer l'exposé de la Pneumatique par quelques indications sur le jaugeage des gaz. Je serai cependant très

sommaire à cet égard, ayant eu déjà l'occasion de traiter ce sujet avec quelque développement à l'occasion de la ventilation souterraine (1).

Une première classe de procédés consiste à employer l'équation de continuité (35), en évaluant le poids spécifique d'après le manomètre, l'aire de la section à l'aide de mesures géométriques, et la vitesse par une appréciation directe.

En ce qui concerne ce dernier point, un premier moyen correspond à l'emploi du flotteur dans les cours d'eau. Il repose sur l'évaluation du temps employé pour un trajet déterminé par une bulle odorante, qui avertit d'elle-même de son arrivée. On emploie, à cet égard, la fumée de la poudre ou l'éther sulfurique.

Une méthode plus délicate, qui permet de connaître la variation de la vitesse d'un point à l'autre de la section d'une galerie, repose sur l'emploi des anémomètres. Ces appareils sont très nombreux (2), et je ne saurais reproduire ici la description que j'en ai donnée ailleurs (3).

323 — Je me bornerai également à de simples indications, en ce qui concerne les appareils de mesure directe de capacité qui sont appelés *compteurs à gaz* (4). Ces organes se rapportent, en effet, à une industrie absolument spéciale, celle de l'éclairage au gaz : et leur appréciation complète suppose l'examen d'un grand nombre de nuances délicates, dont l'exposé nous entraînerait trop loin.

(1) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des Mines*, t. II, p. 399.

(2) Arson, Bianchi, Biram, Buis et Sombart, Bourdon, Buxton, Casartelli, Casella, Combes, Pavy, Devillez, Dickinson, Fuss, Hardy, Kallstenius, Lechatelier, Leslie, Michel, du Moncel, Morin, Murgue, Neumann, Robinson, Van Ecke, Vicaire, etc.

(3) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 401.

(4) G. Lemoine. Sur les compteurs à gaz. *Congrès de l'association scientifique de France*. Lille. p. 193. — E. Dubuchy. Note sur les compteurs à gaz. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale*, 4e série, t. I, p. 541. — *Génie civil*, t. IX, p. 318. — Giroud. *De la pression du gaz de l'éclairage, et des moyens employés pour la régulariser*, 1re partie, 1867, in-12; 2e partie, 1872, in-4°, Gauthier-Villars. — Bunsen. *Méthodes gazométriques*. — E. Müller. *Leçons sur la régulation des pressions dans un réseau de conduites à gaz*, in-8°, Dejey. — Péclet. *Traité de l'éclairage*. — Robert d'Harcourt. *Traité de l'éclairage au gaz*. — Magnier. *Manuel Roret de l'éclairage*. — Parenty. Note sur un compteur de vapeur et de fluides à hautes pressions. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 5 avril 1886, 16 août 1887. — Falconetti. *Revue industrielle*, 1880, p 314.

On distingue le compteur *sec* et le compteur *humide*. Dans le premier, une membrane se transporte d'un côté à l'autre d'une capacité connue, qu'on laisse se remplir et se vider successivement, en enregistrant le nombre de ces alternatives.

Le second type renferme une roue appelée *volant*, qui tourne, à demi immergée dans un bain liquide formé d'eau, de mercure, de glycérine, ou de diverses solutions salines. Quatre aubes, à parois hélicoïdales, en plongeant et émergeant successivement, découpent en quelque sorte le courant en tronçons de volume connu, dont un compteur de tours fait connaître le nombre pour un temps donné. On munit les orifices de gardes hydrauliques, en vue de se prémunir contre les fuites et les fraudes.

Les défauts inhérents aux compteurs proprement dits ont provoqué la construction du *gazomètre jaugeur*, ainsi que des *régulateurs de pression* et des *rhéomètres*, destinés à maintenir la fixité du courant en lui imposant un débit déterminé.

La première invention de ces appareils est due à Clegg en 1815, et ils sont arrivés du premier coup à une grande perfection. M. Giroud leur en a communiqué une nouvelle par d'ingénieuses transformations. Un très grand nombre d'inventeurs (¹) ont travaillé sur ce sujet délicat.

La figure 194 représente, à titre d'exemple, le compteur à gaz Nicolas-Chamond-Rouget. Le volant se trouve dans la chambre circulaire postérieure. Le niveau A est maintenu fixe par le trop-plein B, qui déverserait au besoin dans la capacité inférieure C l'eau en excès, au moment où l'on remplit l'appareil par le tube D. Si le niveau baisse abusivement, au fur et à mesure que le liquide se trouve entraîné par le courant gazeux, le flotteur E, en s'abaissant de son côté, ferme la soupape F et interrompt le passage. Dans les

(¹) Achard, Alsina, Armengaud, Bablon, Barbary, Béliard, Bonneterre, Bouchard, Bréguet, Brichard, Brunt, Cavaillé-Coll, Charlier, Chamond-Rouget, Chéron, de la Chomette-Duris, Crosley, Defries, Desnos-Gardissal, Duckham, Ducrot, Dumber, Eastwich, Falconetti, Fergusson, Fleischauer, Frances-Beardball, Garnier, Geyelin, Hall, Hart, Herzer, Hoard, Hulett, Humeau, Jourdan, Judkins, Lacarrière, Legris, Lemoine, Levallois, Luther-Young, Marchessaux, Matley, Maumené, Mille, Miron, Moss, Mutrel, Naylor, Nicolle, Paddon, Parenty, Parkinson, Pauwels, Perret, Plassin-Rebours, Prouvost, Raywood, Rodier, Rouquayrol, Servier, Siry-Lizard, Sugy, Waldo, etc.

conditions ordinaires, le fluide arrive par G, passe par la soupape, et parvient, à travers le tube H, dans la chambre inférieure I. Il contourne horizontalement trois chicanes, qui prolongent la saturation, dans le but de rendre le fluide moins apte à dissoudre l'eau du

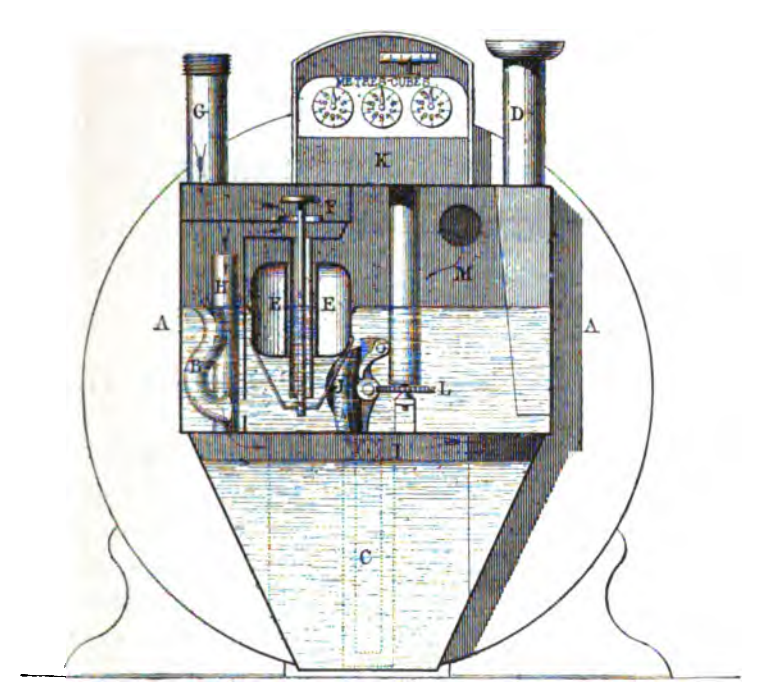


Fig. 194. — Compteur à gaz Nicolas Chamond et Rouget (coupe verticale).

compteur, dont il ferait par là fléchir le niveau. Le gaz se rend ensuite, par le tuyau J, dans le volant, dont le compteur B enregistre le nombre de tours, sous l'empire de la transmission L. Enfin le courant revient par l'ouverture M, pour continuer ensuite son trajet vers les brûleurs.

CHAPITRE XVIII

MACHINES SOUFFLANTES

—

§ 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES A AIR

324 — Nous avons, dans les trois chapitres précédents, étudié le mouvement que prennent les gaz permanents lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes, en dehors de l'intervention de corps étrangers, si l'on fait abstraction du frottement sur les parois fixes. Nous avons maintenant à examiner les appareils qui sont destinés à mettre ces fluides aux prises avec des organes solides, soit pour en recevoir de l'énergie, soit, au contraire, pour leur en communiquer. De là deux groupes de machines fondées sur l'emploi de l'air : les récepteurs et les opérateurs [1]. Comme du reste l'énergie est elle-même susceptible de trois formes différentes : force vive, travail ou chaleur, il y aura lieu, dans chacun de ces deux groupes, d'envisager trois catégories distinctes.

En ce qui concerne les récepteurs, ceux qui sont destinés à recueillir la force vive des courants aériens sont nommés *moteurs éoliens*. Leur étude formera l'objet du chapitre XX. Ceux qui sont actionnés par l'énergie potentielle de l'air en tension constituent les *moteurs à air comprimé* (chap. XIX). Enfin ceux qui utilisent

[1] Nous avons (n° 2) distingué dans toute machine trois parties essentielles : le récepteur, l'opérateur et les transmissions. L'air peut également être employé pour jouer ce dernier rôle. Nous avons étudié ci-dessus (nos 303, 306) ce genre d'application.

l'énergie calorifique s'appellent *moteurs à air chaud* (chap. XXII, XXIII, XXIV).

Pour les opérateurs, il y a encore lieu à une nouvelle distinction, qui ne pouvait se présenter à l'égard des récepteurs. Ces derniers ne sauraient en effet remplir leur rôle qu'en appauvrissant l'air moteur de l'énergie dont il est actuellement dépositaire. Avec les opérateurs, au contraire, on peut entreprendre d'agir sur ce fluide dans deux sens opposés, soit en le chargeant d'énergie, soit en la lui retirant. Chacune des trois dernières catégories doit donc être elle-même subdivisée par la pensée en deux classes distinctes. Mais il s'en faut de beaucoup que les six classes d'opérateurs ainsi constituées présentent, au point de vue industriel, une égale importance.

325 — Commençons par faire remarquer que chacune des trois formes de l'énergie comporte un zéro, au-dessous duquel on ne saurait la faire descendre. Seulement, dans les conditions de la réalité, nous nous trouvons, pour chacune d'elles, plus ou moins éloignés de ce point.

En ce qui concerne la force vive, rien de plus aisé que d'atteindre le zéro. La force vive ne peut être négative. Elle est nulle dans les objets en repos (¹), et toutes les influences naturelles concourent d'elles-mêmes à y réduire les corps en mouvement.

La pression ne saurait non plus devenir négative. On peut la concevoir nulle dans un espace rigoureusement déblayé de toute matière pondérable, et approcher beaucoup pratiquement de cette limite, dans les milieux excessivement raréfiés qui ont donné lieu aux expressions de *vide barométrique*, *état radiant*, etc.

La température absolue ne peut pas non plus devenir négative, à l'inverse de ce qui a lieu pour la température usuelle. Quelque notion que l'on veuille d'ailleurs rattacher, au point de vue abstrait, à ce zéro absolu (— 273ᴰ de l'échelle usuelle), il est certain que nous resterons toujours pratiquement tellement éloignés de ce

(¹) Nous parlons ici, bien entendu, de la force vive *visible*. Si l'on veut rattacher la température à la force vive moléculaire (p. 387, note 1), c'est dans un instant qu'il sera question de ce second élément.

point, que ces appréciations ne sauraient présenter, au point de vue industriel, aucun intérêt.

326 — Sous la réserve de ces explications relatives à la limite qui nous est imposée pour chacun des trois genres d'énergie, on peut évidemment entreprendre, soit d'augmenter, soit de diminuer la provision actuelle qu'en renferme l'air sous chacune de ces trois formes.

En ce qui concerne la pression, on est aujourd'hui en état d'agir puissamment dans l'un et l'autre sens; principalement pour augmenter cette tension, avec les *compresseurs*, mais aussi pour la diminuer, à l'aide des *machines pneumatiques* [1]. Ces deux classes d'appareils feront l'objet du chapitre XIX.

Pour la température, c'est l'inverse qui a lieu. L'industrie est surtout armée en vue de la diminuer dans les *machines frigorifiques*, très répandues en raison de la pauvreté relative des moyens que la chimie met à notre disposition pour réaliser un froid intense. Mais le rôle de la mécanique est, au contraire, des plus effacés pour élever cette température à l'aide des *machines calorifiques;* attendu que le domaine de la chimie fournit les moyens les plus simples de se procurer de la chaleur à l'aide d'un foyer de combustion. Ces deux classes d'opérateurs seront envisagées dans le chapitre XXXI.

Quant à la force vive, il s'attache, pour la métallurgie, la ventilation des mines ou des édifices, etc., une utilité de premier ordre aux moyens de la communiquer à des masses d'air stagnantes, à l'aide des *machines soufflantes*. Mais lorsqu'il s'agit, au contraire, de retirer artificiellement la force vive de l'air qui s'en trouve animé, le problème ne se pose pour ainsi dire pas, au point de vue de l'utilité industrielle envisagée en grand. Cependant les *moyens d'atténuation des mouvements de l'air* sont loin d'être sans intérêt, et je commencerai, par quelques considérations sur ce sujet, le présent chapitre consacré principalement aux machines soufflantes.

[1] On a établi, pour l'extraction pneumatique des mines d'Épinac (Saône-et-Loire), une machine pneumatique de mille chevaux nominaux. Haton de la Goupillière, *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 188.

§ 2

MOYENS D'AMORTIR LES MOUVEMENTS DE L'AIR

327 — Les moyens que l'on met en œuvre pour atténuer les mouvements de l'air sont tous d'ordre statique. On n'emploie pas dans ce but de machine en mouvement, bien qu'il fût assurément aisé d'en concevoir. La dépense qu'elle occasionnerait peut en effet, puisqu'il ne s'agit que de créer des résistances, être évitée à l'aide d'installations fixes très simples.

Le problème de la suppression des courants d'air se pose parfois pour cet unique motif, qu'ils sont gênants dans les habitations ([1]). Je citerai à ce point de vue l'emploi des *doubles fenêtres*, moyen très rationnel, beaucoup plus employé autrefois qu'aujourd'hui avec des murailles épaisses, et encore extrêmement répandu dans les pays froids. En fractionnant ainsi en deux la chute de pression du dehors au dedans ([2]), on amortit beaucoup la *fuite* d'air qui se produit à travers les interstices. En effet, les diverses formules de l'écoulement des gaz, telles que celles de Navier ou de Weissbach (33 et 34), dépendent du rapport des pressions dans des conditions qui font tendre la vitesse vers zéro, lorsque ce rapport se rapproche lui-même de l'unité. Dès lors chacune des vitesses qui s'établiront à travers les passages successifs de l'extérieur au sas compris entre les deux fenêtres, puis de ce sas au dedans, se trouvera notablement diminuée. Il en sera par conséquent de même de l'entrée définitive de l'air dans l'appartement.

Cette remarque acquiert une grande importance en ce qui concerne le type des machines *compound*, dans lesquelles on a employé pour le fonctionnement du fluide moteur deux, trois, quatre et jusqu'à cinq cylindres *successifs* de plus en plus grands,

([1]) Ou dangereux dans les mines pour les hommes en transpiration, et la sortie des flammes hors du tamis des lampes de sûreté. Il est alors nécessaire de s'attacher à proportionner au volume d'air exigé pour la ventilation, la section des galeries affectées à sa circulation (Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 395).

([2]) Soit sous l'influence du tirage des cheminées, dans lequel le foyer agit comme moteur, soit par l'action du vent.

afin de mieux utiliser la détente progressive de la vapeur. L'atténuation des fuites qui tendent à s'établir autour des pistons, sous l'influence de la différence des pressions qui règnent d'une face à l'autre, sera d'autant plus accusée que la chute totale de tension qui s'étend du générateur à l'échappement, se trouvera plus fractionnée. Or, pour qu'une particule fluide soit définitivement perdue pour le fonctionnement moteur, il faut qu'elle ait successivement traversé tous les jeux. On voit donc combien l'effet nuisible des fuites sera diminué avec ce dispositif.

On peut encore citer, dans cet ordre d'idées, l'organe ingénieux qui est connu sous le nom de *piston Deleuil*. Il est sans garniture, et ne touche pas la paroi du cylindre. Il s'en trouve séparé par une gaine d'air [1], que l'on cherche naturellement à réduire au strict minimum, mais dont l'existence suffit cependant pour supprimer tout frottement, en améliorant d'autant le rendement de la machine. Seulement, pour empêcher qu'il ne s'établisse, dans ces conditions, une fuite intense, au lieu de dresser le pourtour du piston d'après une surface complètement cylindrique, on refouille dans celle-ci, suivant un certain nombre de ses sections droites, des gorges en forme de demi-tore. Elles constituent autant de chambres dans lesquelles, en raison de cet épanouissement, proportionnellement considérable, de l'aire offerte perpendiculairement à l'axe pour le passage du courant, la vitesse de ce dernier diminue conformément à l'équation de continuité (35). L'air y devient ainsi presque stagnant, en reprenant des pressions plus ou moins stables, d'après une échelle décroissante. On a donc, comme dans les cas précédents, réussi à fractionner la chute totale de pression qui règne d'une face à l'autre; et la même conséquence se reproduit pour amortir la fuite résultante [2].

328 — Dans certains cas, on a intérêt à dépouiller l'air de sa

(1) Ou de vapeur, dans les machines fondées sur l'emploi de ce fluide.

(2) Ajoutons encore que l'on contribue à augmenter la difficulté de la filtration, en effectuant le graissage à l'aide d'une sorte d'émulsion qui encombre tout l'espace, et crée pour l'air une nouvelle résistance.

Remarquons d'ailleurs que le piston possède une vitesse propre, qui réduit d'autant la vitesse relative, la seule dont dépende finalement la production effective des fuites.

force vive, afin d'arrêter au passage les poussières qu'il entraîne avec lui; soit que celles-ci doivent être considérées comme nuisibles pour l'usage auquel est destiné ce fluide [1], soit que ces poussières méritent d'être recueillies pour elles-mêmes [2]. On peut employer à cet égard divers moyens.

Je citerai en premier lieu les *chicanes* (fig. 195) qui, en contrariant sans cesse le sens de l'écoulement, dans lequel elles déterminent une série de coudes, arrivent à créer une résistance (n° 78) qui amortit d'autant la force vive du fluide. En même temps, on développe par là des forces centrifuges qui, agissant proportionnellement à la masse, précipitent dans les angles les corpuscules solides, les heurtent, et arrêtent ainsi leur mouvement.

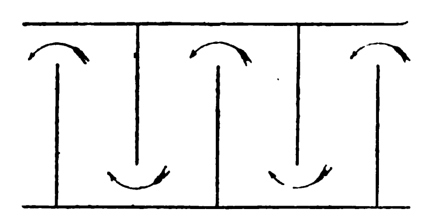


Fig. 195. — Chicanes.

Les *rampants* sont de longs couloirs, dans lesquels la force vive s'use par le frottement, qui est (n° 38) proportionnel à leur longueur [3]. Les poussières s'y déposent peu à peu.

Je citerai dans le même ordre d'idées la *subdivision de la section* en un grand nombre de pertuis distincts, qui créera une grande résistance; le frottement étant également (n° 38) proportionnel au périmètre total de la section transversale du courant. C'est le cas des toiles métalliques que l'on superpose au nombre de deux et même de trois dans certaines lampes de sûreté destinées aux mines grisouteuses [4], afin de prévenir la sortie de la flamme hors du tamis sous l'action d'un courant d'air.

L'*élargissement de la section* est un moyen puissant pour abattre

(1) Comme c'est le cas de l'air chaud des foyers fermés Dufay, qui est appelé à travailler dans le cylindre (n° 515), où il est important qu'il n'apporte pas avec lui des cendres et des escarbilles.

(2) Telles que les fumées des métaux éminemment volatils qui s'oxydent en route (cadmies du zinc); ou de ceux qui, bien que plus fixes, présentent, comme l'argent, une valeur exceptionnelle.

(3) En même temps ils donnent au refroidissement le temps de s'effectuer et de provoquer la condensation des fumées.

(4) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 520, 529, 530.

la force vive d'une veine fluide, et l'on peut l'utiliser à deux points de vue distincts.

S'il s'agit encore d'arrêter des corps en suspension, on sait [1] que la force capable de les entraîner est proportionnelle au carré de la vitesse. Celle-ci, de son côté, d'après l'équation de continuité (35), varie en raison inverse de la section, c'est-à-dire du carré des dimensions. La force d'impulsion se trouve donc diminuée en raison inverse de la quatrième puissance des diamètres d'écoulement. Un évasement au double, par exemple, rend 16 fois moindre la tendance à l'entraînement [2].

L'élargissement s'emploie également dans le but, purement économique, de récupérer la force vive qui a été engendrée à prix d'argent dans un moteur. Je citerai comme exemple la cheminée du ventilateur Guibal [3]. On donne issue à l'air, hors du boisseau du ventilateur, à travers une trompe évasée. La section allant en croissant, la vitesse diminue, et dès lors, d'après le théorème de Bernouilli (n° 26), la pression va en augmentant. Comme d'ailleurs elle aboutit finalement, quoi qu'on fasse, à la tension barométrique, il s'ensuit que l'on a ainsi allégé la pression qui s'exerce directement sur les palettes de la roue, ce qui permettra de leur communiquer un même mouvement à l'aide d'un moteur moins énergique que sans l'emploi de cet appendice.

Il convient encore d'indiquer, parmi les moyens de retirer à un courant la force vive qui l'anime au sortir d'un corps tournant, l'*emploi rationnel des aubes courbes*. Nous avons vu ci-dessus (n° 201) comment, en disposant théoriquement le dernier élément de l'aube directrice dans une direction diamétralement opposée à celle de la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire perpendiculairement au rayon, et déterminant en outre, d'après le choix de l'allure de régime, l'égalité entre cette vitesse d'entraînement et la vitesse

(1) Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes*, p. 438.

(2) C'est ainsi également, pour le cas des liquides, que l'on termine le labyrinthe des ateliers de préparation mécanique des minerais par de grands bassins de dépôt. L'énorme disproportion ainsi déterminée subitement dans la section du courant a pour effet de rendre la vitesse absolument insensible. Son carré devient un nombre d'une petitesse extrême, et les troubles les plus fins arrivent à se déposer.

(3) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 459.

relative, on arrive à annuler rigoureusement la vitesse absolue, et par suite la force vive abandonnée avec le fluide. S'il est juste d'ajouter que ce principe remarquable a rencontré pour l'air, en raison de la faible densité de ce fluide [1], des obstacles spéciaux qui ont fait renoncer à son emploi dans ce cas particulier, il n'en conserve pas moins toute sa valeur pour les turbines à eau, et méritait d'être rappelé dans l'ordre d'idées actuel.

§ 3

MACHINES SOUFFLANTES. — DESCRIPTION

329 — Les appareils destinés à mettre l'air en mouvement appartiennent à deux classes bien distinctes, suivant qu'on leur demande de communiquer une faible vitesse à d'énormes masses gazeuses, ou, au contraire, d'imprimer une assez grande rapidité à des volumes plus restreints. Ce dernier cas est celui de la métallurgie, pour laquelle la pression reste, la plupart du temps, comprise entre 15 et 25 centimètres *de mercure*. Le premier se rencontre principalement dans l'aérage souterrain, avec des dépressions de 5 à 15 centimètres *d'eau*.

Je me suis occupé ailleurs [2] des ventilateurs de mines. On les distingue en *volumogènes* et *déprimogènes*. Avec les premiers, le genre d'action exercée directement a pour effet d'ébranler géométriquement, par le mouvement des parois, des volumes d'air isolés dans des compartiments distincts. Ce jeu n'influence la pression que par contre-coup. Les seconds, au contraire, en déterminant directement une dépression par un brassage rapide de la masse en un point, y provoquent, comme conséquence, un afflux d'air.

La première classe se subdivise en *machines à piston* et *ventilateurs tournants*, dont les types sont très nombreux. La seconde nous présente les *appareils à force centrifuge* et les *ventilateurs à action oblique*. De ces quatre catégories, la métallurgie n'emploie

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 458.
[2] Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 420.

guère que les machines à piston et le ventilateur à force centrifuge. Comme j'ai du reste déjà étudié ce dernier en détail (¹), je me bornerai à envisager ici les machines à piston (²).

330 — Ces appareils (³) sont, la plupart du temps, *à traction directe*, et constituent alors le type *tandem*. Le piston à air et le piston à vapeur sont montés l'un et l'autre sur une même tige, qui forme l'axe commun des deux cylindres du moteur et du ventilateur. Cet ensemble est parfois disposé verticalement (fig. 196 et 197), en vue d'économiser l'emplacement, d'éviter l'ovalisation des cylindres, et d'obtenir un guidage plus facile du mouvement des clapets. En revanche, on s'expose ainsi à l'inconvénient résultant du poids des pistons et des tiges, qui influence inégalement les deux courses. On y a parfois remédié en donnant aux deux moitiés des tiroirs de distribution de la vapeur motrice des recou-

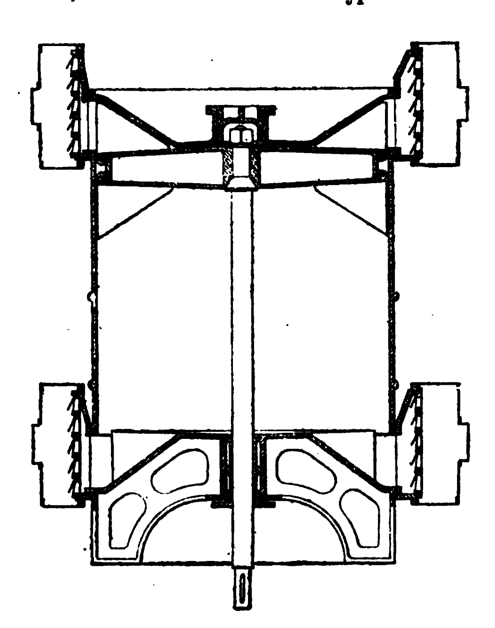
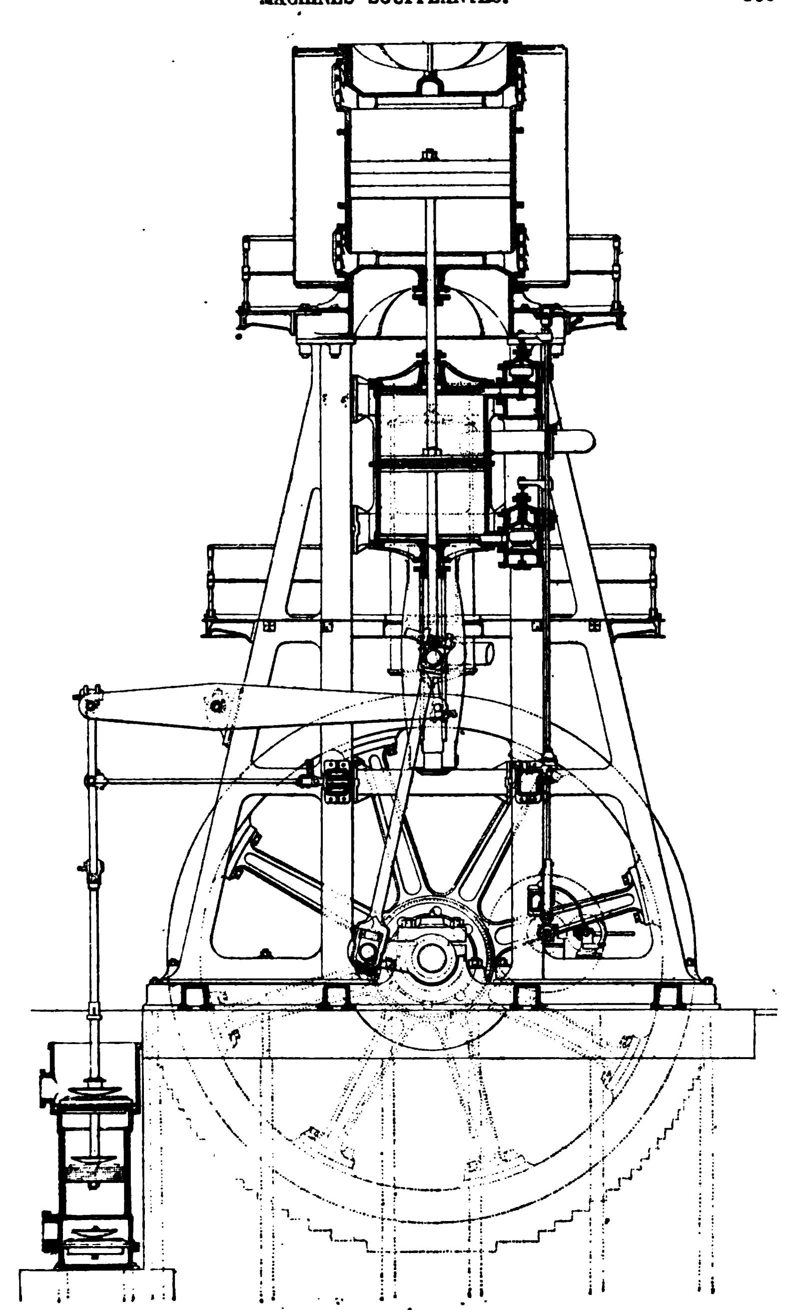


Fig 196. — Cylindre soufflant vertical (coupe verticale).

(¹) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 456.

(²) O. Deny. *Traité théorique et pratique des machines soufflantes*, 1887. — Jordan. *Cours de métallurgie*, planches XXXI à XXXVI. — Percy. *Traité complet de métallurgie* Traduction de Petitgand et Ronna, p. 109. — Gjers. Vertical blowing Engines. *Cleveland Institution of Engineers*, octobre 1879. — Kohn. *Iron and Steel.* — Portefeuille de John Cockerill. — *Die Hüttenwesens-Maschinen fortschritte in der Construction und Anwendung derselben seit dem Jahre* 1876, von Julius Ritter von Hauer. *Gebläse.* Supplément 1887.

(³) Type Riedler, horizontal. *Engineering*, 1er et 15 août 1884, p. 105 et 152. — Type Weimer, vertical. *American Machinist*, 2 octobre 1880, p. 7. — Type Galloway, vertical. *The Engineer*, 11 mai 1883, p. 362. — Type Stevart, à balancier. *The Engineer*. 1er janvier 1883, p. 23. — Type des ateliers de la Meuse, compound. *The Engineer*, 8 janvier 1886, p. 23. — Types divers. *Engineering*, 12 mars, 29 octobre, 13 novembre 1875; 14 septembre 1877 ; 12 juillet, 20 septembre 1878 ; 29 août 1879.



97. — Machine soufflante de Saint-Nazaire, type *tandem*, par Galloway, à Manchester. (Coupe verticale.)

vrements inégaux. Avec ce dispositif, les cylindres sont ordinairement de forme trapue et rapprochée de la projection carrée.

Mais on emploie plus souvent, en vue d'obtenir une plus grande stabilité, tout en facilitant la surveillance et l'accès des diverses

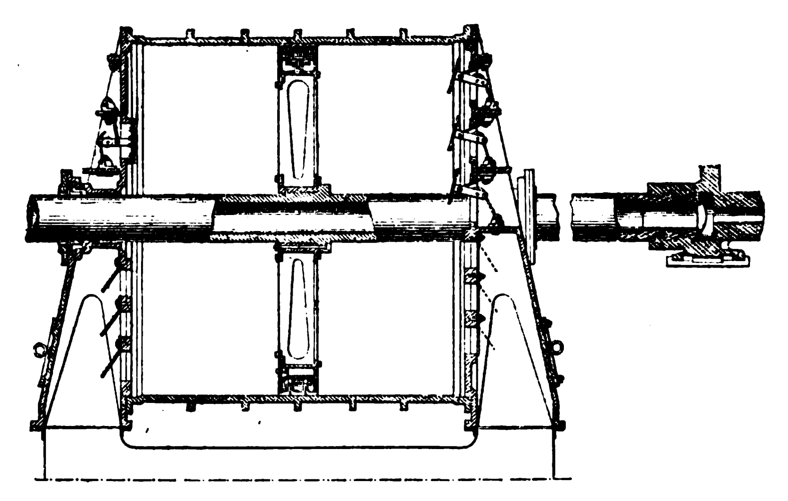


Fig. 198. — Cylindre soufflant horizontal (coupe verticale).

parties, le type horizontal (fig. 198 et 199) avec des cylindres plus allongés. Pour soulager les garnitures à l'aide desquelles la tige

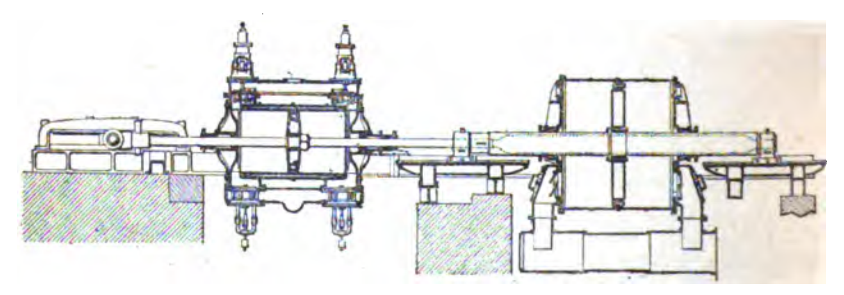


Fig. 199. — Machine soufflante horizontale, type *tandem* (coupe verticale).

traverse les fonds des cylindres, on soutient cette dernière dans l'intervalle de l'un à l'autre, au moyen d'un large patin glissant dans un bain d'huile.

Un second dispositif constitue les ***machines à balancier*** (fig. 200). Les tiges des deux pistons sont alors reliées, à l'aide de bielles ou

de parallélogrammes articulés, aux deux extrémités d'un énorme balancier. Ces engins, quoique encombrants et coûteux, sont souvent préférables aux précédents, au point de vue des frottements. Les plus puissantes machines sont ordinairement établies d'après ce type.

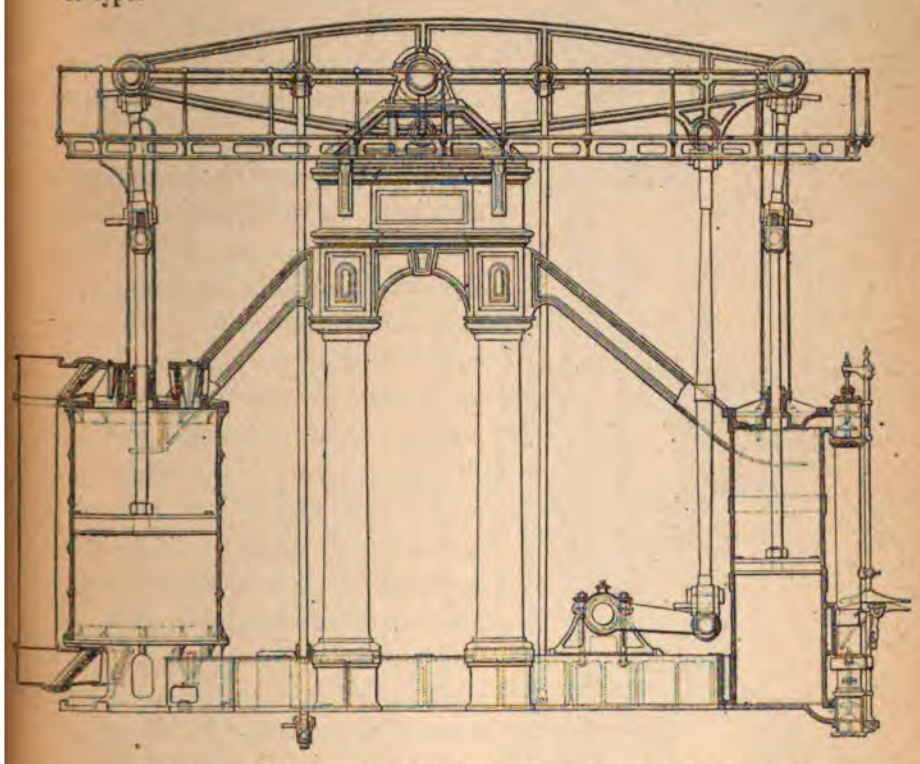


Fig. 200. — Machine soufflante à balancier de Rumpf (coupe verticale).

Un troisième système comprend les *machines de rotation* (fig. 201, 202, 203). On relie la tige des pistons par des bielles et des manivelles à un arbre tournant. La présence d'un volant est alors indiquée. Mais on a soin de le calculer avec une parcimonie spéciale à ce cas. On lui donne un moment d'inertie strictement suffisant pour assurer le passage des points morts, sans chercher à réaliser, comme c'est l'ordinaire dans les machines, l'uniformisation aussi complète que possible de la rotation. Un tel volant est dit *paresseux*. Il laisse le mouvement se ralentir d'une manière

sensible aux approches des points morts, afin d'amortir l'action du piston sur le fluide en fin de course. C'est toujours, en effet, dans ces régions que se manifeste le plus directement l'échauffement des parois. La longue détente des moteurs à vapeur employés pour la commande de ces machines contribue encore à ce ralentissement. Pour obtenir, malgré cette circonstance, la régularité du vent, on a soin de croiser les points morts de deux machines soufflantes semblables couplées sur le même arbre. Cette association est bien justifiée ; cependant on ne doit pas méconnaître qu'en principe il vaut mieux employer un ou deux gros corps de pompe qu'un plus grand nombre de cylindres moindres ; car les fuites, la dépense des garnitures, le graissage, augmentent en raison du périmètre, et leur influence *proportionnelle* irait ainsi en croissant. On ne craint pas d'atteindre au besoin des diamètres de 5 mètres.

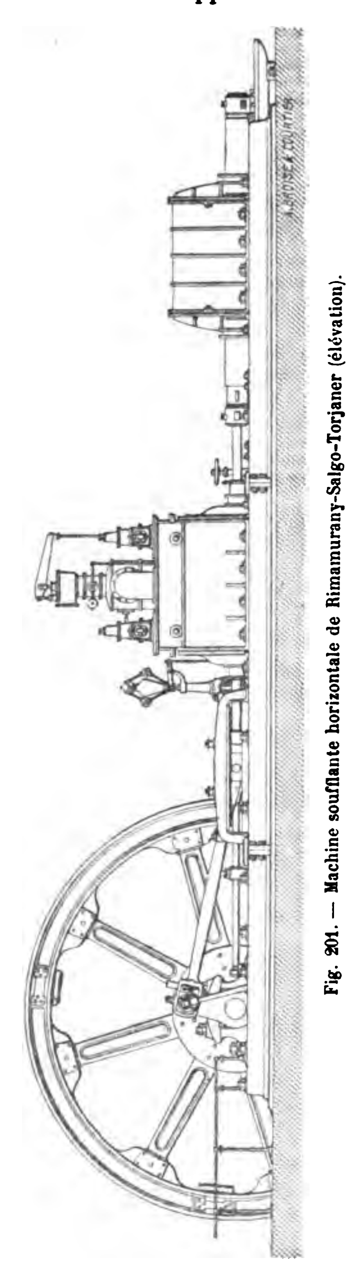


Fig. 201. — Machine soufflante horizontale de Rimamurany-Salgo-Torjaner (élévation).

Ces différents modèles présentent l'inconvénient suivant. Comme il convient, autant que possible, d'agir sur l'air avec une certaine lenteur, afin d'éviter les grandes variations de température, on se voit obligé, pour obtenir un débit de quelque importance, au moyen d'un nombre limité de coups de piston par minute, d'avoir un cylindre soufflant volumineux. Le cylindre à vapeur battant

le même nombre de coups, devra être établi lui-même sur d'assez

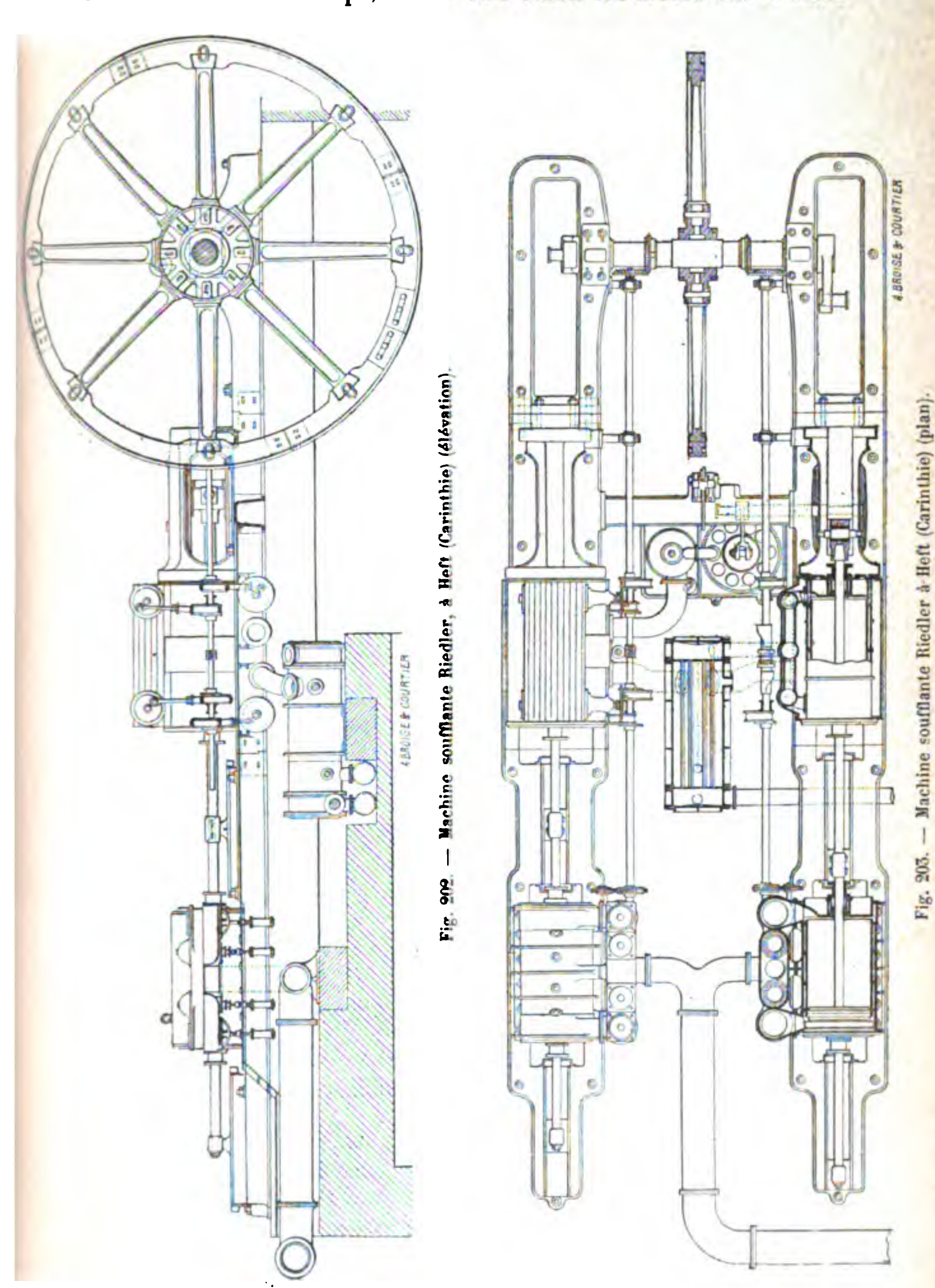


Fig. 202. — Machine soufflante Riedler, à Heft (Carinthie) (élévation).

Fig. 203. — Machine soufflante Riedler à Heft (Carinthie) (plan).

ÉLÉMENTS	MAXIMUM USUEL	MAXIMUM USUEL	EBBW-VALE
Pression de l'air.	$1^{kg},25$	$1^{kg},33$	$1^{kg},30$
Volume sous pression *par minute*	200^{m3}	400^{m3}	948^{m3}
Piston à vapeur. Diamètre.	$0^{m},80$	$1^{m},25$	$1^{m},83$
Piston à vent. Diamètre	$1^{m},80$	$3^{m},00$	$3^{m},66$
— Course	$1^{m},20$	$2^{m},50$	$3^{m},66$
— Vitesse linéaire *par seconde*.	$1^{m},25$	$2^{m},00$	$1^{m},94$
— Nombre de tours *par minute*.	20	30	16

§ 4

MACHINES SOUFFLANTES. — THÉORIE

332 — *Effet utile.* — La figure schématique 204 représente un cylindre soufflant avec son piston P. Ce corps de pompe met en communication une première enceinte (qui n'est autre que l'atmosphère ambiante, de pression p_1) avec une capacité dans laquelle on se propose de développer une tension supérieure p_2, qui deviendra elle-même génératrice de l'écoulement à travers une tuyère. Sous l'action du jeu des pressions, deux soupapes S_1 et S_2 s'ouvrent alternativement, et toutes les deux dans le même sens, à savoir de p_1 vers p_2.

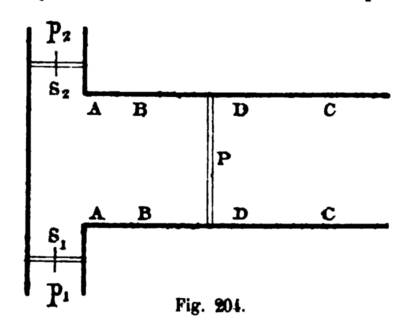


Fig. 204.

Le piston P vient d'être refoulé à fond de course en A. L'*espace libre* compris entre A, S_1, S_2 [1] se trouve alors à la tension p_2, puisque la soupape S_2 était ouverte pour l'évacuation du gaz pendant la course rétrograde, tandis que S_1 restait appliquée sur son siège en raison de cette pression prépondérante.

[1] Et qu'il est difficile de réduire au-dessous de $\frac{1}{10}$ de la cylindrée. On a parfois employé, pour diminuer l'influence des inégalités de la surface du piston, de faux-fonds compressibles en caoutchouc, des bains liquides, etc. (N° 553).

Sous l'action du moteur, le piston commence à se dérober vers la droite. Dès les premiers instants de la raréfaction ainsi opérée dans l'espace libre, le clapet S_2 se trouve rappelé sur son siège par l'excès de la pression p_2 qui s'exerce sur la face opposée. Mais S_1 ne saurait s'ouvrir au même moment, car la tension intérieure est encore loin d'être retombée à la valeur p_1. Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que le piston s'éloigne à une certaine distance AB. A partir de ce point, pour un déplacement infiniment petit opéré au delà de B, le clapet S_1 se soulève, et l'air extérieur commence à affluer pour remplir, sous la pression atmosphérique p_1, le *volume engendré* par le piston jusqu'à son fond de course C.

A cette excursion directe et aspirante succède une course rétrograde et foulante. Pour un déplacement infiniment petit effectué à partir de C, S_1 se trouve plaqué sur son siège par ce refoulement, mais S_2 ne saurait encore se soulever, sous l'antagonisme de la tension p_2 de l'enceinte opposée, que lorsqu'une compression suffisante se sera produite dans le cylindre et dans l'espace libre, par suite d'un certain déplacement CD. C'est donc uniquement sur le parcours DA que le mouvement du piston aura pour effet de balayer, à travers S_2, l'air ainsi mis en tension.

On voit par là que BC constitue la *cylindrée* d'air atmosphérique, et DA celle d'air comprimé. Le *cylindre* AC diffère de l'une et de l'autre. L'espace libre AB est aussi appelé *espace nuisible*. En réalité, cet élément est plus nuisible au débit qu'au rendement dynamique. Il présente même l'avantage de rendre plus progressif le jeu des clapets. Il ne représente d'ailleurs pas théoriquement une dépense spéciale de travail, à cause des alternatives d'expansion et de contraction que subit la quantité d'air correspondante, et auxquelles correspondent des travaux égaux et de signes contraires (1). Seule, la cylindrée proprement dite BC subit un travail de compression, qu'il y a lieu de reproduire à chaque tour sur une quantité nouvelle d'air. Nous n'avons donc qu'à évaluer, pour une évolution de l'arbre, le travail exécuté sur cette cylindrée.

Il se compose de deux parties distinctes. En premier lieu, il faut

(1) Pourvu, bien entendu, que l'on admette, pour plus de simplicité, que la même loi préside à ce phénomène dans l'un et l'autre sens successivement.

amener la quantité d'air BC à se concentrer sur elle-même dans le volume AD, en passant de la tension p_1 à la tension p_2. C'est la *phase de compression*. Il faut ensuite, sans nouveau changement d'état, la faire pénétrer dans l'enceinte déjà occupée par une provision d'air à la pression p_2, comme le ferait un coin dans un corps étranger qui lui résiste. Un certain travail sera donc encore nécessaire pour opérer cette insertion. C'est la *phase de refoulement*. Étudions successivement l'une et l'autre.

333 — Ainsi que je l'ai déjà fait remarquer plusieurs fois, on ne saurait entreprendre d'évaluer le travail de compression, si le problème n'est pas posé d'une manière plus précise ; car il admet autant de solutions distinctes que l'on voudra imaginer d'hypothèses différentes sur la loi qui préside, entre les variables p et v, à la production des états intermédiaires successifs. Il devient donc indispensable, puisque les conditions de la réalité sont fort mal connues, et d'ailleurs variables d'un cas à l'autre, d'adopter ici une hypothèse simple et suffisamment rapprochée des conditions ordinaires de la pratique. Nous supposerons en ce moment que le mouvement s'effectue avec assez de lenteur pour que l'on puisse admettre la constance de la température, en raison de la déperdition au dehors de la chaleur qui a tendance à se manifester par la compression. En un mot, nous envisageons la compression isotherme [1], et par conséquent la loi de Mariotte.

Si nous appelons V_1 le volume de la cylindrée BC d'air atmosphérique, le travail nécessaire à sa compression, dans de telles conditions, aura pour valeur (20) :

$$p_1 V_1 \,.\, L\rho,$$

en désignant par ρ le rapport des pressions $\frac{p_2}{p_1}$.

En ce qui concerne le travail de refoulement, cette opération étant effectuée sous la pression constante p_2, qui résiste à la pé-

[1] Nous envisagerons plus loin (n° 342) l'hypothèse de la compression adiabatique, à l'occasion des compresseurs, que l'on a tendance à mener plus rondement que les machines soufflantes.

nétration du volume préalablement comprimé V_2, ce travail a pour valeur p_2V_2. Mais, pour vaincre cette résistance, le moteur se trouve aidé par la pression atmosphérique p_1, qui s'exerce constamment sur la face postérieure du piston pendant tout le parcours CB. Quant aux trajets BA et AB, ils donnent lieu à la compensation qui a été expliquée ci-dessus; et le segment BC n'est pas non plus l'occasion d'un travail résultant, car les deux faces du piston sont alors soumises à la même pression p_1. Mais CB correspond au volume engendré V_1. Le travail moteur ainsi exercé par l'atmosphère sur le piston est donc p_1V_1. C'est donc uniquement la différence :

$$p_2V_2 - p_1V_1,$$

que le moteur aura besoin de fournir pour effectuer la pénétration de l'air comprimé dans l'enceinte de refoulement.

Ce raisonnement mérite d'être remarqué en passant, car il est indépendant de la loi de compression et complètement général. Il nous suffira d'y renvoyer pour les autres cas analogues. Mais, dans celui qui nous occupe, la relation des volumes V_1 et V_2 est fournie par la loi de Mariotte. Par conséquent, la valeur du travail de refoulement s'annule identiquement, et celle du travail total se réduit à son premier terme : le travail de compression.

Pour en rendre l'expression plus pratique, nous commencerons par multiplier par le module 2,3 du système des logarithmes ordinaires, afin de les substituer aux logarithmes népériens. Nous remplacerons p_1, pour fixer les idées [1], par la valeur 10 336 qui correspond à l'air normal; nous multiplierons par le nombre n de tours que fait l'arbre *par minute*, lequel représente celui des cylindrées soufflées pendant cet espace de temps, et nous diviserons par 60, afin de le réduire à la seconde. Nous diviserons encore par 75, pour convertir en chevaux le nombre de kilogrammètres ainsi développé par seconde. Enfin, nous diviserons par le *rendement* λ de la machine, lequel est destiné à tenir compte en bloc de tous les effets accessoires, et des résistances passives qui ont été négligées dans

(1) Sauf à adopter, dans chaque cas particulier, un chiffre mieux approprié aux conditions moyennes, en prenant en considération le climat et l'altitude.

les aperçus précédents. A la vérité, ce coefficient ne saurait être connu définitivement que pour une machine réellement existante. Quand il s'agit d'en asseoir le projet, on se fonde sur ce que la valeur de cet élément oscille en général entre 0,45 et 0,50 suivant le degré de perfection avec lequel est établi l'appareil : ce chiffre pouvant même, bien entendu, tomber beaucoup plus bas, en cas de malfaçon. Il viendra ainsi, pour l'expression de la *force en chevaux nominaux :*

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{75} \cdot \frac{1}{60} \cdot 10356 \;.\; 2,3 \;.\; nV_1 \operatorname{Log} \rho,$$

ou, en effectuant :

$$5,288 \frac{nV_1}{\lambda} \operatorname{Log} \rho.$$

334 — *Souffleries à l'air chaud.* — Dans certains cas, le métallurgiste réclame, pour l'alimentation de ses appareils, l'emploi de l'air chaud. L'hypothèse de la constance de la température, qui formait la base du calcul précédent, doit donc alors disparaître, et il y a lieu de lui en substituer d'autres aussi rapprochées que possible de la réalité dans ces nouvelles conditions.

Nous nous représenterons par la pensée une série de quatre enceintes successives, à savoir : l'atmosphère, le réservoir d'air comprimé, le réservoir d'air chaud, le foyer. Ces enceintes sont séparées consécutivement par trois appareils : la soufflerie, la chaufferie, la tuyère.

L'atmosphère extérieure nous présente l'air à la pression p_1, à la température absolue t_1, et sous un volume spécifique v_1 qui se déduit des précédentes d'après l'équation typique :

$$v_1 = \frac{Rt_1}{p_1}.$$

Le fonctionnement de la soufflerie restera supposé, comme dans le cas précédent, conforme à la loi de Mariotte. La température con-

tinue donc à être égale à t_1, mais la pression devient $p_2 > p_1$, et le volume spécifique prend, en conséquence, la valeur :

$$v' = \frac{Rt_1}{p_2}.$$

Telles sont les conditions du premier réservoir. A cette enceinte succède l'échauffement, que nous supposerons effectué à pression constante dans des conduits suffisamment larges pour que cette hypothèse reste plausible. On trouvera donc, dans le réservoir d'air chaud, la même pression p_2, mais une température $t_2 > t_1$, et un volume spécifique :

$$v_2 = \frac{Rt_2}{p_2}.$$

Quant à l'écoulement à travers la tuyère, nous le supposerons encore isotherme pour plus de simplicité. Nous conserverons donc dans le foyer une température égale à t_2. La pression y retombe à la pression atmosphérique p_1, et le volume spécifique devient :

(40) $$v'' = \frac{Rt_2}{p_1}.$$

Écrivons l'équation des forces vives pour le parcours compris entre le réservoir d'air froid et le foyer (31) :

$$\frac{u^2}{2g} = R(t_1 - t_2) + \int_{v'}^{v''} p dv.$$

Il s'agit d'évaluer cette intégrale dans les conditions actuelles. Elle se compose de deux parties. La première est relative à la transformation qui s'opère dans la chaufferie, de v' à v_2 sous la pression constante p_2. On a donc pour ce premier terme du travail (3) :

$$p_2(v_2 - v') = p_2 v_2 - p_2 v' = Rt_2 - Rt_1 = R(t_2 - t_1).$$

Cette expression détruit algébriquement le terme explicite de l'équation précédente. Son second membre se réduit par suite à la

deuxième portion de l'intégrale, à savoir celle qui est relative à la transformation isotherme opérée de v_2 à v'', à la température t_2. Nous en connaissons d'ailleurs la valeur (33), et l'équation des forces vives devient par là en définitive :

$$(41) \qquad \frac{u^2}{2g} = Rt_2 L \frac{p_2}{p_1}.$$

Développons-en les conséquences.

335 — Les réactions chimiques qui doivent s'accomplir entre l'oxygène de l'air et les charges que l'on passe dans le fourneau s'opèrent, d'après la loi des équivalents, entre des poids déterminés des divers éléments. C'est donc le débit en poids qu'il s'agit d'envisager ici. Il aura pour valeur, au débouché de la tuyère : $m\varpi''\Omega u$, si Ω désigne la section de cette dernière, et m le coefficient de contraction qui correspond à son degré de conicité. Pour évaluer cette fonction, multiplions les deux membres de l'équation précédente par $\varpi''^2\Omega^2$:

$$\frac{(\varpi''\Omega u)^2}{2g} = \varpi''^2\Omega^2 \cdot p_1 v'' L \frac{p_2}{p_1}$$
$$= \varpi''\Omega^2 \cdot p_1 L \frac{p_2}{p_1}.$$

Pour que le débit en poids, qui figure dans le premier, conserve sa valeur sous les mêmes pressions, il en devra être ainsi de $\varpi''\Omega^2$ ou de $\Omega\sqrt{\varpi''}$, c'est-à-dire de $\frac{\Omega}{\sqrt{v''}}$. D'après la relation (40), puisque p_1, qui désigne la pression atmosphérique, est une constante, on peut substituer à cette expression $\frac{\Omega}{\sqrt{t_2}}$, ou encore $\frac{r^2}{\sqrt{t_2}}$, si r représente le rayon du cercle Ω, et enfin, en extrayant la racine :

$$\frac{r}{\sqrt[4]{t_2}}.$$

Concluons que si (en admettant que le système d'hypothèses sim-

plifiées qui précède soit l'expression de la réalité), on veut souffler le même poids d'air chaud sans altérer la pression, il faut modifier le diamètre des tuyères en raison de la quatrième puissance de la température absolue (1).

336 — Dans ces conditions, le travail de la machine n'est évidemment pas changé, puisqu'elle continue à souffler directement le même poids d'air dans un réservoir, à la même température et sous les mêmes pressions qu'auparavant. Quant à la chaleur que l'on communique plus loin au gaz, elle a pour résultat d'augmenter finalement sa force vive, sans que le travail fourni directement par la machine ait eu à subir pour cela d'accroissement. En effet, cette même masse de gaz se trouve animée, au débouché de la tuyère, d'une vitesse donnée par l'équation (41), tandis que celle que communiquerait à elle seule la machine, si elle déversait son débit dans une enceinte à la température t_1, serait fournie par une formule semblable, dans laquelle t_2 serait remplacé par t_1.

Si ce gain de force vive devait être fourni en brûlant, sur la grille de l'appareil à air chaud, une provision spéciale de charbon, le coefficient économique de la nouvelle opération mécanique différerait peu théoriquement de l'ancien. Mais ordinairement, au contraire, ce combustible est gratuit, car on l'emprunte aux gaz du haut fourneau. Dès lors, indépendamment des avantages que pourra présenter, pour la réaction métallurgique, l'élévation de température ainsi obtenue, on réalise une certaine économie au point de vue mécanique, puisqu'à une même dépense de travail correspond une plus grande force vive; de telle sorte que si, inversement, on voulait se contenter de la même force vive, en soufflant un poids égal d'air chaud animé d'une moindre vitesse, on y parviendrait avec moins de frais en procédant de cette manière.

Seulement ce n'est pas sous cette forme que l'on cherchera, en

(1) Par exemple, pour porter l'air de 20D à 300D du thermomètre usuel, nous devons former le rapport :

$$\sqrt[4]{\frac{300+273}{20+273}} = 1,18.$$

conviendra donc d'augmenter de 18 % le diamètre des tuyères.

général, à réaliser le bénéfice. Il est préférable de rester dans les conditions précédentes, et de laisser l'excédent de force vive créé par la chaufferie venir se briser dans le foyer, pour y reprendre la forme calorifique. On retrouve par là, sur le théâtre même des opérations chimiques, le supplément thermique qui correspond à la combustion de l'oxyde de carbone. Ce gaz ne pouvait pas, dans le cas précédent, se brûler et se convertir en acide carbonique dans le haut fourneau; mais on aura ainsi tourné la difficulté en le laissant s'y produire, le recueillant près du gueulard, et le brûlant à part dans un appareil spécial, de manière à restituer ensuite dans le foyer métallurgique, par la voie de la transformation de l'énergie mécanique, l'excédent de chaleur dont le gaz est le représentant, et que l'on ne pouvait développer directement avec le mode de combustion précédent.

CHAPITRE XIX

COMPRESSEURS

—

§ 1

DESCRIPTION

337 — *Machines pneumatiques.* — On appelle *compresseurs* ou *pompes de compression* les appareils qui servent à mettre l'air en tension statique. L'énergie dynamique d'un moteur spécial, hydraulique ou à vapeur, est alors employée à créer dans cette masse d'air une réserve de *travail potentiel*, que l'on dépensera ensuite quand on le voudra, sur place ou à distance, au lieu de communiquer d'emblée à cet air une quantité égale d'*énergie actuelle* ou de demi-force vive, comme avec les machines soufflantes, qui viennent de nous occuper dans le chapitre précédent.

A côté de ces compresseurs *positifs*, mentionnons les compresseurs *négatifs*, qui sont destinés à retirer à l'air une partie de sa tension élastique, et que l'on appelle ordinairement *machines pneumatiques*. On en a construit de très puissantes pour de grandes applications industrielles, telles que le système Clegg du chemin de fer atmosphérique de Saint-Germain, l'extraction par le vide due à Zulma Blanchet aux mines d'Épinac, la transmission de la force à domicile par le procédé Boudenoot, fondé sur l'emploi de l'air raréfié, les freins à vide des chemins de fer, etc. ([1]).

([1]) On a annoncé, sous cette forme, des rendements atteignant jusqu'au chiffre de 87 %, qui serait sans doute sujet à discussion (page 286, note 1). *Engineering*, 24 avril 1874, p. 293

Le principe reste toujours le même dans ces deux classes d'appareils. Il s'agit de puiser l'air dans une capacité d'une tension inférieure, pour le comprimer jusqu'à la pression supérieure d'une seconde enceinte, et le refouler ensuite à l'intérieur de cette dernière. Nous n'aurons par conséquent pas deux théories différentes à formuler à cet égard, et il suffira d'interpréter convenablement, suivant les cas, les notations employées. L'atmosphère terrestre joue en effet alternativement, pour l'un ou l'autre de ces problèmes, le rôle de l'enceinte à moindre ou à plus grande tension. Je n'insisterai donc pas davantage sur ce qui concerne spécialement les machines pneumatiques, et je reprends, pour fixer le langage, le cas des compresseurs proprement dits.

338 — *Compresseurs.* — On peut ranger les compresseurs en deux grandes catégories, suivant qu'ils sont *à piston* ou *sans piston*. Les premiers figurent à peu près seuls aujourd'hui dans la pratique courante. Je me bornerai par suite, en ce qui concerne les autres, à de simples mentions.

Je citerai d'abord le compresseur à choc de Sommeiller, proposé pour le percement du Mont-Cenis, et bientôt abandonné en raison de son faible rendement, qui ne dépassait pas 45 pour 100. Le mode d'action de cet appareil rappelle le bélier hydraulique de Montgolfier, et surtout les idées émises par M. le marquis de Caligny sur l'emploi des colonnes oscillantes [1].

On y peut rattacher les appareils à simple déplacement, qui ont été employés originairement par le service télégraphique, et pourraient, dans certains cas, rendre quelques services dans les mines. L'eau sous pression s'y introduit alternativement dans deux en-

[1] De Caligny (*Notice sur les machines du Mont-Cenis*, in-4°, Turin, 1860. — *Bulletin de la Société philomathique*, 2 mars 1861. — *L'Institut*, 5 novembre 1863. — *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 1859. — *Bulletin de l'Académie de Bruxelles*, 2e série, t, XI). — Colladon. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. t. LXXXII, p. 372. — Noblemaire. Description des béliers de Bardonnèche. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1re série. — Cazin. Application de la théorie mécanique de la chaleur au compresseur hydraulique. *Les Mondes*, 1863 et 1864. — De Saint-Robert. *Annales des mines*, 1863, t. III. — Pernolet. *L'air comprimé et ses applications*, p. 328. — Bibliothèque des Merveilles. *Galeries souterraines*, p. 176. — Sommeiller. *Relazione della Direzione termine alla Direzione generale delle Strade ferrate dello Stato*, Turin, 1863.

ceintes, au sein desquelles elle refoule l'air emprisonné. Le rendement de ces appareils est encore plus faible que le précédent, et reste compris entre 6 et 40 pour 100 (1).

La Cagniardelle constitue un compresseur à faible tension, dont le mouvement est inverse de celui de la vis d'Archimède. On connait en effet le pouvoir dilatant de ce dernier appareil (2).

Citons enfin les organes d'entraînement qui fonctionnent par l'eau, l'air ou la vapeur. Le premier de ces trois modes constitue la trompe (n° 64, fig. 34). M. Félix de Romilly lui a donné une forme plus simple et plus avantageuse (3). On peut entraîner ainsi un volume d'air variant entre 0,75 et 1,75 fois celui de l'eau. J'ai déjà cité également (n° 276, note 2) les résultats obtenus par ce physicien dans ses expériences sur l'entraînement de l'air par l'air. En ce qui concerne l'impulsion par la vapeur, on peut mentionner les injecteurs Kœrting, Siemens, etc. (4), employés pour les souffleries, la production du vide, l'élévation de l'eau, avec des pressions qui ne dépassent pas $0^{m},65$ de mercure.

339 — Les compresseurs à piston, dont le point de départ, ainsi que de nombreux perfectionnements, sont dus à M. Colladon (5),

(1) Brunin. Compresseur à colonne d'eau. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, t. III, 1878, p. 639. — Albert Fournier. Sur un nouvel appareil hydraulique propre à aspirer et comprimer les gaz. *Congrès de l'Association scientifique*, 1884, p. 82. — Pernolet. *L'air comprimé et ses applications*, p. 135. — Frizell. Experiments on the compression of air by the direct action of water. *Journal of the Franklin Institute*, septembre 1877, septembre 1880.

(2) Delaunay. *Cours élémentaire de mécanique*, 1851, p. 597. — Bibliothèque des Merveilles. *Galeries souterraines*, p. 49.

(3) Félix de Romilly. *Étude sur l'entraînement de l'air par un jet d'air ou de vapeur*, 1875. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 18 janvier et 12 avril 1875. — Injecteur à air pour entraîner les eaux d'égout. *Bulletin du ministère des Travaux publics*, août 1881, p. 155. — Pernolet. *L'air comprimé et ses applications*, p. 138.

(4) *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 2e série, t. XX, p. 50. — Pernolet. *L'air comprimé et ses applications*, p. 139. — *Institution of mechanical Engineers*, 2 mai 1872.

(5) Pernolet. *L'air comprimé et ses applications*, Dunod, 1878; ouvrage fondamental sur cette matière, renfermant (p. 93) une liste de 98 compresseurs divers, dont il présente les descriptions. — Pernolet. Mémoire sur l'application des moyens mécaniques au creusement des puits et galeries. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 2e série, t. III, p. 595. — Joseph Costa. *Traité élémentaire de l'air comprimé*. Baudry, 1888. — Cornet. (*Ibidem*, 1re série. — *Considérations sur la production et l'emploi de l'air comprimé*. Mons, 1875). — Achard. Transmission

peuvent se classer aujourd'hui d'après le degré d'importance de l'ensemble plus ou moins complet des précautions qui ont été prises par divers constructeurs, afin d'empêcher l'échauffement de l'air. Ce point de vue prend tous les jours plus d'intérêt, car l'allure de ces appareils tend à devenir de plus en plus rapide, et une élévation de température exagérée risque de paralyser l'action

des forces à distance. *Annales des mines*, 7e série, t. VI, p. 131, 301 ; t. VII, p. 146. — Devillez. *Percement du tunnel sous les Alpes et emploi des machines dans les mines de Liège*, 1863. — Trasenster. Travail par l'air comprimé. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, t. XXXIII, p. 414. — Habets. Emploi de l'air comprimé. *Ibidem*, 2e série, t. VII, p. 106. — Maréchal. *Ibidem*, t. IX, 1861, p. 815. — Mativa. Compresseurs. *Ibidem*, 2e série, t. III, p. 668. — De Place. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 2e série, t. II. p. 735. — Baure (*ibidem*, 1re série, t. V, p. 627. — *Annales des mines*, 7e série, t. VII, p. 171). — Triger. *Musée de l'industrie belge*, 1841. — Dictionnaire des arts et manufactures, au mot *Air comprimé*. — Gustave Hanarte. *Emploi de l'air comprimé*, in-8°. Mons, 1879. — Sorel. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XIII, p. 1033. — *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, janvier 1880, p. 25. — Agostino Cavellero. *Le machine a vapore*. — Mecheler Treves. *Sulla perforazione mecanica*. Venezia, 1864. — Taylor. *Transactions of North of England Institute of mining and mechanical Engineers*, t. XXI, p. 73. — Kraft. Notes on compressed air and machinery for utilizing it. *Proceedings of the Institution of civil Engineers*, 1884-85. — Jameson. On air compressing apparatus. *Rep. of the British Association*, 1863, t. II, p. 173. — Hasslacher. *Zeitschrift für das Berg Hütten und Salinenwesen im Preussischen Staate*, t. XVII, p. 39. Traduction de Pernolet. *Annales des mines*, 6e série, t. XVII, p. 527. — Verhandlüngen des Vereines zür Beforderüng des Gewerbfleisser, 1879, p. 376.

Compresseur Dubois-François, *The Engineer*, 28 mars 1884, p. 238. — Compresseur Sautter et Lemonnier (*Annales industrielles*, 18 juillet 1880. — *Revue industrielle*, 1886, planche 9. — Armengaud. *Publication industrielle*, 2e série, t. VIII, planche 26. — *Scientific American*, 5 mai 1883, p. 275). — Compresseur Triger. *Rapport* de M. Devillez, Liège, 1863. — Compresseur Colladon (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXII, p. 372. — Bibliothèque des Merveilles. *Galeries souterraines*, p. 256). — Compresseur Jeanson. Dunod, in-8°, 1879. — Compresseur Tonnelier, *Annales des mines*, 6e série, t. III, p. 281. — Compresseur de Fives-Lille, *Portefeuille économique des machines*, 3e série, t. XII, p. 82. — Compresseur Brotherhood. *Engineering*, 25 novembre 1881, p. 525. — Compresseur Owen, *ibidem*, 13 mai 1881, p. 484. — Compresseur Kennedy, *ibidem*, 5 mai 1882, p. 452. — Compresseur Sturgeon, *ibidem*, 23 octobre 1874, 4 et 18 février 1881. — Compresseur Thwaiter, *ibidem*. 8 janvier 1886, p. 33. — Compresseur Wrigth, *Proceedings of the Institution of civil Engineers*, 1882-83, n° 1920. — Compresseur Burton, *Revue industrielle*, 1883, Pl. 5. — Compresseur Allen, *American Machinist*, 26 mars 1881. — Compresseur Clayton. *Engineering News*, 24 septembre 1881, p. 383. — Compresseur rotatif Johnston, *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 1874, t. XXXVI, p. 344. — Compresseur Fish, *American Machinist*, 19 mars 1881, p. 8. — Compresseur Humboldt, *Engineering*, 25 juin 1875. — Compresseur Welch, *ibidem*, février 1886, p. 173. — Compresseur Schramm, *ibidem*, 25 novembre 1881, p. 523. — Compresseur Breitfeld, *ibidem*, 4 février 1881, p. 114 ; 10 avril 1885, p. 308.

des graisses en provoquant le grippement des surfaces métalliques.

Dans quelques-unes de ces machines, on ne prend à cet égard aucunes mesures spéciales, et l'on se borne à modérer la vitesse de régime, en acceptant l'inconvénient en question dans ces proportions réduites.

D'autres compresseurs sont immergés dans une bâche d'eau froide incessamment renouvelée, et qui en embrasse toute la surface (fig. 205).

On obtient un résultat plus efficace, avec moins d'encombre-

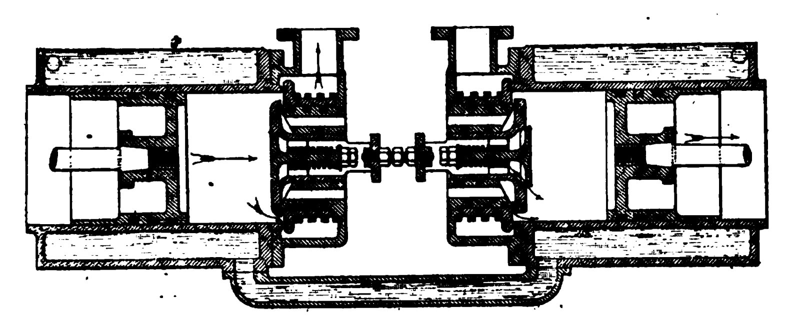


Fig. 205. — Compresseur Thwaiter à enveloppe hydraulique (coupe horizontale).

ment, au moyen des doubles enveloppes à circulation réfrigérante. M. Colladon en a étendu la pénétration jusque dans la tige et le corps du piston (fig. 206), complication qui tend du reste aujourd'hui à disparaître.

On fait également pénétrer l'eau dans l'intérieur du cylindre. Je citerai d'abord dans cet ordre d'idées le compresseur *à piston hydraulique* (fig. 207), à l'intérieur duquel le piston proprement dit, mobile dans un cylindre horizontal, est accompagné, sur ses deux faces, de colonnes d'eau qui se redressent dans deux corps de pompes verticaux munis, à leur sommet, de soupapes d'appel et d'exhaustion. L'allure doit alors rester lente, sous peine de mettre ce bain liquide dans un état d'agitation inadmissible. Le rendement est de 0,40 à 0,50.

En vue d'activer la marche, on a recours, pour les compresseurs *à piston sec* (fig. 208 à 212), à l'injection, sous forme de pluie très fine, d'*eau pulvérisée*, dans la proportion de $\frac{1}{1000}$ à $\frac{1}{1200}$ du

volume aspiré. On a pu atteindre ainsi des rendements de 0,80 et même 0,85.

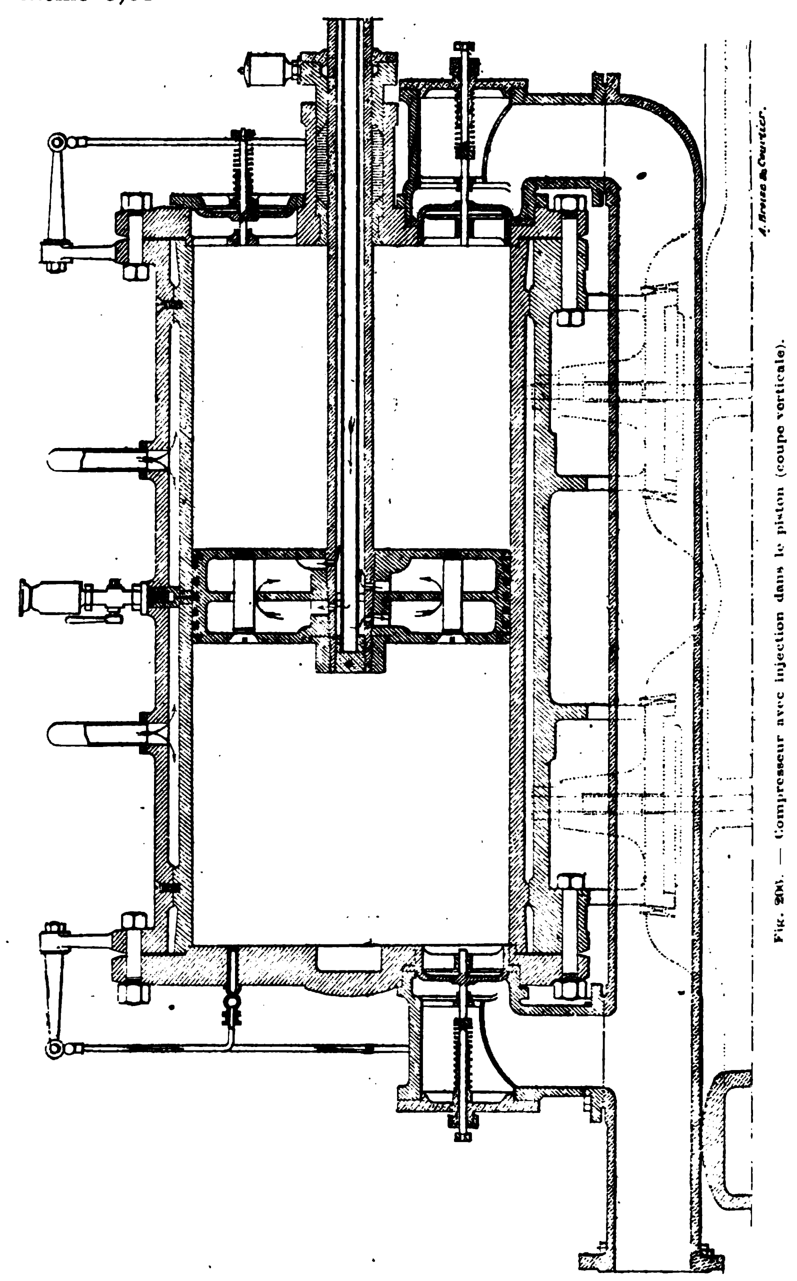


Fig. 203. — Compresseur avec injection dans le piston (coupe verticale).

340 — En ce qui concerne l'importance des dimensions des compresseurs, et celle des résultats obtenus industriellement, on rencontre la plus grande variété, depuis la petite pompe de compression employée par M. Henri Fayol pour l'alimentation de ses appareils de sauvetage ([1]), jusqu'aux grandes installations qui servent au percement des longs tunnels, ou qui ont été créées par de puissantes Compagnies de mines.

En vue de faciliter les recherches minérales dans les contrées

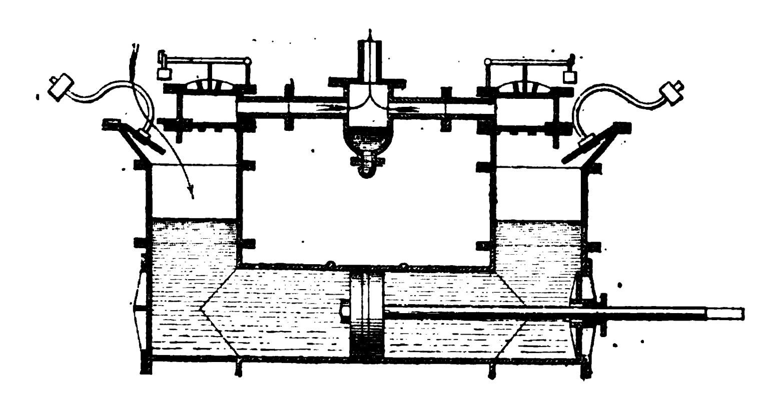


Fig. 207. — Compresseur à piston hydraulique (coupe verticale).

formées de roches résistantes, MM. Sautter et Lemonnier ont construit un *compresseur de montagne portatif* (fig. 213), ainsi qu'un *compresseur locomobile* monté sur roues (fig. 214).

On a songé à doubler d'une chemise de bronze l'intérieur des cylindres, afin d'en éviter l'oxydation sous l'influence de l'air humide, et de ménager en même temps les garnitures des pistons. Mais cette précaution paraît embarrassante et inutile.

Pour le piston lui-même, on peut recommander la garniture Giffard, qui consiste en un morceau de cuir ou de caoutchouc logé dans une rainure du noyau métallique. On obtient aussi de bons résultats avec l'*antifriction*, surtout pour remplacer la boîte à

([1]) Pernolet. *L'Air comprimé et ses applications*, p. 98. — De Place. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 2e série, t. II, p. 735. — Baure (*ibidem*, 1re série, t. V, p. 627. — *Annales des mines*, 7e série, t. VII, p. 171).

Je citerai également le compresseur à main de Weindel (*Scientific American*; octobre 1883, p. 260).

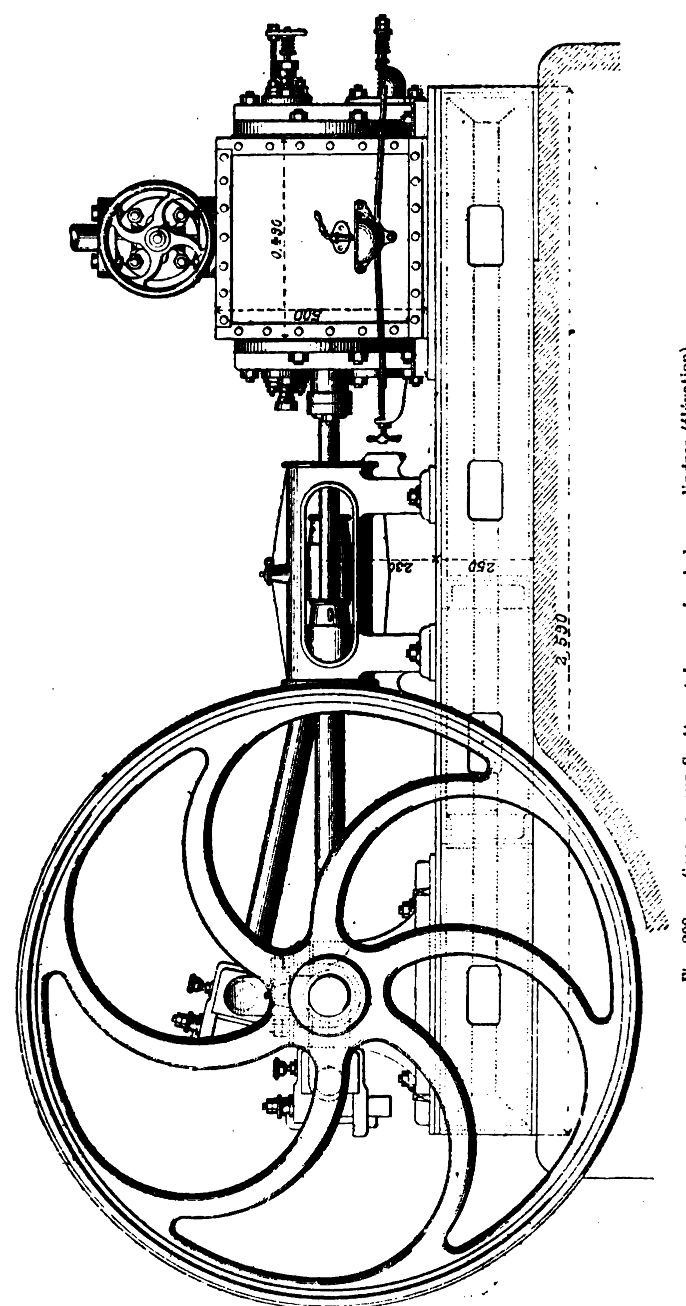


Fig. 208. — Compresseur Sautter et Lemonnier à deux cylindres (élévation).

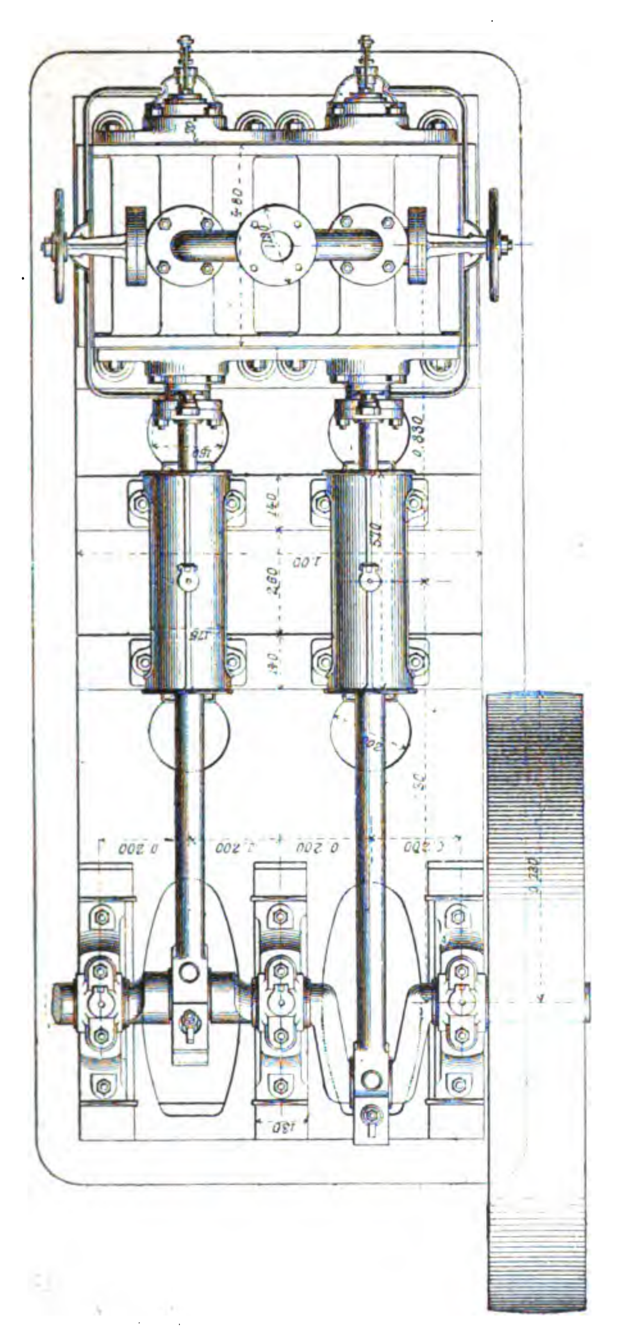


Fig. 209. — Compresseur Sautter et Lemonnier à deux cylindres (plan).

étoupes; mais le système Ramsbottom, ou les garnitures à seg-

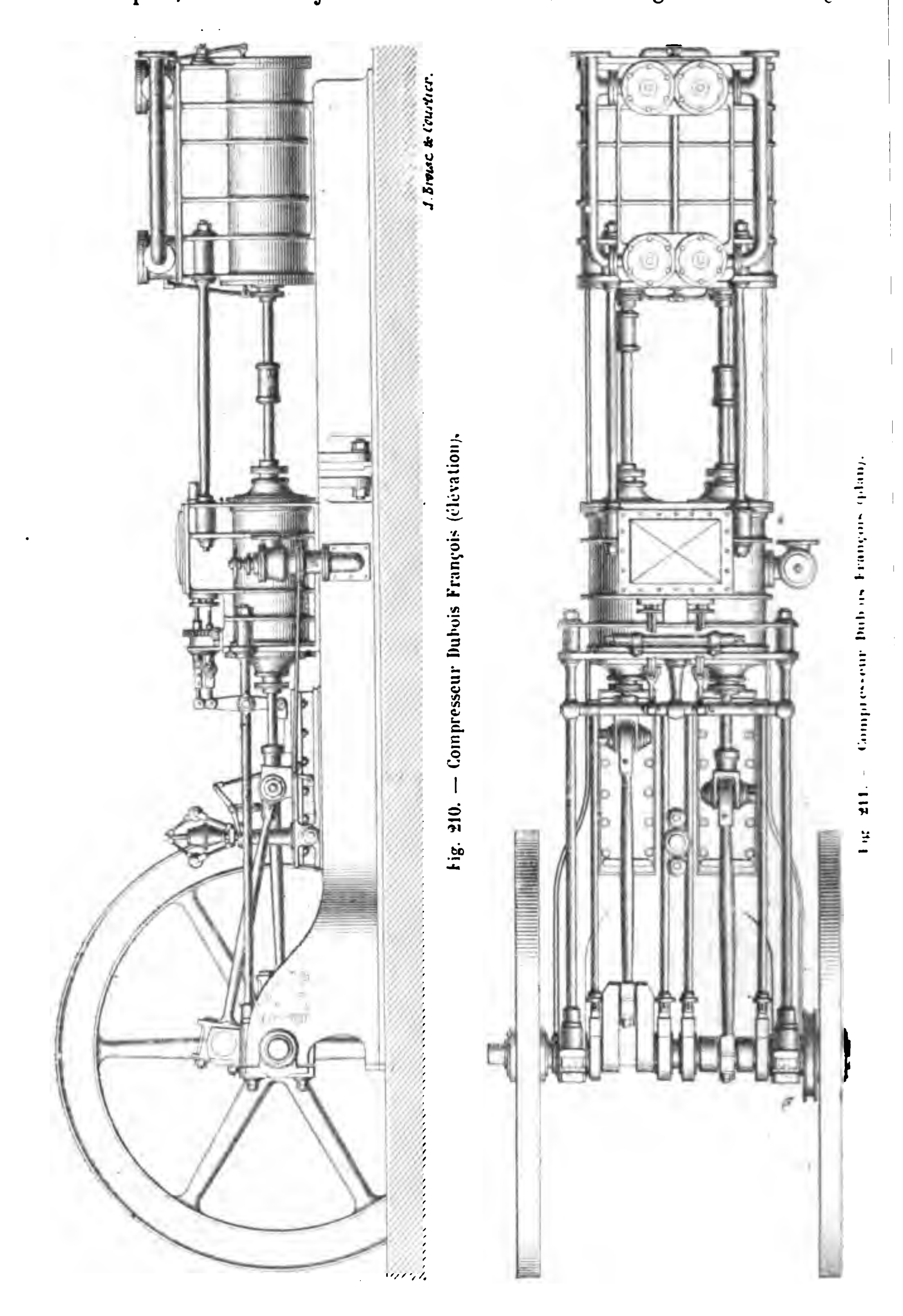


Fig. 210. — Compresseur Dubois François (élévation).

Fig. 211. — Compresseur Dubois François (plan).

ments constituent le mode le plus usité. Le bronze est employé dans leur construction.

Les clapets souffrent souvent de la chaleur, et ce type a pour effet

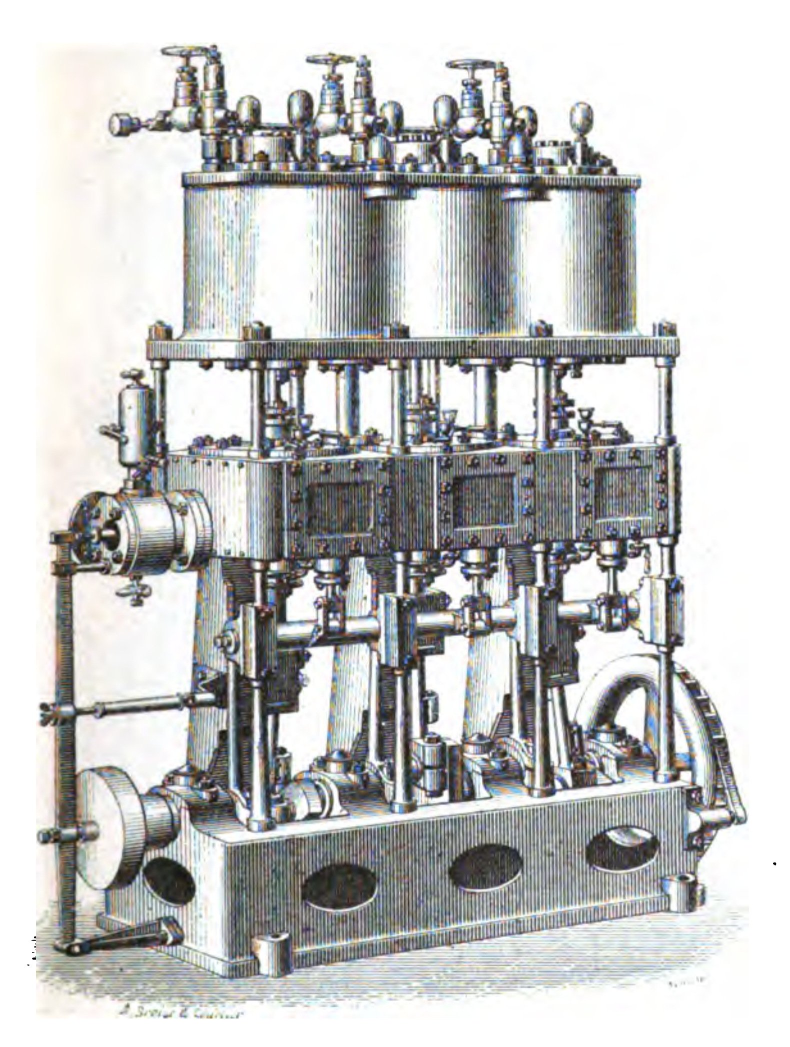


Fig. 212. — Compresseur triple Brotherhood (vue perspective).

d'augmenter l'espace nuisible. On emploie des soupapes en acier avec siège de bronze. Elles sont maintenues à l'aide d'un ressort, et parfois commandées par le mécanisme lui-même, à moins qu'on

ne leur donne une grande légèreté. Les tiroirs se sont peu répandus ([1]).

La tension usitée dans les applications est très variable. On peut distinguer les compresseurs *à basse pression* (lorsque celle-ci reste inférieure à 2 kilogrammes par centimètre carré), *à moyenne pres-*

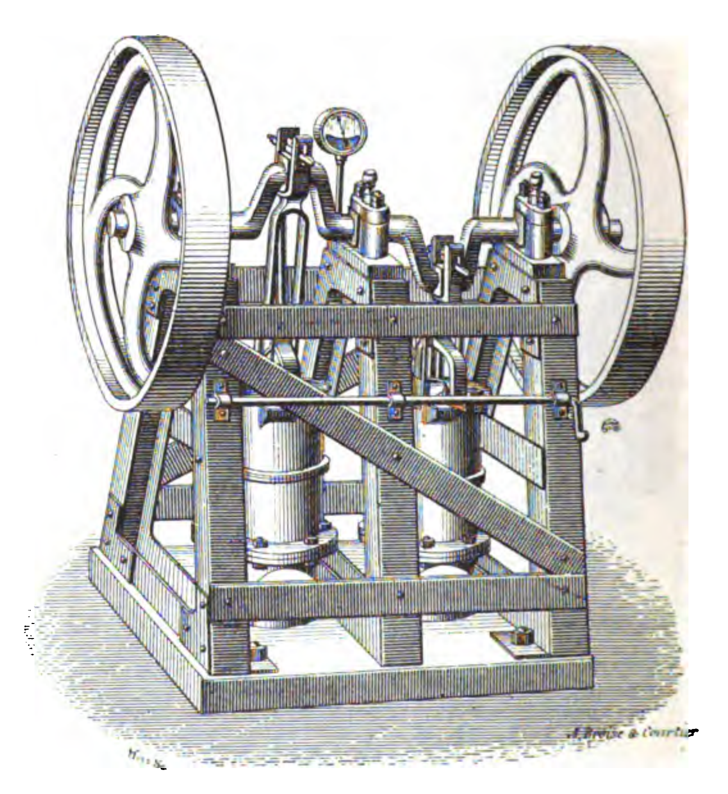


Fig. 213. — Compresseur de montagne Sautter et Lemonnier (vue perspective).

sion (entre 2 et 4 kilogrammes), *à haute pression* (de 4 à 8), *à pression excessive* au delà. La Compagnie du gaz portatif emploie des tensions de 11 atmosphères ([2]). Les locomotives du Saint-Gothard étaient alimentées par M. Colladon avec de l'air comprimé à 14 kilogrammes. Les appareils plongeurs Rouquayrol atteignent 40 kilo-

([1]) Compresseurs à tiroir Beer, Burckardt et Weiss, Cornaz.

([2]) Dès 1828, Taylor employait du gaz comprimé à 30 atmosphères (Dumas. *Traité de chimie appliquée aux arts*, t. I, p. 687).

grammes de pression par centimètre carré. M. Mékarski emploie, pour les tramways de Nantes, de l'air à 30 atmosphères. Il vient de construire dans son usine de Doulon, pour le service des torpilles, des compresseurs et des réservoirs de 120 atmosphères, dont il a même pu pousser l'épreuve jusqu'à 150 atmosphères, sans avoir de pertes par les fonds rivés.

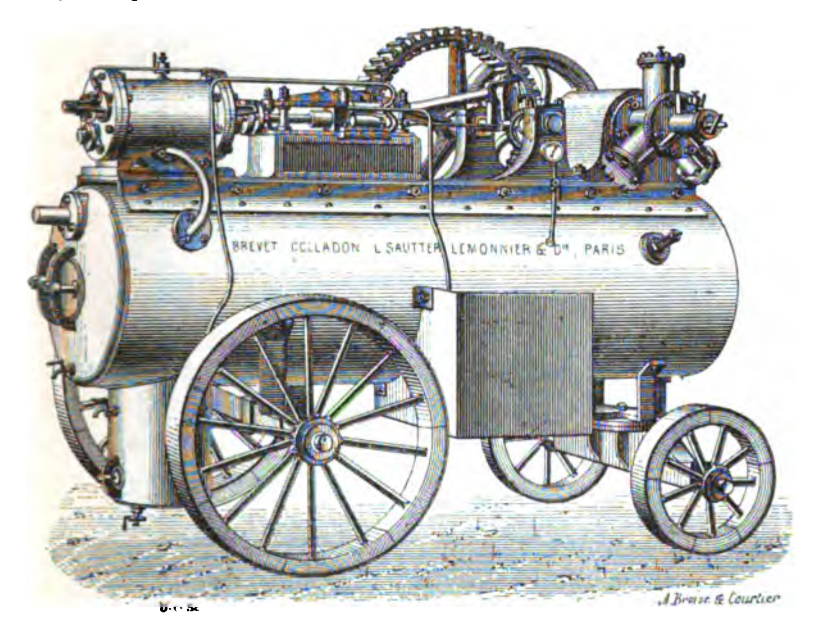


Fig. 214. — Compresseur locomobile Sautter et Lemonnier (vue perspective).

En ce qui concerne la vitesse, on est arrivé au chiffre de 60 tours de l'arbre par minute. Celle du piston ne doit pas dépasser $1^m,50$ par seconde, et surtout 2 mètres, si le système est à action directe. Il convient de la tenir au-dessous de $0^m,60$ dans le compresseur à piston hydraulique. Cette circonstance oblige alors à employer un moteur très lent, ou un train d'engrenages, et des dimensions très volumineuses.

341 — L'air saturé d'humidité est reçu dans des réservoirs où il s'égoutte [1]. Des *purgeurs* permettent d'évacuer périodiquement

[1] Pierron. Les réservoirs en tôle. *Génie civil*, t. IX, p. 98.

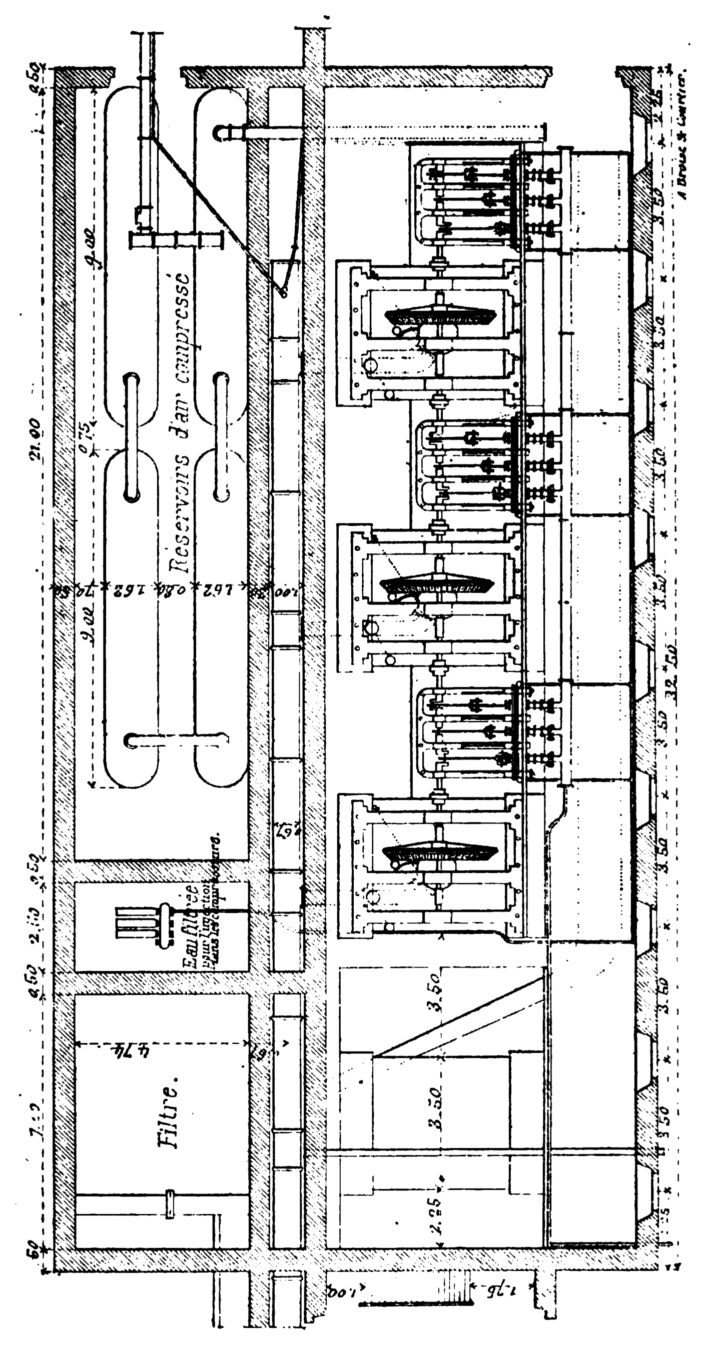


Fig. 213. — Installation des compresseurs et des réservoirs à Airolo (Saint-Gothard). (Plan).

l'eau déposée, que la force élastique expulse énergiquement au dehors. Ces réservoirs servent en même temps de régulateurs de pression, et doivent présenter un volume au moins égal au tiers ou à la moitié de celui que les moteurs dépenseront par heure. Ils sont munis d'un *trou d'homme* avec *autoclave* [1] pour permettre le nettoyage, d'un manomètre et d'une soupape de sûreté [2].

Ces réservoirs cylindriques sont ordinairement couchés horizontalement afin de présenter plus de stabilité (fig. 215). On peut aussi les redresser verticalement, quand l'économie de l'emplacement le réclame.

§ 2

THÉORIE

342 — Les compresseurs sont ordinairement menés plus rondement que les machines soufflantes. Nous substituerons donc à l'hypothèse de la compression isotherme, que nous avons adoptée pour ces dernières (n° 333), celle du mode adiabatique. Je me bornerai du reste à raisonner *pour un kilogramme d'air ;* la transformation pratique de la formule qui lui correspond, pour en déduire la force en chevaux de la machine, restant absolument la même que ci-dessus.

L'opération se compose encore de deux parties : 1° la compression de l'air dans le cylindre; 2° son refoulement dans le réservoir. Le travail nécessaire pour cette seconde portion conserve l'expression générale (n° 333) :

$$p_2v_2 - p_1v_1,$$

ou, d'après l'équation typique (10) :

$$R(t_2 - t_1).$$

(1) Tous ces détails trouveront leur description dans la partie de ce Cours consacrée aux machines à vapeur et aux générateurs.

(2) L'emploi de ces soupapes est rendu très difficile par la filtration de l'air (Michel Lévy. Rapport à la Commission centrale des machines à vapeur sur les récipients de gaz sous pression. *Annales des mines*, 8e série, t. X, p. 203).

Le travail de compression adiabatique a de son côté pour valeur (22):

$$Ec(t_2 - t_1).$$

L'ensemble sera donc :

$$(R + Ec)(t_2 - t_1),$$

ou, d'après l'équation paramétrique (14) :

$$kcE(t_2 - t_1),$$

et enfin :

$$\frac{k}{k-1} R(t_2 - t_1). \tag{42}$$

Si l'on substitue à R la valeur (11) qui correspond à l'air atmosphérique, il vient, tout calcul fait :

$$100{,}7(t_2 - t_1).$$

Il reste donc à connaître t_2.

343 — Nous avons vu que l'une des questions les plus sérieuses que soulève, dans la pratique, l'opération de la mise en tension de l'air est précisément celle de l'échauffement occasionné par une compression trop brusque. On connaît, à cet égard, l'expérience caractéristique désignée sous le nom de ***briquet à air***.

Pour déterminer cette élévation de température dans les conditions actuelles, nous avons la relation (25) :

$$t_2 = t_1 \rho^{0{,}29},$$

en appelant ρ le rapport des pressions. Si, par exemple, on admet comme température ambiante $\theta_1 = 20$, d'où $t_1 = 293$, on obtiendra, pour les diverses valeurs du degré de compression ρ, les températures t_2 et θ_2 qui sont renfermées dans les trois premières colonnes du tableau suivant [1].

[1] Pernolet. *L'Air comprimé et ses applications*, p. 45.

p	θ_2	t_2	θ'	x
2	85,2	358,2	49,3	0,95
3	129,9	402,9	69,8	0,92
4	164,9	437,9	84,4	0,90
5	194,2	467,2	96,1	0,88
6	219,6	492,6	107,9	0,87
7	242,1	515,1	115,7	0,86
8	262,4	535,4	122,5	0,85
9	281,1	554,1	128,5	0,84
10	298,3	571,3	135,5	0,83
11	314,2	587,2	140,1	0,83
12	329,2	602,2	145,9	0,82
13	343,4	616,4	151,8	0,81
14	356,8	629,8	156,2	0,81
15	369,5	642,5	160,6	0,80

Ces résultats montrent, par exemple, qu'une compression brusque à 6 ou 7 atmosphères suffit pour développer la température de la fusion de l'étain, 228°. Pour 12 ou 13 atmosphères, on atteint celle du plomb, 335°.

344 — On conçoit d'après cela que l'on trouvera un certain avantage à fractionner l'opération dans des cylindres distincts (1). Si, en effet, on élève progressivement la pression dans chacun d'eux, en laissant chaque fois le refroidissement ramener la température au point de départ, celui-ci restant toujours le même dans chaque opération avec un moindre rapport effectif de pressions, l'élévation de température sera naturellement inférieure à celle qui correspond à une compression unique.

Envisageons, par exemple, le système de deux cylindres successifs. Dans le premier, la pression est portée de p_1 à p', et la température s'élève de t_1 à t'. A l'aide de moyens convenables de refroidissement, on la fait retomber à t_1, sans modifier la pression. L'opération

(1) Mallard Étude sur les machines à air comprimé. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1re série, t. XII, p. 615.

qui s'exécute dans le second cylindre devra donc porter la tension de p' à p_2, en même temps que la température s'élèvera de t_1 à t''. Avec ces notations, on aura respectivement pour chacune des expériences (25) :

$$t' = \left(\frac{p'}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} t_1, \qquad t'' = \left(\frac{p_2}{p'}\right)^{\frac{k-1}{k}} t_1.$$

On en tire, en multipliant membre à membre :

$$t't'' = \rho^{\frac{k-1}{k}} t_1^2.$$

Ainsi *le produit des températures absolues auxquelles conduit chacune des deux opérations, reste constant et indépendant de la pression arbitraire qui a servi de relai.*

Le moyen d'abaisser le plus possible la plus haute de ces deux températures finales consiste d'après cela à les égaler entre elles, ce qui donne :

$$t' = t'' = t_1 \rho^{\frac{k-1}{2k}} = t_1 \rho^{0,145}.$$

La quatrième colonne du tableau précédent présente ce résultat sous forme de température *usuelle* θ'. Sa comparaison avec les nombres inscrits dans la seconde colonne permet d'apprécier l'avantage, très caractérisé sous ce rapport, de cette manière de procéder.

Les conditions précédentes donnent évidemment, pour $t' = t''$:

$$\frac{p'}{p_1} = \frac{p_2}{p'},$$

d'où l'on déduit la pression de relai :

$$p' = \sqrt{p_1 p_2} = p_1 \sqrt{\rho}.$$

La pression intermédiaire la plus avantageuse est donc la moyenne géométrique entre les tensions extrêmes proposées.

Il est facile de constater que *ce mode correspond au minimum de travail total.* Ce dernier a en effet pour valeur (42) :

$$\frac{k}{k-1}\mathrm{R}[(t'-t_1)+(t''-t_1)],$$

c'est-à-dire :

$$\frac{k}{k-1}\mathrm{R}[(t'+t'')-2t_1].$$

Or la somme $t'+t''$ atteint son minimum pour $t'=t''$, puisque le produit $t'\,t''$ reste invariable.

Nous pouvons même exprimer analytiquement l'avantage ainsi réalisé sur le mode ordinaire. Ce minimum devient en effet :

$$\frac{2k}{k-1}\mathrm{R}t_1(\rho^{\frac{k-1}{2k}}-1).$$

Or le travail nécessaire pour l'opération unique qui ferait passer directement de p_1 à p_2 a pour expression :

$$\frac{k}{k-1}\mathrm{R}t_1\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)=\frac{k}{k-1}\mathrm{R}t_1(\rho^{\frac{k-1}{k}}-1),$$

d'où, en prenant le rapport x de ces deux valeurs :

$$x=\frac{2(\rho^{\frac{k-1}{2k}}-1)}{\rho^{\frac{k-1}{k}}-1}=\frac{2}{\rho^{\frac{k-1}{2k}}+1},$$

résultat évidemment inférieur à l'unité.

La cinquième colonne du tableau ci-dessus présente la gradation des valeurs de x. On voit qu'elle est peu rapide, dès que l'on a dépassé les premières valeurs du degré de compression. Aussi ce moyen s'est-il peu répandu dans la pratique, et le rafraîchissement par l'eau froide fournit une solution pratique plus satisfaisante pour prévenir les élévations excessives de température.

CHAPITRE XX

MOTEURS A AIR COMPRIMÉ

—

§ 1

DESCRIPTION

345 — *Moteurs à air raréfié.* — Nous venons d'étudier, dans le chapitre précédent, les opérateurs qui servent à mettre l'air en tension. Nous nous occuperons dans celui-ci des récepteurs destinés à utiliser l'énergie ainsi emmagasinée.

On peut les distinguer, comme les compresseurs eux-mêmes, en deux catégories, suivant que la dépression motrice est positive ou négative. On obtient ainsi les *moteurs à air comprimé* ou *à air raréfié* [1]. Les premiers sont reliés par une tuyauterie à un com-

[1] Hanarte. L'air raréfié (*Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 2e série, t. XX, p. 109. — *Génie civil*, t. IX, p. 392). — Max de Nansouty. Distribution de force motrice à domicile au moyen de l'air raréfié de M. Boudenoot. *Génie civil*, t. IX, p. 145. — Boudenoot. Communication sur les moteurs domestiques marchant par l'air raréfié. *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, 20 mars 1885. — Émile Dollfus. Note sur la transmission de force par l'air raréfié. *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, 1er trimestre de 1888, p. 155. — *Revue industrielle*, 7 juin 1882. — *Moniteur industriel*, 5 janvier 1888, p. 8. — *La Nature*, 10 juin 1882. — *Portefeuille économique des machines d'Oppermann*, juillet 1882, p. 100 ; 1885, p. 119 ; 1888, p. 17. — *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 1885. — *Génie civil*, t. VIII, p. 325. — Frein à vide Smith. *Portefeuille économique des machines d'Oppermann*, 1870, pl. 13. — Frein à vide Eames. *Annales industrielles*, 1885, t. I, p. 265, 309. — Frein à vide Hardy. *Ibidem*, 1886, t. II, p. 137. — *Frein continu à vide automatique*. Londres, 1885. — G. Marié. Essai sur les freins continus Westinghouse et *vacuum*. Paris, 1879. — Frein à vide. *Portefeuille économique des machines d'Oppermann*, 1883, pl, 53, 54. — Seguin et Trudon. Signal avertisseur automatique pour freins à vide. *Ibidem*, 1880, p. 50.

presseur proprement dit, et ces derniers à une machine pneumatique, qui pousse en général le vide jusqu'aux trois quarts environ.

Avec l'un ou l'autre type, on se trouve dispensé de la préoccu-

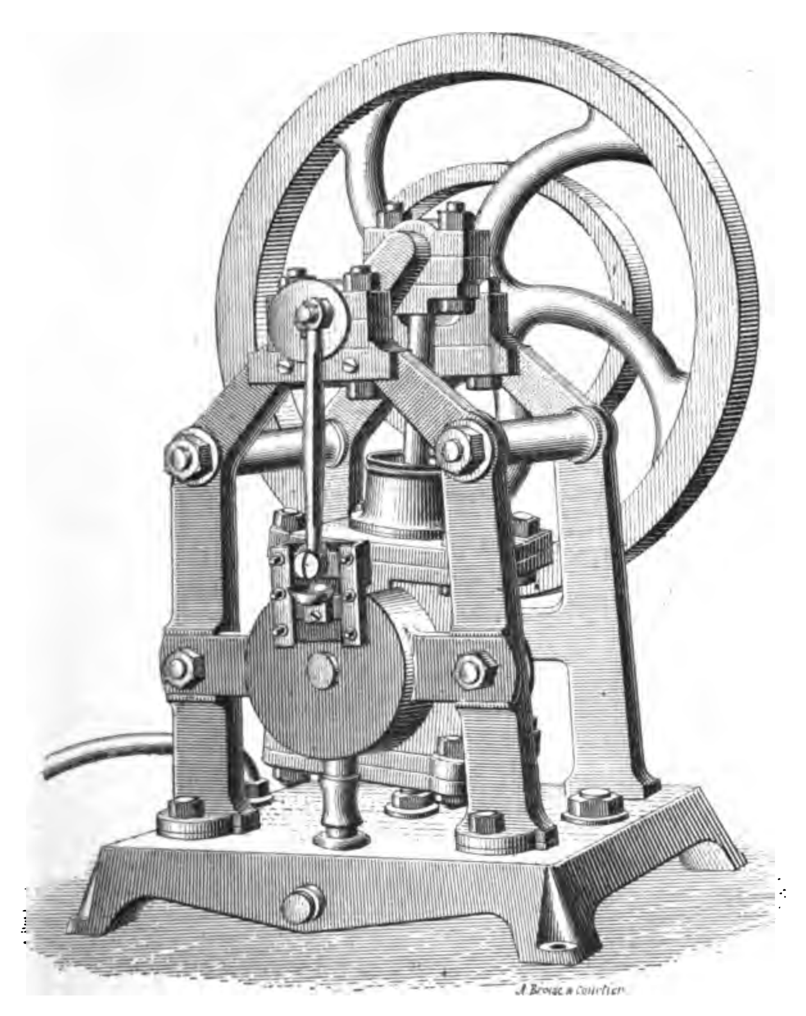


Fig. 216. — Moteur Petit à air raréfié (vue perspective)

pation du *retour*, qui est au contraire inséparable (particulièrement dans les travaux souterrains) de quelques autres modes de transmission à distance, tels que la vapeur, l'eau forcée, les câbles télédynamiques, et même parfois l'électricité.

Ces deux procédés exercent une action bienfaisante sur l'atmosphère de l'atelier; les moteurs à air comprimé, en y déversant l'air pur que les compresseurs ont puisé au dehors, et refoulant à travers les ouvertures de l'enceinte l'air vicié et les poussières; les moteurs à air raréfié (fig. 216), en *avalant* l'air contaminé, et provoquant des rentrées d'air extérieur pour le remplacer. Ces derniers seront donc les plus exposés à l'encrassement. Les moteurs à air comprimé travaillant en général avec une dépression plus importante, puisqu'elle n'est pas nécessairement limitée à une fraction d'atmosphère, transportent l'énergie sous une moindre masse, par suite avec une moins grande vitesse de translation, et une moindre perte de charge. Toutefois cet inconvénient se trouve atténué pour le transport de faibles forces à une distance modérée. Pour la même raison, les moteurs à vide seront, à égalité de puissance, plus volumineux et plus encombrants. Mais, en revanche, la diminution de la pression tend à atténuer le refroidissement dû à la détente, et l'inconvénient très grave de l'empâtement des mécanismes de distribution dans la glace qui est produite par la congélation de la vapeur d'eau: circonstance sur laquelle nous insisterons plus loin.

346 — *Moteurs à air comprimé.* — Le dispositif est le même pour les moteurs à vide et pour les machines *à air comprimé* [1].

[1] Moteur à air comprimé et à détente Boulier. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, t. IV, 1871, p. 449. — Machines à air comprimé. *Lumière électrique*, t. XV, p. 110. — Hanarte. *Notice* sur une machine à air comprimé à piston hydraulique et nappe de réchauffement, in-8°, Mons, 1879. — Mallard. Étude théorique sur les machines à air comprimé. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1re série, t. XII, p. 615. — Courtin. *Éléments de la théorie mécanique de la chaleur contenant les formules nouvelles pour le calcul des moteurs à air comprimé*, Mons, 1882. — Dwelshauvers-Dery. *Rapport sur l'Exposition d'Amsterdam.* — Frein à air comprimé Mégy. *Publication industrielle d'Armengaud*, 2e série, t. VIII, p. 501. — Gouin. *Notice sur l'ascenseur à air comprimé pour chemin de fer à fortes rampes*, in-8°. Lausanne, 1880. — Achard. *Annales des mines*, 7e série, t. VI, p. 301. — Devillez. *Des travaux de percement du tunnel sous les Alpes, et de l'emploi des machines dans l'intérieur des mines.* — Hanarte. *La perforation mécanique et les nouvelles machines à air comprimé à détente*, in-8°. Mons, 1879. — Colladon. Note sur l'emploi de l'air comprimé pour le percement des longs tunnels. *Annales des mines*, 8e série, t. XII, p. 469. — Agostino Cavellero. *Le macchine a vapore.* — Slaby. The Theory of closed Air Engines. *Proceedings of the Institute of civil Engineers*, t. LVI.

Il n'y a pas lieu du reste d'en présenter en ce moment une description détaillée. Ce sujet sera traité avec les plus grands développements dans la quatrième partie de ce Cours, consacrée aux machines à vapeur; attendu qu'en principe tout appareil propre au fonctionnement de la vapeur d'eau se prête par cela même à celui de l'air comprimé. Ce fluide y peut travailler comme la vapeur elle-même, soit en pleine pression, soit avec détente. Seul, le condenseur ne saurait trouver ici sa place ; l'échappement se fait toujours à l'air libre.

On emploie pour ces moteurs trois dispositifs essentiels : ma-

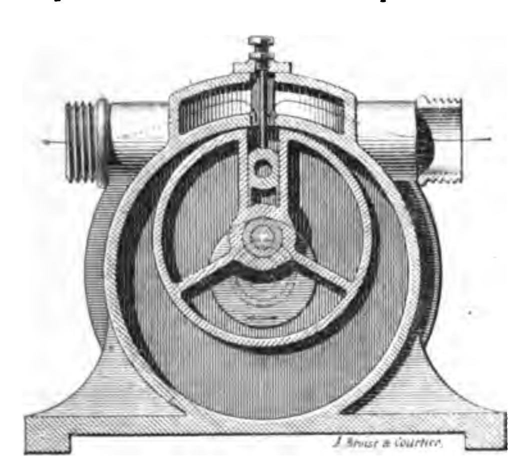


Fig. 217. — Machine rotative Taverdon (coupe verticale).

chine à cylindre fixe ([1]), machine oscillante ([2]), machine rotative ([3]). Ces dernières, qui sont peu employées industriellement pour la vapeur, ont acquis, au contraire, pour l'air comprimé une importance plus grande, particulièrement en ce qui concerne les faibles puissances (fig. 217).

Indépendamment des machines fixes, on a construit également des locomotives à air comprimé ([4]). En 1840, MM. Andraud et Tessié du Mottay ont établi à Chaillot le premier tramway de ce

([1]) Moteurs Backet, Popp, van Rennes, Wendtmann, etc.

([2]) Moteur Mégy.

([3]) Moteurs Boudenoot, Braconnier, Cherbonnier, Taverdon, Uhler, etc.

([4]) Ribourt. *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, 18 juin 1875. — Locomotive Beaumont. *Portefeuille économique des machines d'Oppermann*, 1881, p. 8.

genre. On connaît également ceux de Nogent-sur-Marne, de Nantes, ainsi que le grand développement que ce mode de transport a pris en Amérique. Ces locomotives, réduites à de très faibles dimensions, se sont introduites dans certaines mines [1], pour lesquelles elles suppriment les inconvénients du feu en ce qui concerne le grisou, de la fumée, de l'oxyde de carbone. Elles ont, avec les dimensions ordinaires, rendu de grands services dans le percement du Saint-Gothard [2], pour lequel la question de la température avait acquis une importance capitale; les limites de la résistance paraissant alors atteintes pour l'organisme humain. On substituait ainsi, à la chaleur du foyer ou des chevaux, le rafraîchissement dû à la détente de l'air.

Indépendamment de son application à la commande d'un arbre tournant, en vue de divers usages mécaniques, l'air comprimé a souvent été employé à la production *directe* de certains effets spéciaux. Mais je me bornerai à cet égard à une simple énumération. Il sert pour la perforation mécanique des roches [3], pour le bosseyage mécanique par le choc [4], pour l'éclatement des masses pierreuses par la pression [5], pour tenir en respect les eaux souterraines dans le fonçage des puits ou le percement des tunnels [6], pour l'épuisement des travaux de mines [7], pour l'aérage [8], pour l'artillerie [9], etc.

347 — Lorsque la pression devient très élevée, comme dans

[1] Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. I, p. 707. — Appareils exposés par la Société générale des moteurs à air comprimé du système Mékarski, p. 20. Paris, chez Ethiou-Pérou. — Holtzer. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 2e série, t. IX, p. 129. — Chansselle. *Comptes rendus mensuels des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1878, p. 208.

[2] *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série. t. III, p. 23. — Revaux. *Annales des mines*, 7e série, t. XV, p. 416.

[3] Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. I, ch. IX.

[4] *Ibidem*, p. 214.

[5] *Ibidem*, p. 215. — *Génie civil*, t. XI, p. 80. — *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, mars 1887, p. 468. — *Œsterreichische Zeitschrift für Berg-Aünd Hüttenwesen*, 1887.

[6] Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. I, p. 355.

[7] *Ibidem*, t. II, p. 328.

[8] *Ibidem*, p. 494.

[9] *Génie civil*, t. IX, p. 280.

les moteurs Mékarski ([1]), qui emploient l'air fourni par des compresseurs de 30 atmosphères, certains artifices deviennent indispensables. Cet inventeur a introduit, à cet effet, le ***détendeur*** et la *bouillotte*, organes qui sont représentés sur la figure 218.

L'air comprimé ne saurait fonctionner directement dans le cylindre avec une telle chute de pression. La formule (25) fournirait, en effet, pour $\rho = 30$ et $t_2 = 20$, la valeur $t_1 = 109$, d'où $\theta_1 = -164^D$. Bien que ce nombre soit purement théorique, il indiquerait pour la pratique un tel refroidissement, que la marche de l'appareil serait immédiatement entravée par des incrustations de glace. La déperdition de tension doit donc être graduée, et ses effets contrebalancés par un réchauffement dû au passage de l'air à travers une certaine quantité d'eau chaude.

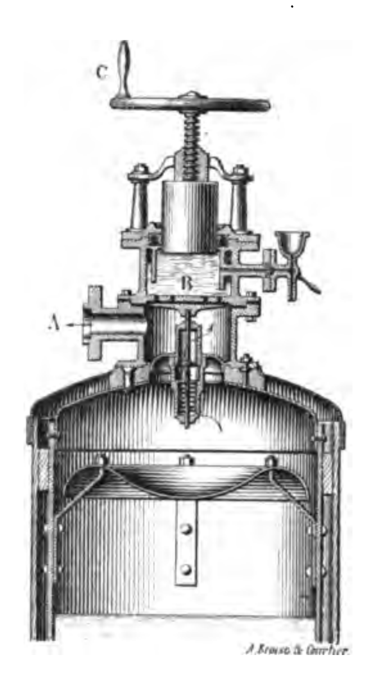


Fig. 218.
Détendeur et bouillotte Mékarski.
(Coupe verticale.)

A cet effet, un réservoir vertical est rempli, sur les deux tiers de sa hauteur, d'eau surchauffée à 170 degrés du thermomètre usuel. On recharge de temps en temps ce récipient, en le mettant momentanément en communication avec une chaudière ordinaire. L'air comprimé parvient dans la partie inférieure, où il est réparti par une crépine. Il traverse le bain liquide, en se chargeant d'humidité, et se rassemble à la partie supérieure. Il s'échappe ensuite par la tubulure A pour se rendre au cylindre. Mais il doit, sur le passage, franchir un orifice variable obturé par un petit piston, lequel est réuni par une tige commune à un

([1]) Machine à air comprimé pour l'exploitation des tramways du système Mékarski. Paris, 1878. — Appareils exposés par la Société générale des moteurs à air comprimé Mékarski, in-8°, Paris, 1878. — Mékarski. *Génie civil*, t. V, p. 273. — Locomotive Mékarski (*Génie civil*, t. IV, p. 58. — *Portefeuille économique des machines*, 1866, p. 106).

contre-piston B. Une pression hydraulique s'exerce sur la tête de ce dernier. On peut la régler à l'aide du volant C. La tension sur les deux faces de B reste sensiblement la même; car cet organe, constitué à l'aide d'une feuille de caoutchouc consolidée par une plaque de bronze, obéit aux variations de la pression différentielle, de manière à diminuer ou à rétablir l'étranglement du passage du gaz. L'air comprimé afflue du reste statiquement sur la surface du liquide qui surmonte le piston B, et contribue à constituer la force élastique qui règne dans cette enceinte.

Pour les appareils moins perfectionnés, on se contente d'envelopper la boîte de distribution d'un courant d'eau tiède [1], ou d'air chaud [2], ou encore d'injecter de l'eau chaude dans le cylindre [3]. On a également employé dans ce but la combustion du pétrole [4], ou l'extinction de la chaux vive par l'eau [5].

348 — On annonce, pour les moteurs à air comprimé, des rendements de 0,40 avec les petites forces, atteignant 0,50 et même 0,65 pour des puissances plus considérables. Toutefois il est bien nécessaire d'établir à cet égard une distinction, sans laquelle certaines confusions pourraient s'introduire dans l'usage.

Les chiffres précédents se rapportent au rendement *immédiat* de l'appareil récepteur envisagé en lui-même. Mais comme il ne saurait être, dans la réalité, disjoint de la machine passive destinée à l'alimenter d'air préalablement amené à la dépression positive ou négative qui constitue pour cet appareil l'agent moteur, non plus que d'une tuyauterie plus ou moins longue destinée à relier ces deux engins, il est clair que le résultat économique *effectif*, qui seul intéresse en définitive l'industriel, résultera de la multiplication des trois coefficients individuels de réduction. On peut fixer ces derniers aux chiffres suivants : 0,75 pour le compresseur, positif ou négatif (nos 337, 338); 0,95 pour la tuyauterie (no 314); 0,60 pour le moteur à air comprimé, en le supposant à dé-

(1) Devillez.
(2) Sommeiller.
(3) Siemens.
(4) Saint-Gothard.
(5) Charbonnages de Grisœil.

tente (n° 353). On obtient ainsi pour la valeur du rendement [1] :

$$0,75 \cdot 0,95 \cdot 0,60 = 0,42.$$

Si, au contraire, le fluide n'agit qu'en pleine pression sur le piston, en effectuant sa détente en pure perte dans l'atmosphère, on fait, de ce chef, une nouvelle perte qui peut être évaluée à moitié environ :

$$0,50 \cdot 0,42 = 0,21.$$

On ne peut donc alors compter, pour le résultat définitif, que sur une utilisation d'un cinquième [2]. C'est peu, assurément, au point de vue mécanique; surtout lorsque nous comparons ce chiffre à ce que nous ont présenté les bons récepteurs hydrauliques. Mais j'ai déjà eu l'occasion de faire remarquer (n° 315) que cette combinaison se recommande beaucoup plutôt par des avantages accessoires très essentiels que par l'économie de travail.

Quant au prix de revient, il est naturellement assez variable [3]. On peut cependant admettre que pour transmettre, à un kilomètre, une force utile d'un cheval, il faut dépenser par heure, tout compris, de $0^f,25$ à $0^f,30$. Sur ce total, $0^f,05$ à $0^f,10$ correspondent à l'intérêt et à l'amortissement des frais de premier établissement, et $0^f,15$ à $0^f,20$ aux salaires, à l'entretien, aux fournitures et aux consommations courantes.

§ 2

THÉORIE

349 — *Marche à détente complète.* — Les coefficients précédents de *rendement pratique* tiennent compte de la part considérable que prennent dans le résultat les frottements, et autres résistances

[1] Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, 1874.

[2] M. Daniel de Leeds a trouvé de 0,25 à 0,45 : M. Graillot, à Blanzy, a obtenu de 0,22 à 0,32 : M. Ribourt, au Saint-Gothard, a recueilli 0,23 de la force hydraulique mise en jeu.

[3] Pernolet. *L'Air comprimé et ses applications*, p. 575.

passives. Mais, pour discuter avec simplicité les circonstances du phénomène, nous écarterons dorénavant ces influences de l'évaluation du *rendement théorique*, que nous allons nous proposer.

Il convient à cet égard de distinguer trois cas [1]. Dans le premier, le plus favorable de tous, la détente est *complète*, c'est-à-dire poussée jusqu'à la pression atmosphérique elle-même ; l'échappement s'effectuant alors sans chute de pression, et seulement en raison du retour du piston. Dans le deuxième, qui est au contraire le plus défavorable, la détente est nulle, la machine marche *à pleine pression*, et l'échappement s'accompagne d'une chute intégrale de pression. Le troisième cas reste intermédiaire entre les deux précédents ; c'est le fonctionnement avec un degré quelconque de détente.

Nous commencerons par la marche à détente complète. L'air est entré dans le compresseur à la pression atmosphérique p_1, et à la température ambiante t_1. Il en sort à la pression demandée $p_2 = p_1\rho > p_1$, et à une température $t_2 > t_1$, que nous avons appris à évaluer (n° 343). En raison des pertes de force élastique et de température qui s'effectuent en route, ces éléments se trouvent respectivement réduits à p' et t', à l'entrée dans le récepteur. A la sortie de ce nouvel appareil, l'on n'a plus que la tension finale $p'' = p_1$, identique à la pression atmosphérique, avec le rapport de pressions $p' = p''\rho' > p''$, et la température finale $t'' < t'$.

Le travail à fournir par le compresseur a pour valeur (42) :

$$T_m = \frac{k}{k-1} R(t_2 - t_1),$$

c'est-à-dire, suivant que l'on met en facteur la plus petite ou la plus grande des deux températures :

$$T_m = \frac{k}{k-1} Rt_1\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right) = \frac{k}{k-1} Rt_2\left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right).$$

[1] Mallard. Étude théorique sur les moteurs à air comprimé. *Bulletin de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1re série, t. XII, p. 615. — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, p. 230.

ou, d'après l'équation (25) :

$$T_m = \frac{k}{k-1} Rt_1 \left(\rho^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) = \frac{k}{k-1} Rt_2 \left[1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Le travail recueilli de la part du moteur sera de son côté :

$$T_u = \frac{k}{k-1} Rt'' \left(\rho'^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) = \frac{k}{k-1} Rt' \left[1 - \left(\frac{1}{\rho'}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Le rendement de l'ensemble aura donc pour valeur :

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{t''}{t_1} \cdot \frac{\rho'^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\rho^{\frac{k-1}{k}} - 1} = \frac{t'}{t_2} \frac{1 - \left(\frac{1}{\rho'}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{k-1}{k}}}.$$

350 — A ces formules *exactes* on peut substituer des expressions *approximatives* plus simples, en se fondant sur ce que, pratiquement, ρ' diffère peu de ρ. En effet, la plus faible des deux pressions est, dans les deux cas, celle de l'atmosphère ; et la plus forte diffère peu de l'un à l'autre, puisque l'écart est dû seulement à la perte de pression dans la tuyauterie, laquelle a été trouvée très faible (n° 314).

Si donc nous confondons ρ' avec ρ, les fractions se simplifient et deviennent :

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{t''}{t_1} = \frac{t'}{t_2}.$$

Le rendement THÉORIQUE *de l'*ENSEMBLE *des deux appareils est ainsi mesuré* SENSIBLEMENT *par le rapport de la température de sortie du moteur à celle d'entrée dans le compresseur, ou de celle d'entrée dans le moteur à la température de sortie du compresseur.*

Le tableau suivant ([1]) donne par sa seconde colonne une idée concrète de ces résultats. Les calculs y sont relatifs à l'hypothèse d'une température ambiante de 20 degrés ($t_1 = 293$).

([1]) Pernolet. *L'Air comprimé et ses applications*, p. 54 et 56.

DEGRÉ DE COMPRESSION — ρ	RENDEMENT $\frac{T_u}{T_m}$	TEMPÉRATURE FINALE DE LA DÉTENTE	
		absolue — t''	usuelle — $t'' - 273$
2	0,82	239,6	— 33,4
3	0,72	213,0	— 60,0
4	0,67	196,0	— 77,0
5	0,63	183,7	— 89,3
6	0,60	174,2	— 98,8
7	0,57	166,6	— 106,4
8	0,55	160,3	— 112,7
9	0,53	154,9	— 118,1
10	0,51	150,1	— 122,9
11	0,50	146,1	— 126,9
12	0,49	142,5	— 130,5
13	0,48	139,2	— 133,8
14	0,47	136,3	— 136,7
15	0,46	133,6	— 139,4

On reconnaît facilement, à l'inspection de cette table, que le rendement diminue à mesure que la pression augmente; mais que cette marche décroissante, d'abord rapide, va en s'atténuant progressivement.

Nous pouvons tirer de la relation précédente :

$$\frac{T_m - T_u}{T_m} = \frac{t_2 - t'}{t_2},$$

et reconnaître ainsi que, *à égalité de compression* (c'est-à-dire pour une même valeur de t_2), *la perte de travail est sensiblement proportionnelle au refroidissement qui s'opère entre les deux appareils.*

On remarquera également qu'*il y a proportionnalité entre les quatre températures absolues de sortie du moteur, d'entrée dans le compresseur, d'entrée dans le moteur, et de sortie du compres-*

seur. Or, tandis que la perte de pression dans la tuyauterie est très faible, on peut admettre, au contraire, que le refroidissement dû au séjour dans le réservoir et au parcours dans les conduites est aussi complet que possible. Le thermomètre retombera donc de t_2 à la température ambiante [1], de telle sorte que t' se confond avec t_1. Dans ces conditions, *la température ambiante absolue forme sensiblement la moyenne géométrique entre celles de sortie des deux appareils*.

Il résulte de là deux conséquences. D'une part, on voit que, t' étant donné, il ne reste plus d'autre moyen d'améliorer le rendement $\frac{T_s}{T_m}$ que de diminuer t_2, c'est-à-dire de *marcher à basse pression*. Seulement on comprend dès lors que, pour réaliser une puissance déterminée, les machines deviendront d'autant plus encombrantes.

En second lieu, on reconnaît que, pour peu que la machine fonctionne à des pressions élevées, la détente dans le moteur réalisera d'énormes refroidissements; t'' s'abaissant alors outre mesure. En effet, nous avons vu (n° 344) avec quelle rapidité s'accroît alors la température t_2 de compression; et en même temps la moyenne géométrique t_1 (ou t'), de t_2 et de t'' doit rester fixe. Le tableau précédent le montre d'ailleurs avec évidence par sa quatrième colonne, et l'on comprend combien il est difficile dans ces conditions d'éviter la formation de la glace. On peut, à la vérité, trouver une ressource à cet égard dans le fonctionnement de la détente à l'intérieur de plusieurs cylindres successifs, ainsi qu'il a été déjà expliqué (n° 344) pour le phénomène inverse. Mais, la plupart du temps, on préfère l'emploi des moyens pratiques que nous avons énumérés ci-dessus (n° 347).

351 — *Marche à pleine pression*. — Envisageons en second lieu la marche sans détente, en marquant par l'indice zéro les éléments relatifs à ce cas. On débute avec la pression p'_0 et la température absolue t'_0; le kilogramme d'air occupant alors le volume

[1] Parfois même plus bas, s'il s'agit de transmettre la force de l'extérieur dans une mine fraîche.

spécifique $\frac{Rt'_0}{p'_0}$. Pendant toute la marche à pleine pression, on doit vaincre la pression atmosphérique p''_0; après quoi l'air s'échappe du cylindre, et retombe brusquement à cette pression p''_0, en prenant une température t''_0.

Nous savons (3) que le travail de la pleine pression est le produit de la pression effective $p'_0 - p''_0$ par le volume engendré. Celui-ci est d'ailleurs le volume total du cylindre, dans lequel nous continuons à supposer que se trouve exactement renfermé le kilogramme d'air. Le second facteur sera donc le volume spécifique, ce qui donne :

$$T_u = \frac{Rt'_0}{p'_0}(p'_0 - p''_0) = Rt'_0\left(1 - \frac{p''_0}{p'_0}\right) = Rt'_0\left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

Pour connaître la température finale t''_0 de l'échappement à travail incomplet, nous possédons l'équation de la page 429, qui devient, avec les notations actuelles :

$$\frac{t''_0}{t'_0} = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\,\frac{1}{\rho_0},$$

ou, en effectuant :

$$\frac{t''_0}{t'_0} = 0,70922 + \frac{0,29078}{\rho_0}.$$

352 — Les valeurs successives de ce rapport de températures absolues se trouvent consignées dans la deuxième colonne du tableau suivant [1] :

[1] Pernolet. *L'Air comprimé et ses applications*, p. 61.

DEGRÉ DE COMPRESSION — p_0	RAPPORT DE TEMPÉRATURES — $\frac{t_0''}{t_0'}$	TEMPÉRATURE USUELLE D'ÉCHAPPEMENT — $t_0'' - 273$	RENDEMENT DE LA MARCHE à pleine pression	RAPPORT DES RENDEMENTS à pleine pression et à détente complète
2	0,855	— 22,4	0,65	0,79
3	0,806	— 36,9	0,51	0,71
4	0,782	— 43,2	0,44	0,65
5	0,768	— 48,0	0,39	0,62
6	0,758	— 51,0	0,36	0,60
7	0,751	— 53,0	0,33	0,58
8	0,746	— 54,5	0,31	0,56
9	0,742	— 55,6	0,29	0,55
10	0,739	— 56,5	0,27	0,54
11	0,736	— 57,4	0,26	0,53
12	0,734	— 58,0	0,25	0,52
13	0,732	— 58,6	0,24	0,51
14	0,730	— 59,9	0,24	0,50
15	0,729	— 59,5	0,24	0,50

La troisième colonne suppose une température ambiante de 20 degrés ($t'_0 = 293$), et fournit alors les valeurs de la température finale usuelle $t''_0 - 273$. La quatrième fait connaître le rendement théorique. Enfin la cinquième est destinée à faciliter la comparaison des deux modes d'action, en présentant le rapport des rendements relatifs à la pleine pression et à la détente complète.

On reconnaît facilement que la diminution d'efficacité est surtout sensible avec les pressions élevées. Quant à la température d'échappement, si on la compare à celle qui est fournie par la quatrième colonne du premier tableau (p. 548), l'on voit qu'elle subit un abaissement beaucoup moindre. Néanmoins la valeur reste encore tellement inférieure à celle de la glace fondante que, sous ce rapport, l'avantage reste sans résultat pratique.

353 — *Marche à détente partielle.* — La marche avec détente

partielle constitue un intermédiaire entre les deux modes précédents.

Nous désignerons par τ_1 la température absolue initiale. Elle tombe à τ_2 avec un rapport de pression ρ_2, puis elle achève de s'abaisser à τ_3 dans l'échappement, avec une seconde chute de pression ρ_3. Les deux premières températures sont reliées par l'équation (25) :

$$\tau_2 = \tau_1 \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

qui représente la détente adiabatique; et les deux dernières par celle qui a été établie ci-dessus pour la théorie de l'échappement (p. 550) :

$$\tau_3 = \tau_2 \left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\frac{1}{\rho_3}\right).$$

On a d'ailleurs pour le travail total (éq. 42) :

$$T_u = \frac{k}{k-1} R (\tau_1 - \tau_3),$$

c'est-à-dire :

$$T_u = \frac{k}{k-1} R\tau_1 \left[1 - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\frac{1}{\rho_3}\right)\right],$$

ou, en effectuant :

$$T_u = 100{,}7 \,.\, \tau_1 \left[1 - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{0{,}29} \left(0{,}71 + \frac{0{,}29}{\rho_3}\right)\right].$$

Telle est la formule la plus générale du travail que l'on peut théoriquement retirer d'un moteur à air comprimé [1].

[1] On remarquera que cet air est supposé parfaitement sec. Dans la réalité, la présence de la vapeur d'eau exige certaines corrections qui ont été envisagées par M. Mallard dans son excellent mémoire déjà cité, mais dont l'examen nous entraînerait ici trop loin.

354 — Avec une machine à détente complète, on eût obtenu la quantité de travail suivante :

$$\frac{k}{k-1} R\tau_1 \left[(\rho_2\rho_3)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right].$$

Le rapport des deux coefficients économiques sera d'après cela :

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\frac{1}{\rho_3}\right)}{(\rho_2\rho_3)^{\frac{k-1}{k}} - 1},$$

ou, en effectuant :

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{0,29} \left(0,71 + \frac{0,29}{\rho_3}\right)}{(\rho_2\rho_3)^{0,29} - 1}.$$

Supposons, par exemple, de l'air à 10 atmosphères, que l'on détend à 5. Nous devrons prendre :

$$\rho_2 = 2, \qquad \rho_3 = 5,$$

et le rapport deviendra 0,945. On ne perd donc alors qu'environ 5 %, quantité peu importante.

Cet exemple suffit à montrer qu'il y a peu d'intérêt, au point de vue du rendement, à s'approcher beaucoup de la détente complète. On trouve en outre cet avantage à s'en tenir éloigné, qu'un échappement d'une certaine violence aura pour résultat d'entraîner les particules de glace qui tendent à encombrer les conduits d'évacuation.

CHAPITRE XXI

MOTEURS ÉOLIENS

—

§ 1

FORCE DU VENT

355 — L'emploi de la force du vent semble remonter en Orient à une haute antiquité. On croit qu'il a été rapporté en Europe par les croisés à la fin du onzième siècle (1). Cette application se recommande par son caractère entièrement gratuit. Mais elle se refuse malheureusement, dans nos climats, à tout régime régulier. Les chômages y durent environ deux fois plus de temps que la marche utile.

Un moyen assez simple d'uniformiser cette action, quand on opère sur une échelle un peu importante, consiste à employer les *moulins à vent* pour élever de l'eau, comprimer de l'air, ou développer de l'électricité (2). On dépense ensuite à volonté ces nouveaux agents moteurs, soit sur place, soit après un transport à une certaine distance, au moyen de récepteurs appropriés (3). Une telle superposition de deux fonctionnements ne saurait, il est vrai, être considérée comme économique; mais cette objection perd

(1) Le *Dictionnaire des origines* signale une convention de l'année 1105, mentionnant certains *moulins Turquois* mus par le vent (Tissandier. *La Nature*, 20 janvier 1880).
(2) Emploi des moulins à vent pour la génération de l'électricité. *Lumière électrique*, t. XXIV, p. 445; t. XXVII, p. 396.
(3) On a même élevé, de cette manière, du sable fin qu'on laissait ensuite couler sur une roue à palettes (*Annales industrielles*, 1884, t. I, p. 614).

beaucoup de sa valeur dans le cas actuel, où la puissance disponible est complètement gratuite. Il existe d'ailleurs de nombreuses applications, telles que des épuisements, par exemple, qui comportent sans inconvénient une assez grande irrégularité. En Hollande, on en a entrepris de gigantesques dans ces conditions. Aux États-Unis, les moulins à vent se comptent par centaines de mille.

Non seulement la vitesse du vent change très souvent de valeur, mais sa direction est également très variable. Ce n'est pas ici le lieu d'indiquer les lois générales que la météorologie a su y reconnaître, en ce qui concerne les alizés, la rotation des vents, etc. Elles auraient peu d'intérêt pour la question. Il suffit de dire que l'appareil doit pouvoir *s'orienter dans le vent*, soit à la main, soit par l'action de girouettes, ou d'organes plus perfectionnés que nous ferons connaître.

La vitesse du vent est ordinairement plongeante, et forme avec l'horizon un angle de 8 à 15 degrés. Aussi l'axe des anciens moulins à vent est-il lui-même incliné de cette manière. Cependant cette opinion a été contestée ; et les appareils plus modernes s'installent autour d'un axe horizontal. Les auteurs qui partagent cette dernière manière de voir, attribuent la pratique constante des anciens constructeurs à l'utilité de faire émerger la roue, dans sa partie inférieure, hors de la proue fluide stagnante qui se forme en avant de la tour, lorsque le vent vient se fendre au-devant de cet obstacle, pour passer d'un côté et de l'autre. Un arbre horizontal placerait la rotation dans un plan vertical tangent au cylindre; et les ailes recevraient alors des alternatives d'action très fâcheuses de la part du courant aérien, quand elles viendraient s'y replonger à chaque tour, en sortant de la masse stagnante. Les nouveaux appareils à axe horizontal sont montés, non plus sur des tours massives, mais sur de simples mâts qui ne créent plus, comme ces dernières, un obstacle pour le fleuve atmosphérique.

356 — Quant à la *force* du vent, on la mesure d'après le nombre de kilogrammes que supporte une surface plane d'un mètre carré, opposée perpendiculairement à sa direction [1]. Elle est

(1) M. Fines vient d'imaginer un manomètre à maxima, destiné à fournir une mesure

directement fonction de la vitesse du courant, que nous désignerons constamment par u. Il existe des dénominations un peu vagues, mais graduées cependant d'après un usage assez constant, qui servent à désigner la croissance de cette rapidité. Le tableau suivant ([1]) présente, en regard de la vitesse exprimée en mètres par secondes, la pression du vent par mètre carré, comptée en kilogrammes.

VENTS		VITESSE par SECONDE — Mètres	PRESSION par MÈTRE CARRÉ — Kilogrammes
Vent à peine sensible		1	0,14
Brise légère		2	0,54
Vent frais, brise		4	2,17
Vent bon frais	tend bien les voiles	6	4,87
	le plus convenable pour les moulins	7	6,64
	forte brise	8	8,67
	convenable pour la marche en mer	9	10,97
Vent grand frais	très forte brise	10	13,54
	fait serrer les hautes voiles	12	19,50
Vent très fort		15	30,47
Vent impétueux		20	54,16
Tempête		24	78,00
Tempête violente		30	122,28
Ouragan		36	176,96
Grand ouragan		45	277,87

Les *tornados* présentent des chiffres encore supérieurs. A Syd-

exacte de l'effort exercé par les vents les plus violents (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 31 mai 1887).

([1]) Claudel. *Formules, tables et renseignements usuels*, partie pratique, p. 332. — Delaunay. *Cours élémentaire de mécanique*, 1851, p. 462. — *Bulletin aéronautique*, décembre 1874, p. 351. — Collingwood. An Examination into the Method of determining Wind Pressures. *American Society of civil Engineers*, 6 avril 1881. — Stevenson. Experiments, etc. *Journal of the Scottish meteorological Society*, 1880. — Wolf. *American Society of mechanical Engineers*, 21 avril 1882. — *Engineering*, 23 septembre 1876; 14 janvier 1881. — *Journal of Franklin Institute*, juillet 1882, p. 22. — Guidi. De l'action du vent sur les arcs de toiture. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, t. XIX, p. 373.

ney, le 10 septembre 1876, on a observé [1], d'une manière soutenue pendant 12 minutes, une vitesse de 50 mètres, et, par rafales, celle de 68 mètres. La première produisait un effort de 300 kilogrammes, et cette dernière 485 kilogrammes par mètre carré [2].

On comprend facilement, d'après cela, l'intensité des ravages qui sont occasionnés par de tels cataclysmes. Aussi devient-il nécessaire d'*enverguer* les toiles des moulins à vent, quand la vitesse de l'air dépasse un chiffre, même assez peu élevé. Cette opération présente évidemment le grand inconvénient de supprimer la récolte d'énergie, au moment même où elle pourrait devenir plus fructueuse. De plus, elle n'est pas sans danger pour l'homme qui est chargé de l'exécuter. On s'est préoccupé, dans des appareils récents, de la remplacer par des manœuvres automatiques [3].

On a essayé de représenter par une formule la variation de la force du vent en fonction de sa vitesse; mais les résultats qui ont été mis en avant sont aussi peu concordants que possible. M. Goupil [4] a proposé la formule :

$$0,065\, u^2,$$

laquelle donne des résultats très inférieurs à ceux qui sont inscrits dans le tableau précédent. La suivante [5] :

$$0,113\, u^2,$$

(1) *Bulletin de l'Association scientifique de France*, n° 477, p. 189.

(2) L'anémomètre enregistreur de Robinson installé au collège Romain a indiqué la vitesse de $2^m,28$ comme moyenne de quinze années d'observations (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXIII, p. 1271).

(3) Indépendamment des corps mobiles, tels que les moteurs éoliens ou les trains à vapeur (Renversement de trains de chemin de fer par le vent. *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, 1868, p. 92; 1887, p. 642), l'action des courants aériens doit préoccuper pour la stabilité des édifices. M. Shales Smith (*Revue industrielle*, 1881, p. 168) admet, pour les projets de viaducs, un effort de 158 kilogrammes, ce qui paraît insuffisant. M. Nordling adopte le chiffre de 275 kilogrammes (*Comptes rendus mensuels des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1887, p. 135). La Commission du Board of Trade a inscrit l'effort maximum de $273^{kg},43$. M. Eiffel (*Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, janvier 1885, p. 53) a employé, pour le projet de la tour de 300 mètres, une moyenne générale de 300 kilogrammes pour la pression, qu'il considère comme variant entre 200 et 400 kilogrammes depuis la base jusqu'au sommet.

(4) *Bulletin de la Société des anciens Élèves des Écoles d'Arts et Métiers*, juillet 1885.

(5) *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences*, Congrès de Grenoble, p. 101. — W. Ferrel. *American meteorological Journal*, août 1887.

en approche beaucoup plus, tout en restant encore un peu au-dessous. La formule du *Board of Trade :*

$$0{,}25\, u^2,$$

qui se recommande à la vérité par sa simplicité, si on la met sous la forme :

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2,$$

donne, au contraire, des nombres beaucoup trop forts.

§ 2

MOTEURS ÉOLIENS. — DESCRIPTION

357 — *Moulins à vent.* — Les moteurs éoliens se rangent en deux catégories, suivant que leur axe de rotation est horizontal (ou du moins peu incliné), ou bien qu'il est vertical. Les premiers portent le nom de ***moulins à vent*** ; ces derniers celui de ***panémones***.

Le moulin à vent [1] de l'ancien type s'installe au moyen d'une tour en charpente montée sur un pivot, autour duquel on lui im-

[1] Smeaton. *De la construction et des effets des moulins à vent.* Traduction de Girard. — Goupil. Étude sur les moulins à vent. *Bulletin de la Société des anciens Élèves des Écoles d'Arts et Métiers*, juillet 1885. — Coulomb (Observations sur l'effet des moulins à vent et la forme de leurs ailes. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1781. — *Traité des machines simples*, p. 298). — Hachette. *Traité des machines*, p. 225. — De Coriolis. *Calcul de l'effet des machines*, in-4°, p. 210. — *Dictionnaire des arts et manufactures*, au mot *Moulin à vent.* — Hallenberg. *Les nouvelles roues dites moulins à vent américains*, Leipsick, 1886. — Wolf. *Le Moulin à vent comme premier moteur*, New-York, 1886. — Moulins à vent aux États-Unis. *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, novembre 1884, p. 514: — Dulos. *Cours de mécanique*, 3° partie. — D'Alembert. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides.* — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur.* Traduction de Richard, p. 227. — Euler. De constructione molarum alatarum. *Nouveaux commentaires de Saint-Pétersbourg*, t. IV, 1752. — *Theatrum machinarum novum*, Varsovie. Très ancien ouvrage. — Agostino Cavellero. *Le macchine a vapore.* — Appleton. *Cyclopedia of mechanics*, 1880. Article *Windmill.* — Fairbairn. *Mills and Millwork.* — *Engineering and mining journal*, 7 octobre 1876. — *Journal of Franklin Institute*, juillet 1882. — Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. I, p. 775.

prime au besoin un mouvement de rotation à l'aide d'une longue barre, pour orienter le récepteur dans le vent (fig. 219). A cet effet, des piquets sont plantés en cercle autour de la tour. Le meunier

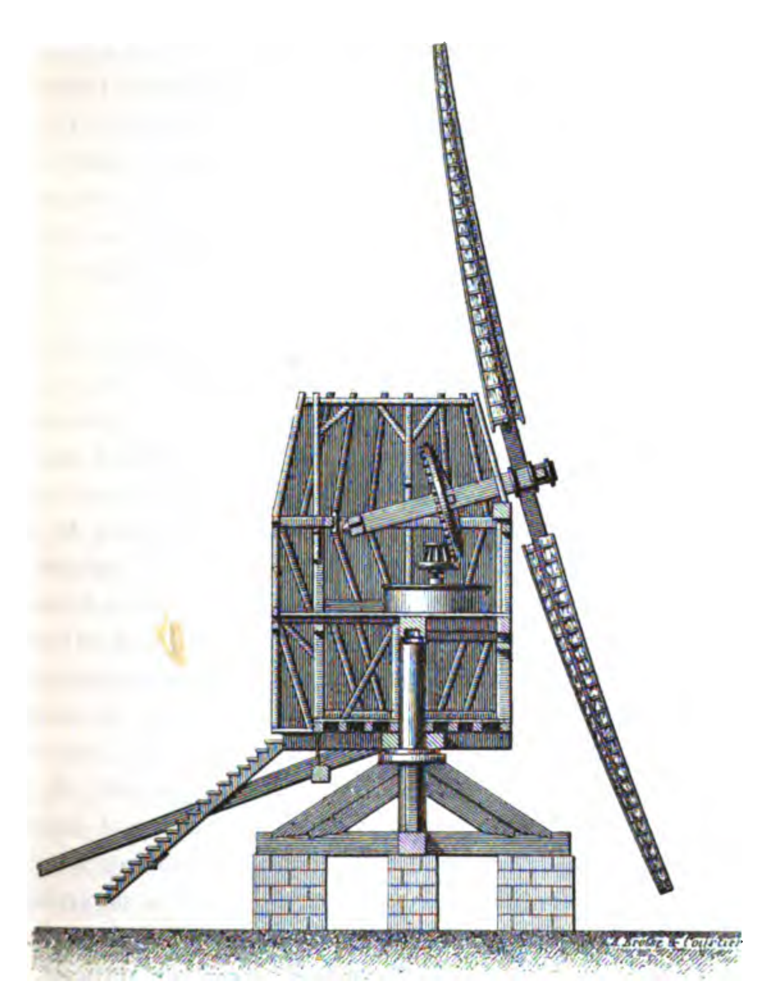


Fig. 219. — Moulin à vent (coupe verticale).

amarre à l'un d'eux un cabestan portatif, à l'aide duquel il agit pour déterminer la rotation. Souvent le secours d'un cheval est, pour cela, nécessaire. Dans d'autres cas, la tour est fixe et construite en maçonnerie. La toiture en forme de poivrière qui la surmonte

tourne seule sur son sommet, en roulant circulairement sur une couronne de galets. Les anciennes tours mobiles en charpente deviennent aujourd'hui d'un prix excessif, en raison du renchérissement des grosses pièces dont elles exigent l'emploi.

Un arbre carré en bois, très court, de $0^m,50$ à $0^m,60$ d'équarrissage, relie la roue extérieure avec le mécanisme situé à l'intérieur de la tour. Cet axe, ainsi qu'il a été dit plus haut (nº 341), est incliné de 8 à 15 degrés sur l'horizon. Il actionne, à l'aide d'une roue d'angle à lanterne, le mécanisme du moulin qui est groupé autour de l'axe vertical de la tour, et qu'il n'y a pas lieu de décrire ici. Tout cet outillage est massif, lourd, et consomme beaucoup de travail pour surmonter les frottements.

A son extrémité, l'arbre porte quatre bras rectangulaires [1], d'une douzaine de mètres de longueur, et de $0^m,20$ à $0^m,30$ d'équarrissage. A deux mètres de distance de l'axe, on commence à implanter, dans le corps de ces longrines, des chevilles ou *lattes* de 2 mètres de longueur (1 mètre de chaque côté), en laissant entre elles un espacement de $0^m,40$. L'angle qu'elles font avec le plan déterminé par les quatre bras de la roue est très variable. Il commence par une valeur de 30 degrés environ, pour se terminer à 6 ou 12 degrés, suivant le plus ou moins d'inclinaison de l'arbre moteur. La loi qui doit présider à cette variation, en vue de réaliser le maximum d'effet utile, est parfaitement déterminée. Sa recherche fera l'objet du paragraphe 3. Les extrémités des lattes sont assujetties ensemble par des longrines à double courbure; et, sur cet ensemble, on applique la toile, ou *voile*, destinée à recevoir l'impression du vent. Lorsque celui-ci devient trop fort, on serre les voiles, en les carguant le long du bras. Pour cela, on arrête la rotation à l'aide d'un frein énergique, et l'on maintient, l'une après l'autre, chacune des ailes dans une position verticale. Le meunier y monte alors comme à une échelle. Cette manœuvre, longue et périlleuse, ne permet que difficilement de *prendre des*

[1] En Asie, dans les plaines de Murcie, et avec les nouveaux modèles répandus en France dont nous parlerons plus loin, on voit des moulins de 6, de 8, de 12 ailes. Parfois le récepteur affecte la forme générale d'un disque circulaire complet. Dans certains types, les ailes, au lieu de présenter grossièrement la forme d'un rectangle gauche, se rapprochent de celle d'un triangle.

ris, pour obtenir une gradation intermédiaire suivant la force du vent. On a reconnu, en ce qui concerne cette réglementation, que l'allure la plus favorable est celle pour laquelle le nombre de tours par minute est double de la vitesse du vent exprimée en mètres par seconde ([1]).

358 — M. Berton a cherché à éviter l'inconvénient dont il vient d'être question, en employant, au lieu de toiles, un système de lattes plates, ou *louvres*, analogues à celles des *jalousies*. Un mécanisme spécial permet de les aplatir progressivement à volonté, de manière à constituer une surface complètement pleine, ou plus ou moins directement perméable, suivant le degré de violence du vent. Seulement on se voit alors forcé de renoncer, par l'emploi de la forme plane, au bénéfice que fournit, au point de vue de l'effet utile, la surface gauche indiquée par la théorie ([2]).

Pour éviter les longueurs et les dangers des manœuvres dans les *sautes de vent*, on a imaginé divers moulins qui s'orientent d'eux-mêmes. Je citerai d'abord, dans cette catégorie, le *pantanémone* de M. Sanderson ([3]). Cet appareil qui a la forme d'une vis, est muni d'une grande *girouette*, ou *gouvernail*, qui se place spontanément dans la direction du vent, en disposant, par cela même, le récepteur de manière à recevoir le *vent debout*.

Un autre type plus récent (fig. 220), du même inventeur, conserve un axe fixe, tout en fonctionnant avec presque tous les *rumbs de vent*, sauf pour une direction tout à fait voisine de la perpendiculaire. Il porte, à cet effet, deux grandes palettes hémi-circulaires montées à 45 et à 135 degrés.

Le moulin de Smith ([4]) présente la forme des hélices propulsives de navire, que l'on dispose dans l'axe du vent (fig. 221).

([1]) Cette règle concorde bien avec la valeur que nous donnerons plus loin pour α (n° 369).

([2]) Delaunay. *Cours élémentaire de mécanique*, 1851, p. 606.

([3]) Haton de la Goupillière. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale*, 2e série, t. XVII, p. 492. — *Journal d'agriculture pratique*, 31 mars 1870, p. 437. — Armengaud. *Publication industrielle*, 2e série, t. X, p. 111, pl. 11. — *Rapport de MM. Humblot et Couronne au Conseil municipal de Paris*, 1878. — *La Nature*, 18 avril 1884.

([4]) *Scientific American*, 3 mars 1883, p. 130.

Cette cambrure est encore plus accusée dans la *turbine atmosphérique* de M. A. Dumont (¹), dont les spires, en forme de *conque* (fig. 222, 223, 224), participent, par leur profil générateur, des

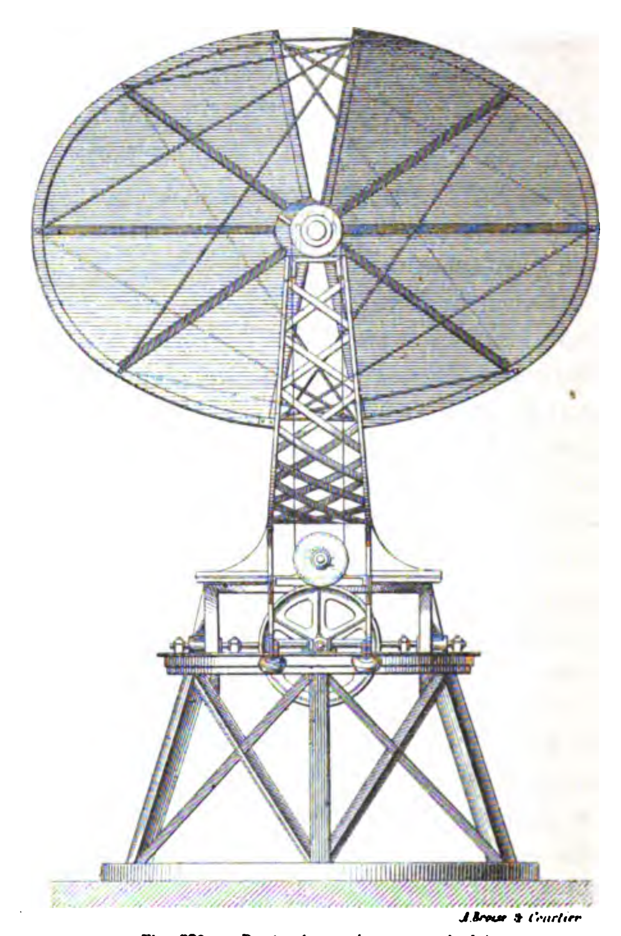


Fig. 220. — Pantanémone (coupe verticale).

formes de l'épicycloïde ou de la développante de cercle, et présentent un ensemble élégant pour la décoration des jardins.

Le moulin *l'Eclipse* de M. Corcoran (²) s'oriente également de lui-

(¹) *Revue industrielle*, 23 mai 1883, p. 209. — *La Nature*, 23 février 1884, p. 195.

(²) Construit par M. Beaume (De Graffigny. *Les moteurs anciens et modernes*, p. 25. — James Hill. *Scientific American supplement*, 19 juillet 1884, p. 7112. — *Le Technologiste*, mai 1887).

même, mais d'une manière encore plus parfaite ; car, au lieu de se placer invariablement en face du vent, il se dispose sous l'angle le plus favorable, en raison des actions combinées qui sont exer-

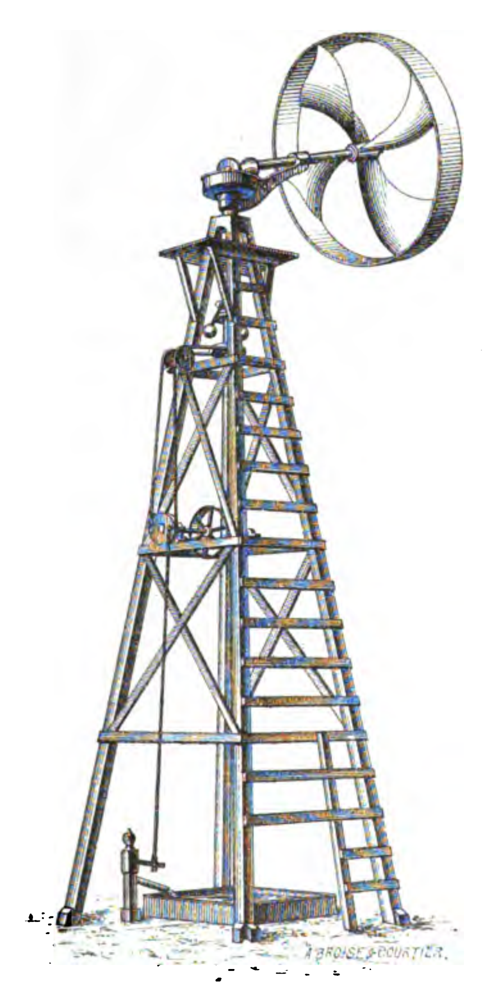


Fig. 221. — Moulin à vent de Smith (vue perspective).

cées sur le moteur et sur une aile latérale ; s'effaçant d'ailleurs complètement lorsque le vent souffle en tempête, et risquerait de détruire l'appareil, si celui-ci se présentait autrement que par sa tranche. Ce moulin porte six bras, et forme même quelquefois un disque circulaire complet, constitué par des lames obliques qui se

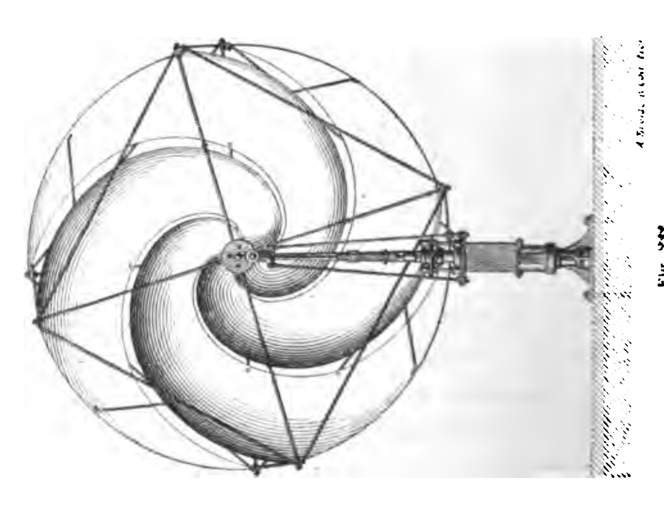


Fig. 222.
Turbine atmosphérique Dumont.
(Coupe verticale.)

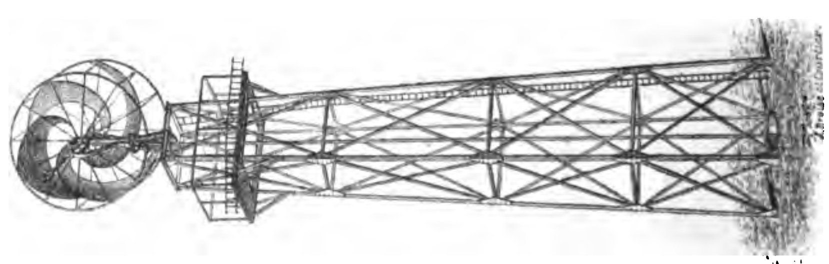


Fig. 223.
Turbine atmosphérique Dumont
(Vue perspective.)

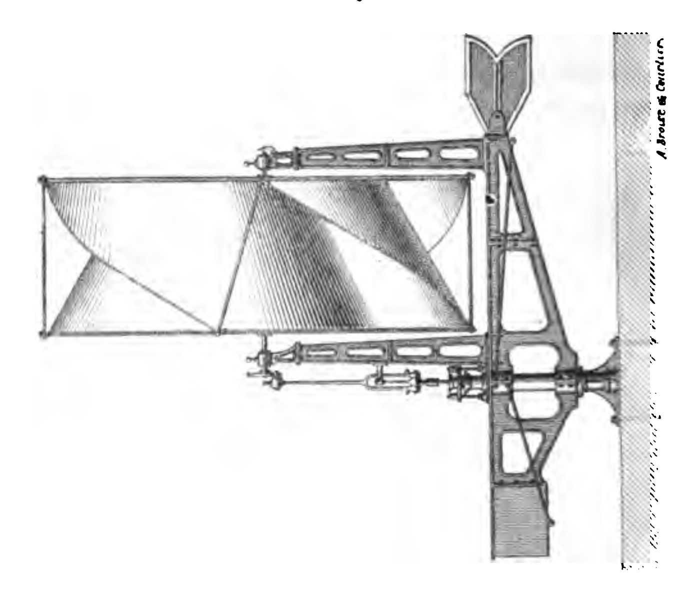


Fig. 224.
Turbine atmosphérique Dumont.
(Élévation latérale.)

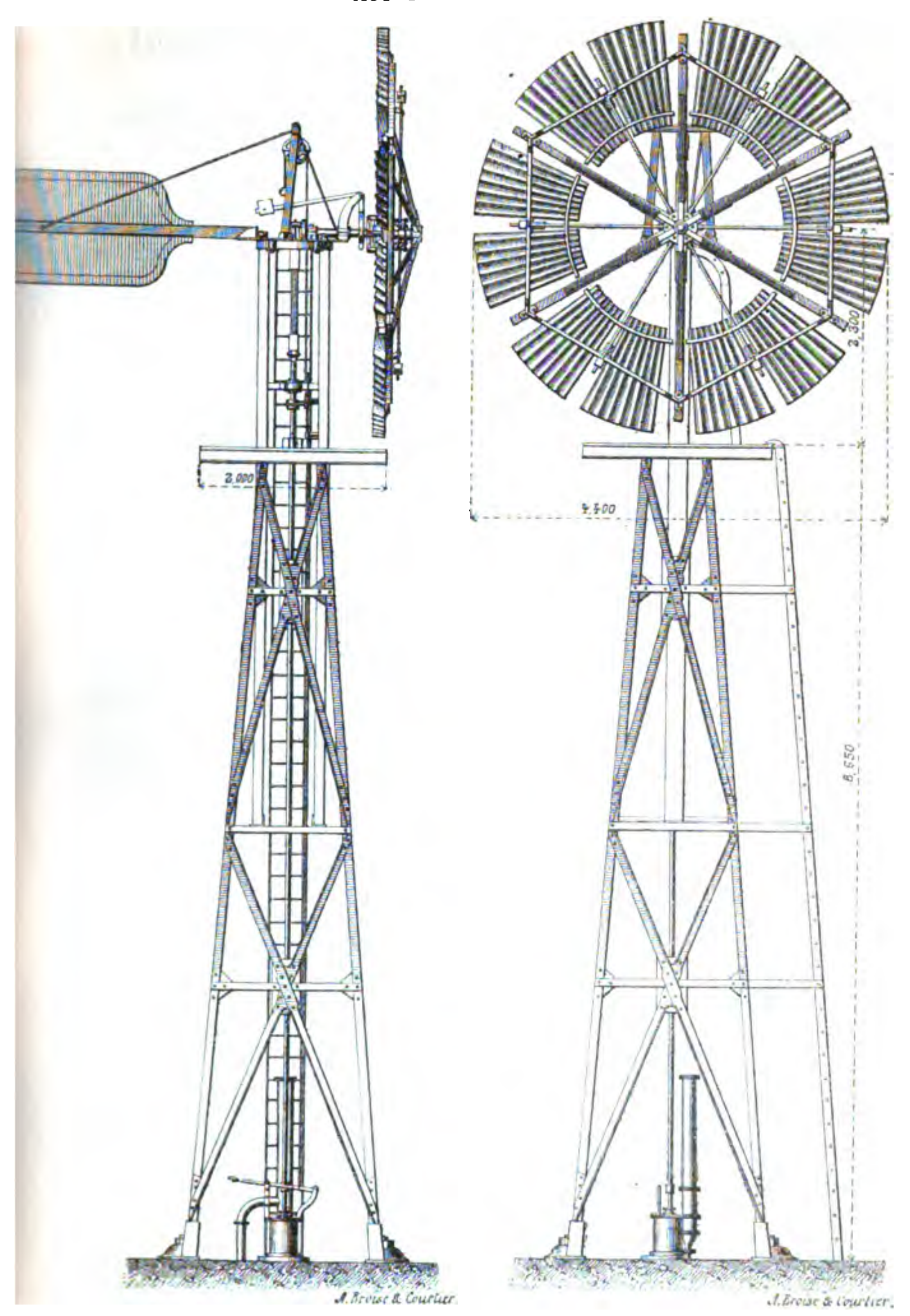


Fig. 225. — Moulin à vent Halladay.
(Élévation latérale.)

Fig. 226. — Moulin à vent Halladay.
(Élévation antérieure.)

recouvrent en projection, tout en laissant tamiser le courant d'air à travers leurs intervalles.

Le moulin à vent Halladay (¹) présente douze ailes groupées en

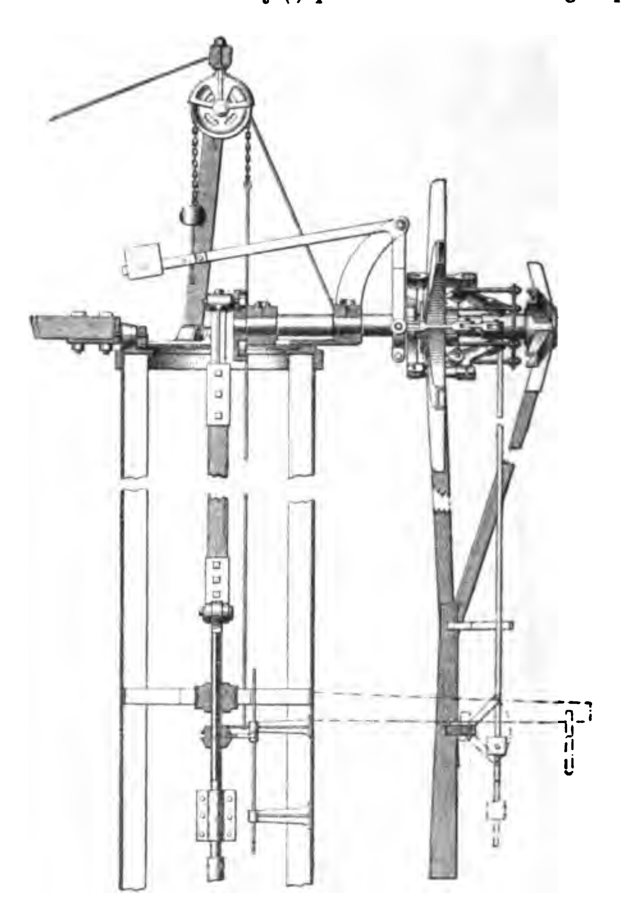


Fig. 227. — Moulin à vent Halladay (détail du mécanisme régulateur).

couronne (fig. 225 et 226). Sur l'arbre, se trouve claveté un tourteau en fonte, dont les rayons reçoivent les bras des ailes. Cette ossature est complétée par des jambes de force. Les bras sont en

(¹) Construit par M. Schabaver à Castres (*Annales industrielles*, 1884, t. I, p. 208. — *Portefeuille économique des machines*, 1886, p. 68. — Armengaud. *Publication industrielle*, 2ᵉ série, t. X, p. 111. — *Bulletin de la Société des anciens Élèves des Écoles d'Arts et métiers*, avril 1885. — Uhland. *Berechnung und Construction der Motoren*, etc. Leipzig, 1886, p. 135).

outre contreventés par des entretoises, qui dessinent le périmètre d'un hexagone régulier. Un mécanisme régulateur (fig. 227) permet de réaliser des obliquités variables suivant le degré d'impétuosité du vent. Ce mode d'action est fondé sur les alternatives que subit la force centrifuge d'un contrepoids que l'on fait tourner avec le mécanisme.

Je citerai encore, comme un appareil très soigné, l'*éolienne* de M. Bollée, du Mans ([1]). En avant du récepteur proprement dit (fig. 228), se trouve un distributeur analogue à celui de la turbine Fontaine (n° 190), mais disposé dans un plan vertical. Cet organe s'oriente avec la roue mobile elle-même; seulement il ne tourne pas comme elle dans son propre plan. Il est formé de contre-aubes directrices qui divisent le courant, et conduisent ses diverses branches sur les aubes du récepteur. Pour orienter ce

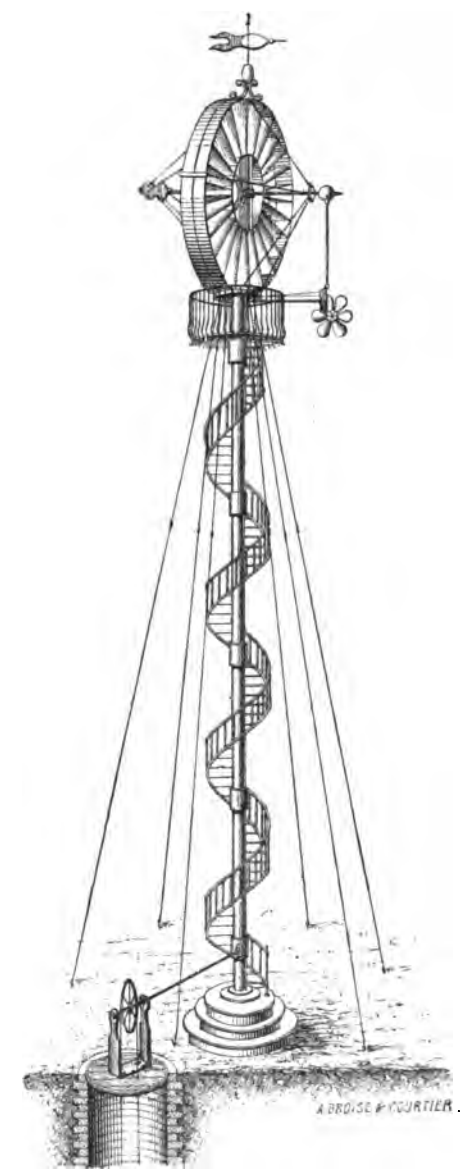


Fig. 228. — Turbine éolienne de Bollée. (Vue perspective.)

([1]) Haton de la Goupillière. Revue des progrès récents de l'Exploitation des mines et de la construction des machines à vapeur. *Annales des mines*, 7e série, t. XVI, p. 197.

système, on le monte sur un chariot, dont une crémaillère circulaire permet le pivotement autour d'un axe vertical. Une petite turbine excentrée, rappelant le *papillon* d'anciens moteurs hollandais, est assemblée dans un plan perpendiculaire à celui de la turbine. Tant que celle-ci n'est pas orientée exactement en face du courant d'air, le papillon n'a pas son propre plan placé dans le vent. Il en subit donc l'action, et tourne sur lui-même. Or cette gyration commande un pignon denté qui engrène avec la crémaillère circulaire. Tout l'ensemble se trouve ainsi forcé de se déplacer, jusqu'à ce que l'orientation devienne précise. A ce moment, la rotation du papillon cessant d'elle-même, la roue s'arrête dans cette situation pour y effectuer son fonctionnement moteur. Ajoutons toutefois que l'effet n'est pas tout à fait aussi simple que nous venons de le décrire. Pour se garantir contre les rafales trop brisantes, on présente le récepteur au vent, non pas constamment dans un plan perpendiculaire, mais sous un angle que l'on gradue d'après l'état du temps. Un petit *pèse-vent* très ingénieux permet d'obtenir ce résultat. Il est disposé de manière à effacer complètement l'appareil devant un ouragan.

859 — Je terminerai ces indications [1] en rappelant l'attention sur un moulin à vent, un peu oublié aujourd'hui, quoique bien à tort, et qui avait été établi avec un soin extrême, en 1830, par Amédée Durand [2]. On a comparé, à juste titre, cet appareil à un corps organisé qui accomplit de lui-même toutes ses fonctions, tant ces dernières ont été exactement prévues par l'inventeur.

[1] On peut citer encore les moulins à vent Arastra, Aubry, Bernard, Bowlus, Cubbit, d'Épinay-Préhamont, Fustin, Hopkins, Huré, Jouanne, Lepaute, Marchand, Warner, United States Windmill Company, etc.

Hirsch. Les machines et les appareils de la mécanique générale. *Rapports sur l'Exposition universelle de* 1878, Groupe VI, Classe 54, p. 402. — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 234. — *Annales industrielles*, 1884, t. I, p. 614. — *Revue industrielle*, 23 mai 1883. — *Engineering news*, 7 avril 1883. — Joseph Stubbs. Doubling winding frame. *Scientific American supplement*, 13 août 1887, p. 9675.

[2] Amédée Durand (*Notice sur un moulin à vent self-acting*, 1836. — Description d'un moulin à vent. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale*, 1830, p. 153). — Rapport de Francœur, *ibidem*, 1829, p. 411. — *Dictionnaire des arts et manufactures*, au mot *Moulin à vent*.

La tour est complètement supprimée (fig. 229 et 230), et, avec elle, la proue stagnante à laquelle elle donne naissance. L'axe devient horizontal. Toute la machine se monte sur un mât très élevé, dont le sommet peut facilement dépasser la cime des arbres. Ce montant est assujetti par des haubans en fer, amarrés à des massifs de maçonnerie qui sont noyés dans le sol. Une échelle de perroquet s'y trouve appliquée, pour permettre la visite de l'appareil. Le long du mât, se trouve également disposé l'arbre tournant, qu'une roue d'angle commande à sa partie supérieure. Le système

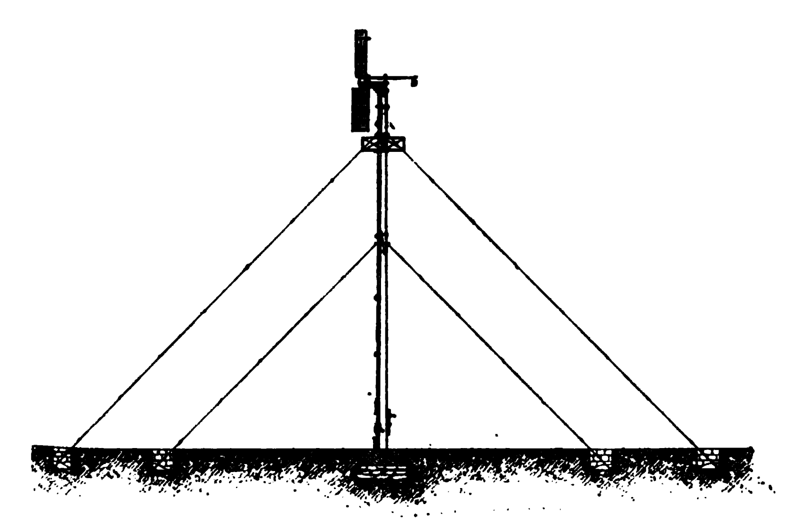


Fig. 229. — Moulin à vent Amédée Durand (vue d'ensemble).

reçoit le vent à l'arrière, et s'oriente seul sous son action. On n'a plus à carguer les voiles ; les ailes sont en tôle, et montées sur des vergues auxquelles un poids additionnel ramène le centre de gravité. Ces ailes s'effacent progressivement par l'action du vent, lorsque celle-ci devient excessive. Des poids, qui tournent avec la roue, développent dans ce but une force centrifuge croissante, que l'on maintient en antagonisme avec un ressort à boudin. On dispose cependant, pour les cas extrêmes, d'un frein qui se trouve installé au pied du mât.

Le moulin n'exécute jamais plus de 45 révolutions par minute. Sa masse fait volant, et régularise la rotation malgré les oscillations

du vent. Le système se graisse de lui-même. Un petit compteur déverse périodiquement une goutte d'huile sur les coussinets. On a soin d'employer à cet usage un mélange d'huiles appropriées, qui ne se congèle pas en hiver dans nos climats. L'appareil peut donc marcher seul, et ne réclame qu'une surveillance discontinue. On ajoute ainsi, à l'économie due à l'emploi d'une force gratuite, celle qui résulte de la suppression du mécanicien.

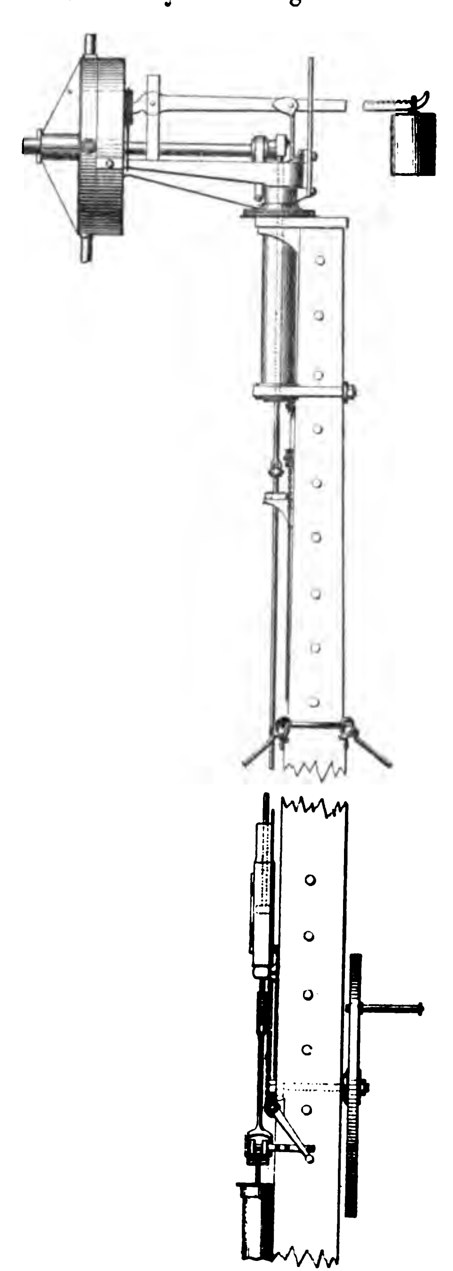


Fig. 230. — Moulin à vent Amédée Durand (élévation).

360 — *Panémones.* — Les panémones étant symétriques autour d'un axe vertical, se trouvent en équilibre au point de vue de la pesanteur. Ils sont en même temps toujours orientés, dans quelque aire que vienne à souffler le vent. Malheureusement les aubes se recouvrent plus ou moins les unes les autres dans la partie tangentielle à cette direction, et l'action motrice s'en trouve beaucoup diminuée. Les panémones présentent, par rapport aux moulins à vent, une infériorité analogue à celle des roues à aubes sur l'hélice propulsive

des navires. Cette dernière, complètement immergée, exerce l'action motrice par toute sa surface. Au contraire, une faible portion seulement de la couronne de la roue se trouve en rapport avec le fluide, ce qui entraîne un développement exagéré de ce propulseur.

Il est clair que les appendices des panémones doivent, sous peine de rester en équilibre, se présenter à l'air de deux manières différentes dans les deux régions tangentielles à la direction du vent, de telle sorte qu'il résulte de cette différence d'action un moment moteur propre à déterminer la rotation.

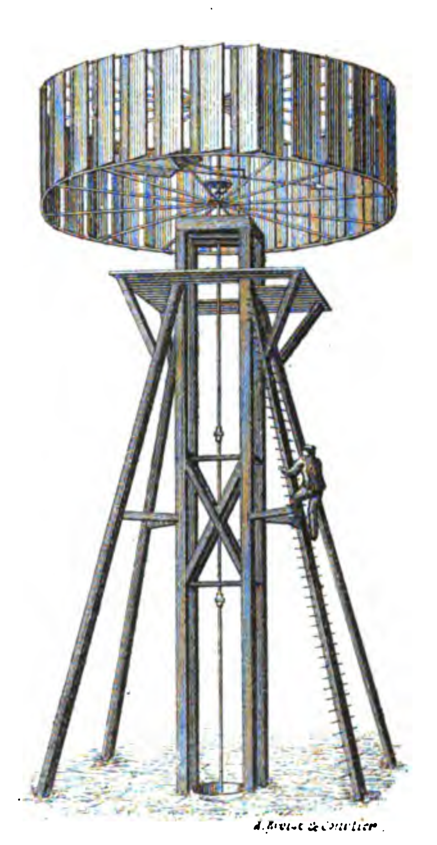


Fig. 231. — Panémone Lequesne et Lefebvre. (Vue perspective.)

Dans le panémone de Cornwall, de grands volets mobiles à charnières sur des cadres, à peu près comme des fenêtres sur leurs châssis, s'ouvrent d'un côté dans le sens de la rotation, en laissant passer librement le courant. Ils se plaquent au contraire sur leur cadre, en arrivant de l'autre côté, de manière à fermer la fenêtre pour recevoir alors l'action du vent. On a cherché à atténuer la violence très fâcheuse de ces chocs, en multipliant beaucoup le nombre des bras et celui des châssis que porte chacun d'eux.

Cette donnée élémentaire a été perfectionnée [1] par MM. Lequesne et Lefèvre (fig. 231). Leur panémone incline ses ailes sous un angle de 70 degrés d'un côté ou de l'autre de la circonférence, en les bu-

[1] *La Nature*, 14 juillet 1880, p. 107.

tant contre deux arrêts. La palette se reporte de l'un à l'autre de ces derniers, en passant par la tangente parallèle au vent; et l'action reste motrice sur une grande partie de la périphérie. Le passage s'effectue sans choc important, car la palette se trouve alors masquée par celle qui la suit immédiatement. Les arrêts peuvent du reste être ramenés vers le centre au moyen de fils gouvernés par un pèse-vent, de manière à laisser, quand le temps est démonté, toutes les palettes se placer parallèlement à l'ouragan.

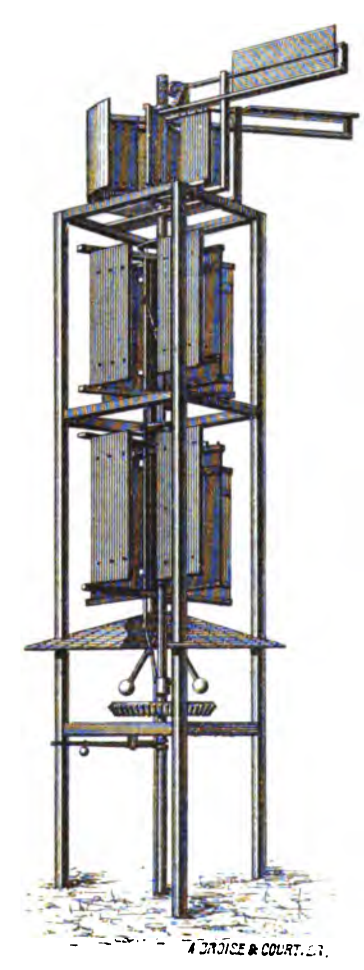


Fig. 232. — Panémone de Wood. (Vue perspective.)

Le panémone d'Andersen est formé d'aubes planes, inclinées toujours sous le même angle sur la couronne circulaire qui les porte. De cette manière, elles se disposent d'une manière fuyante d'un côté de l'axe, en recevant alors, de la part du vent, une action peu sensible. De l'autre côté, au contraire, l'air s'y engouffre en éprouvant une certaine difficulté à en ressortir. De là une pression beaucoup plus importante, dont nous avons donné ailleurs la théorie (n° 69, note 2).

Dans le panémone de Wood ([1]), un régulateur à boules fait varier, suivant la vitesse du vent, l'inclinaison sous laquelle il aborde les aubes (fig. 232).

Dans le panémone à cuillers (fig. 233), les palettes planes sont remplacées par des hémisphères creux, qui se présentent alternati-

([1]) *Scientific American*, 24 juillet 1880, p. 50.

vement par leur convexité et par leur concavité d'un bord à l'autre de la roue, de manière à constituer une différence analogue à celle du cas précédent.

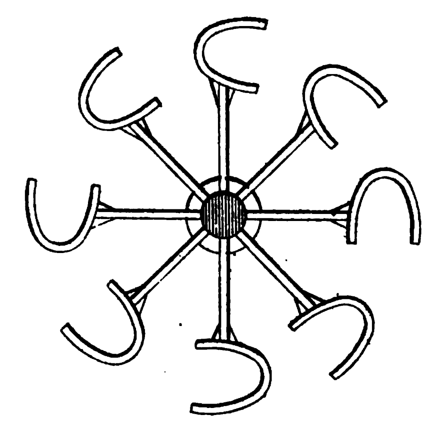


Fig. 233. — Panémone à cuillers (coupe horizontale).

Certains panémones sont directement exposés au vent (fig. 233). Dans d'autres modèles, on dispose à l'entour un distributeur fixe

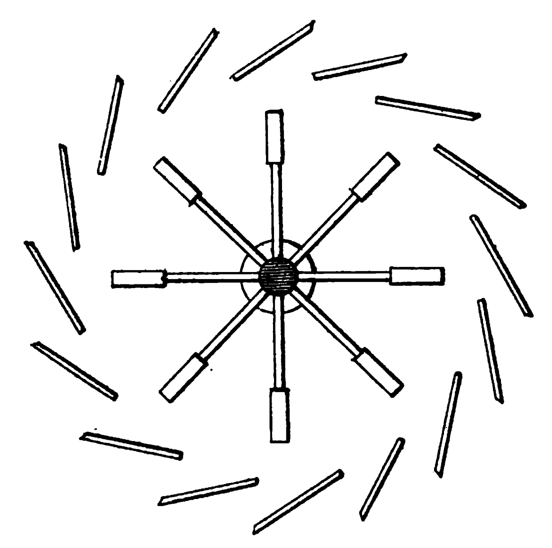


Fig. 234. — Panémone à ailettes (coupe horizontale).

(fig. 234), destiné à diriger le vent sur les palettes de la manière la plus avantageuse pour l'effet que l'on recherche.

§ 3

MOTEURS ÉOLIENS. — THÉORIE

361 — *Formule du travail.* — Pour établir la théorie des moteurs éoliens, nous appliquerons les lois de la résistance des milieux [1] au mouvement relatif [2] de l'aile par rapport au courant aérien. On sait que la force exercée sur un élément de surface courbe est proportionnelle à la fois au carré de la composante de la vitesse relative estimée suivant la normale à cet élément, et à l'aire du *maître-couple*, c'est-à-dire, dans le cas actuel, celle de l'élément superficiel lui-même, puisque ce maître-couple doit s'estimer en projection sur le plan perpendiculaire à la composante normale.

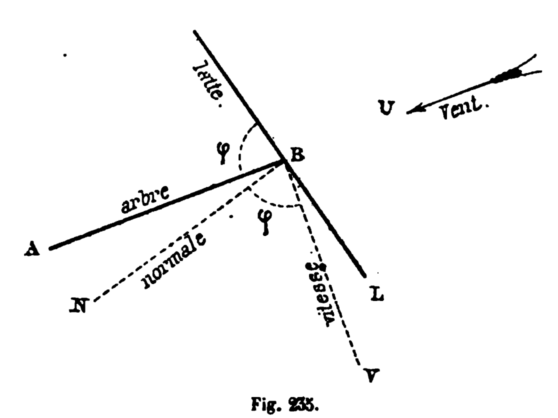


Fig. 235.

Prenons pour plan de la figure (fig. 235) celui qui serait mené par l'axe A du moulin perpendiculairement à l'un de ses bras B. lequel se projette dès lors en un seul point, à l'extrémité de cet axe. Une latte quelconque est parallèle à ce plan, et s'y projette en vraie grandeur en L. La surface de l'aile est donc celle d'un conoïde

[1] Haton de la Goupillière. *Traité des mécanismes renfermant la théorie géométrique des organes et celle des résistances passives*, 1864. Gauthier-Villars, p. 438.

[2] Sous réserve des différences qui existent, dans le régime des fluides, entre les lois du mouvement absolu et celles du mouvement relatif (Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 401).

droit, qu'une génératrice décrit en restant parallèle à ce plan fixe, et s'appuyant sur sa perpendiculaire B. Le plan tangent en un point quelconque M de cette droite de striction sera déterminé par cette ligne elle-même et par la génératrice L. Il se trouve donc entièrement projeté sur sa trace L. Dès lors la normale est parallèle au plan de la figure, et se projette en N, perpendiculairement à L. Quant à la vitesse de rotation du point M, elle est perpendiculaire au plan qui le joint à l'axe, lequel, devant contenir MB, est perpendiculaire au tableau et entièrement projeté sur sa trace en AB. Cette vitesse sera donc parallèle au plan de la figure, et projetée en V perpendiculairement à l'axe A. L'angle φ, qui est compris entre elle et la normale N, ne diffère pas, d'après cela, de celui que forment cet axe et la latte L. C'est précisément le choix à faire pour la loi de variation de cet angle avec la distance BM comprise entre la latte et l'axe, en vue d'assurer le meilleur rendement, qui doit constituer l'objet de la recherche actuelle (1).

362 — La composante normale de la vitesse u du vent, estimée suivant BN, aura pour valeur $u \sin\varphi$.

Quant à la vitesse linéaire de rotation, projetée sur BV, elle sera mesurée par ωr, si ω représente la vitesse angulaire et r la distance MB de l'élément à l'axe. Nous introduirons, pour simplifier le rapport ρ de r à la longueur totale R du bras :

$$\rho = \frac{r}{R}.$$

La vitesse de rotation deviendra par là $\omega R\rho$. Quant au produit ωR, qui représente la vitesse circonférentielle de la roue, nous l'envisagerons comme un certain multiple α de la vitesse du vent :

$$\omega R = \alpha u.$$

Dans ces conditions, la vitesse de rotation devient enfin $\alpha\rho u$, et sa composante normale $\alpha\rho u \cos\varphi$.

(1) De Coriolis. *Calcul de l'effet des machines*, in-4°, p. 210. — P. Julien. *Problèmes de mécanique*, t. I. — W. Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 220.

La vitesse relative s'obtient en construisant la résultante du parallélogramme formé sur la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement prise en sens contraire. Sa projection sur la droite BN sera donc la somme algébrique de celles des deux composantes, c'est-à-dire la différence des deux valeurs absolues que nous venons d'évaluer :

$$u(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi).$$

Quant au maître-couple, il n'est autre que le rectangle infinitésimal qui a pour hauteur la distance dr, ou $Rd\rho$, des deux génératrices infiniment voisines, et pour largeur la dimension longitudinale l des lattes. Sa surface est donc $lRd\rho$.

Si nous désignons par k l'effort du vent par unité de vitesse et de surface de toile, la force normale imprimée à l'élément du conoïde aura pour expression :

$$k\,.\,lRd\rho\,.\,u^2(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)^2.$$

Son travail élémentaire sera le produit de cette force par la projection sur sa direction du chemin parcouru $\alpha\rho u.d\tau$ (si τ désigne le temps). Pour rapporter à la seconde cette énergie motrice, il suffit de la diviser par $d\tau$, ce qui donne :

$$klRu^2(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)^2d\rho\,.\,\alpha\rho u\cos\varphi.$$

Le travail total s'obtiendra donc en intégrant cette expression depuis la distance r_0, à laquelle on a commencé à embrancher des lattes, jusqu'à R. Comme d'ailleurs l'intégration se fait par rapport à ρ, nous prendrons pour limites ρ_0 et 1. Ce résultat, relatif à une seule aile, devra enfin être multiplié par le nombre de ces dernières, qui est ordinairement égal à 4, mais que nous désignerons d'une manière générale par n. Il vient ainsi définitivement pour l'expression du travail T recueilli par le récepteur en une seconde :

$$T = nklR\alpha u^3\int_{\rho_0}^{1}\rho\cos\varphi\,(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)^2d\rho.$$

363 — ***Maximum du travail.*** — Pour connaître l'équation du

conoïde le plus avantageux, c'est-à-dire l'expression de φ en fonction de ρ qui correspond au meilleur effet utile, il s'agit maintenant de chercher le maximum de cette intégrale définie.

En général, ce genre de recherches dépend d'une branche spéciale de l'analyse supérieure nommée *calcul des variations*. Mais lorsque, comme dans le cas actuel, l'expression renfermée sous le signe d'intégration ne renferme aucune des dérivées $\frac{d\varphi}{d\rho}, \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}, \ldots$ de la fonction inconnue φ par rapport à sa variable ρ, un élément quelconque de l'intégrale définie garde une complète indépendance vis-à-vis des autres. Il suffit donc de rendre chacun d'eux maximum en son particulier. En d'autres termes, on n'a plus besoin alors d'autre secours que de celui du calcul différentiel, puisqu'il ne s'agit que de rendre maxima l'expression complètement déterminée qui figure sous le signe d'intégration :

$$\cos\varphi(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)^2.$$

La recherche de la valeur de φ qui rendra cette quantité maximum pour une valeur déterminée de ρ, se fera en égalant à zéro sa dérivée, ce qui donne :

$$2\cos\varphi(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)(\cos\varphi + \alpha\rho\sin\varphi) - \sin\varphi(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)^2 = 0.$$

Il est permis de supprimer le facteur commun :

$$\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi,$$

car en l'annulant à part, on ferait évanouir l'intégrale elle-même, ce qui correspondrait à un minimum, et non pas au maximum cherché (1).

Il reste après cette simplification :

$$2\cos\varphi(\cos\varphi + \alpha\rho\sin\varphi) - \sin\varphi(\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi) = 0,$$

(1) Il est facile de voir, en effet, que cette condition revient à placer chacun des éléments de l'aile dans la direction même de la vitesse relative, qui n'exercera plus dès lors aucune action normale.

ou, en divisant par $\cos^2 \varphi$:

$$(44) \qquad \tang^2 \varphi - 3\alpha\rho \tang \varphi - 2 = 0.$$

Cette équation du second degré, dont le dernier terme est négatif, a ses racines réelles et de signes contraires. La valeur négative est étrangère à la question, puisque l'angle φ doit rester aigu, sous peine de renverser le sens de la rotation, ce qui serait sans intérêt. On a donc comme solution définitive [1] :

$$(45) \qquad \tang \varphi = \frac{3}{2}\alpha\rho + \sqrt{\frac{9}{4}\alpha^2\rho^2 + 2}.$$

364 — Telle est l'équation du conoïde cherché. On pourrait la ramener à la forme cartésienne, en prenant pour axe des x celui de la roue, pour axe des z le bras, qui sert de ligne de striction à la surface, et pour axe des y la perpendiculaire au plan de ces deux droites dirigée dans le sens opposé à BV. Il viendrait pour ce changement de variables :

$$\tang \varphi = \frac{y}{x}, \qquad \rho = \frac{z}{R};$$

et l'on obtiendrait l'équation suivante :

$$\frac{y}{x} - 3\frac{x}{y} = 3\alpha\frac{z}{R},$$

qui représente une surface du troisième degré facile à discuter.

Mais il sera beaucoup plus utile, sans nous engager ici dans cette voie, de conserver la relation sous la forme (45), comme étant la plus propre à faire connaître directement, pour toute distance

[1] Cette formule, basée sur une théorie irréprochable, semble devoir être préférée à celle qui a été donnée dans une *Dissertation on the Theory and Practice of Windmills* (*Engineering and Mining Journal*, 7 octobre 1876) et qui, avec nos notations, prendrait la forme :

$$\tang \varphi = \alpha\rho \pm \sqrt{1 + \alpha^2\rho^2},$$

indiquant des inclinaisons beaucoup moindres. Nous verrons plus loin (n° 369) que les observations pratiques sont bien d'accord avec la formule (45).

de l'axe, la direction dans laquelle il convient d'implanter une latte en ce point. Si l'on prolonge par la pensée le conoïde jusqu'à l'axe lui-même, sans se préoccuper de l'enchevêtrement qui en résulterait en réalité avec les autres ailes, on aura pour la première latte *idéale*, en faisant $\rho = 0$:

$$(46) \qquad \tan \Phi_0 = \sqrt{2}, \qquad \Phi_0 = 54^\circ 44' 8'',188.$$

Quant à la première latte *réelle*, on lui donnera comme inclinaison :

$$(47) \qquad \tan \varphi_0 = \frac{3}{2} \alpha\rho_0 + \sqrt{\frac{9}{4} \alpha^2\rho_0^2 + 2}.$$

La dernière sera, pour $\rho = 1$, disposée sous l'angle :

$$(48) \qquad \tan \varphi_1 = \frac{3}{2} \alpha + \sqrt{\frac{9}{4} \alpha^2 + 2}.$$

365 — *Maximum maximorum.* — On connaîtra ainsi, pour une allure déterminée α, le conoïde de rendement maximum. Mais comme cette allure elle-même reste encore arbitraire, il se présentera autant de ces conoïdes que l'on voudra attribuer, par la pensée, de valeurs au rapport à établir entre la vitesse extrême du bras et celle du vent. On peut donc, en second lieu, se demander quelle est, parmi toutes ces hypothèses, la plus favorable à l'efficacité du moteur; en un mot, quel est, avec une valeur appropriée de α, actuellement inconnue, le conoïde de rendement *maximum maximorum*.

Pour effectuer ce calcul, nous devons, au préalable, faire rentrer sous le signe d'intégration le facteur α, qui a maintenant cessé de désigner une constante déterminée. On écrira donc :

$$T = nklRu^3 \int_{\rho_0}^{1} \alpha\rho \cos \varphi(\sin \varphi - \alpha\rho \cos \varphi)^2 d\rho.$$

Mais les conditions sont actuellement profondément modifiées. Dans l'analyse précédente, φ et ρ restaient absolument indépendants; et la formule faisait connaître le travail recueilli par n'importe quel

conoïde. Actuellement, il demeure expressément entendu que φ a été, par la pensée, remplacé en fonction de ρ d'après l'expression (45), qui fait de cette quantité une fonction complètement déterminée de α en même temps que de ρ. L'intégrale est, à ce titre, une fonction connue de α, et c'est la valeur de ce paramètre, capable de la rendre maximum, que nous avons en ce moment à chercher.

366 — A cet effet représentons, pour abréger, par H la quantité subordonnée :

$$H = \alpha\rho \cos\varphi (\sin\varphi - \alpha\rho\cos\varphi)^2.$$

On pourra, de cette manière, écrire plus simplement :

$$T = nkl\mathrm{R}u^5 \int_{\rho_0}^{1} H d\rho.$$

Il faudra, pour le maximum de T, satisfaire à la relation :

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\rho_0}^{1} H d\rho = 0,$$

ou, en différenciant sous le signe d'intégration, puisque les limites de l'intégrale définie sont numériques et fixes :

$$\int_{\rho_0}^{1} \frac{dH}{d\alpha} d\rho = 0.$$

Or la différentielle $\frac{dH}{d\alpha}$ de la fonction H après substitution de φ en fonction de ρ d'après l'équation (45) peut, d'après la règle de la différentiation des fonctions implicites ([1]), être remplacée par :

$$\int_{\rho_0}^{1} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) d\rho = 0.$$

Mais la valeur de φ (45), qui a été substituée pour former l'expres-

([1]) En employant, suivant l'usage, la caractéristique ∂ pour désigner les différentielles *partielles*

sion H à différencier, provient précisément de l'équation différentielle partielle [1] :

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

La relation actuelle se réduit donc simplement à :

$$\int_{\rho_0}^{1} \frac{\partial H}{\partial \alpha}\, d\rho = 0.$$

367 — On a d'après cela, par la différenciation de H relative à α, effectuée en traitant φ comme une constante :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \rho \cos \varphi \,(\sin \varphi - \alpha\rho \cos \varphi)\,(\sin \varphi - 3\alpha\rho \cos \varphi).$$

Mais l'équation (44) qui définit φ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin \varphi - 3\alpha\rho \cos \varphi = \frac{2 \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}.$$

Nous obtenons par suite finalement :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{2\rho \cos^3 \varphi}{\sin \varphi}\,(\sin \varphi - \alpha\rho \cos \varphi),$$

et l'équation déterminée qu'il s'agit de résoudre par rapport à α devient :

$$\int_{\rho_0}^{1} \frac{\rho \cos^3 \varphi}{\sin \varphi}\,(\sin \varphi - \alpha\rho \cos \varphi)\, d\rho = 0.$$

Pour y parvenir, au lieu de substituer, suivant la marche qui a été tracée ci-dessus, φ en fonction de ρ d'après la relation (45), en vue d'intégrer ensuite par rapport à cette dernière quantité, nous effectuerons au préalable un changement de variables, en remplaçant ρ et $d\rho$ en fonction de φ et $d\varphi$, et transformant en

(1) En effet la différenciation exécutée au n° 363 sur la fonction H a été effectuée en considérant α comme une constante.

même temps les limites. L'équation (44) nous donne à cet effet :

$$\rho = \frac{1 - 3\cos^2\varphi}{3\alpha \sin\varphi \cos\varphi},$$

$$d\rho = \frac{1 + \cos^2\varphi}{3\alpha \sin^2\varphi \cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Il vient d'après cela :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{(1 + \cos^2\varphi)(1 - 3\cos^2\varphi)}{\sin^5\varphi}\, d\varphi = 0.$$

En y remplaçant le cosinus en fonction du sinus, nous lui donnerons la forme :

$$4\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi} - 8\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} + 3\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = 0.$$

Or on a identiquement, au moyen de l'intégration par parties, pour une valeur quelconque de l'exposant m :

$$\int \sin^{-m-2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi \sin^{-m-1}\varphi}{m+1} + \frac{m}{m+1}\int \sin^{-m}\varphi\, d\varphi.$$

En faisant successivement $m=3$ et $m=1$, on obtient, avec un logarithme népérien :

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi} = -\frac{1}{4}\cos\varphi \sin^{-4}\varphi + \frac{3}{4}\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} = -\frac{1}{2}\cos\varphi \sin^{-2}\varphi + \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = L\,\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2},$$

et finalement, en intégrant entre les limites voulues de manière à constituer l'équation précédente :

$$\frac{\cos\varphi_0(3 - 5\cos^2\varphi_0)}{\sin^4\varphi_0} + L\,\mathrm{tang}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\cos\varphi_1(3 - 5\cos^2\varphi_1)}{\sin^4\varphi_1} + L\,\mathrm{tang}\frac{\varphi_1}{2}.$$

Si l'on remplace maintenant φ_0 et φ_1 d'après leurs valeurs (47) et (48), on obtiendra une équation transcendante en α propre à fournir, par sa résolution à l'aide des méthodes approximatives, la valeur numérique de cette inconnue. En substituant ensuite cette dernière dans la formule (45), on obtiendra explicitement l'équation du plus favorable de tous les conoïdes, au point de vue du rendement maximum absolu.

368 — On voit cependant qu'il subsistera encore sous cette forme une famille entière de conoïdes, en raison du paramètre ρ_0; chaque valeur adoptée pour cette arbitraire entraînant un calcul numérique différent dans la résolution de l'équation transcendante. Mais on peut à cet égard introduire une simplification décisive.

Elle consiste, quelle que doive être en réalité dans chaque cas, pour la construction de l'appareil, la valeur effective de ρ_0, à la remplacer une fois pour toutes dans cette analyse par $\rho_0 = 0$, en prenant l'intégrale définie entre 0 et 1. Il est clair en effet que toutes les lattes que l'on voudrait supposer entre ρ_0 et zéro ne recueilleraient qu'un travail insignifiant, en raison de leur grande proximité de l'axe, et de la lenteur qui en résulte pour leur mouvement. Les introduire ou les supprimer dans le calcul reste donc à peu près indifférent.

Dans ces conditions, φ_0 prend la valeur spéciale que nous avons représentée par Φ_0 (46). Désignons de même par Φ_1 l'inconnue qui correspond à cette hypothèse dans l'équation transcendante. Celle-ci devient alors :

$$\frac{\cos\Phi_1\,(3 - 5\cos^2\Phi_1)}{\sin^4\Phi_1} + L\,\mathrm{tang}\,\frac{\Phi_1}{2} = \sqrt{3} + L\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right),$$

ou enfin :

$$\frac{\cos\Phi_1\,(3 - 5\cos^2\Phi_1)}{\sin^4\Phi_1} + 2{,}3025\ \mathrm{Log\ tang}\,\frac{\Phi_1}{2} = 1{,}0735.$$

Lorsque cette équation déterminée, qui ne renferme plus absolument rien d'arbitraire, aura fourni l'inconnue Φ_1, on obtiendra la

valeur correspondante α_1 du rapport de vitesse le plus favorable, en faisant dans l'équation (44) $\rho = 1$, ce qui donne :

$$\alpha_1 = \frac{\tang^2 \Phi_1 - 2}{3 \tang \Phi_1}.$$

Il ne restera plus alors qu'à reporter cette valeur dans la formule (45), pour obtenir l'équation du type théorique complètement déterminé qu'il convient d'adopter dans la construction des ailes des moulins à vent.

369 — L'expérience directe a d'ailleurs montré [1] que ce rapport de vitesse α le plus favorable est compris entre 2.5 et 2.7. Supposons, pour fixer les idées :

$$\alpha = \frac{8}{3} = 2,67;$$

hypothèse qui correspond à :

$$\tang \Phi_1 = 4 + \sqrt{18}, \qquad \Phi_1 = 83^\circ\, 7'\, 2'',701.$$

On obtiendra dans ces conditions l'équation du conoïde théorique sous cette forme très simple [2] :

$$(49) \qquad \tang \varphi = 4\rho + \sqrt{16\rho^2 + 2}.$$

L'inclinaison varie alors de Φ_0 à Φ_1, et l'aile présente par suite *un gauche total* égal à (46) :

$$\Phi_1 - \Phi_0 = 28^\circ\, 22'\, 54'',515.$$

Le rapport de cette déviation à l'angle droit a pour valeur :

$$0,31535 = \frac{1}{2,6376}.$$

C'est presque un tiers de quadrant.

(1) Coulomb. *Théorie des machines simples.* — Smeaton. Recherches expérimentales sur l'eau et le vent. *Mémoires de la Société royale de Londres*, 1759. — Tredgold. Traité d'hydraulique.

(2) A laquelle correspond l'équation cartésienne : $\frac{y}{x} - 2\frac{x}{y} = 8\frac{z}{R}$.

370 — Il resterait enfin, au point de vue théorique, à substituer l'expression (49) à la place de φ dans la valeur générale du travail :

$$T = \frac{8}{3} knlRu^3 \int_0^1 \rho \cos\varphi \left(\sin\varphi - \frac{8}{3}\rho\cos\varphi\right)^2 d\rho,$$

et à effectuer l'intégration. Mais il demeure absolument inutile d'exécuter ce supplément de calcul, car, en le supposant réalisé, il subsisterait encore dans le résultat l'inconnue k, dont on ne pourrait demander la valeur numérique qu'à l'expérience directe. Il suffit dès lors de représenter par un symbole K le produit de tous les facteurs numériques, y compris l'intégrale définie elle-même, en écrivant :

$$T = KnlRu^3,$$

et de déterminer directement ce coefficient K d'après l'observation.

On peut même réduire encore davantage l'écriture, en remarquant que le rectangle lR constitue sensiblement le maître-couple d'une aile, et, dans tous les cas, la surface, une fois dépliée, de la toile destinée à la recouvrir. La quantité nlR représente donc la *surface totale de toile* S. Il vient dès lors, si l'on emploie cette notation :

$$T = KSu^3.$$

On admet ordinairement pour le coefficient K, dans ces conditions, la valeur numérique $\frac{1}{3}$:

$$T = \frac{Su^3}{3}.$$

Il ne reste plus alors, pour obtenir la force en chevaux N, qu'à diviser par 75, ce qui donne :

$$N = \frac{Su^3}{225} = 0,00444\,Su^3.$$

Ce résultat montre que la puissance d'un moteur éolien varie en raison de sa surface de toile et du cube de la vitesse du vent. On s'explique ainsi d'un côté les grandes dimensions que l'on se trouve conduit à donner à ces moteurs, si l'on en veut tirer une puissance notable, et d'autre part cette double circonstance qu'ils deviennent insignifiants pour de faibles vitesses, et extrêmement dangereux au delà d'un certain point.

D'après M. Wolff [1], le prix du cheval-vapeur ressortirait, avec les types de moulins à vent américains, à 0 fr. 75 par jour pour les petits appareils, et 0 fr. 16 avec les plus grands.

[1] Alfred Wolff. *The Windmill as a prime mover.*

CHAPITRE XXII

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

—

§ 1

REPRÉSENTATION DES CHANGEMENTS D'ÉTAT

371 — Les considérations que nous avons eu à présenter jusqu'ici restaient assez simples pour que l'esprit pût les suivre directement. Mais il deviendrait maintenant difficile d'aller plus loin sans lui apporter le secours d'un mode de représentation géométrique très précieux pour cet ordre de considérations.

Nous avons vu qu'en raison de l'équation-typique, qu'il est toujours nécessaire de posséder pour l'étude d'un corps déterminé, deux seulement des trois variables t,p,v restent indépendantes, la troisième s'en déduisant toujours d'une manière nécessaire. C'est ordinairement la température que l'on détermine au moyen de cette condition, lorsque les valeurs de p et v ont été assignées directement. Une transformation quelconque sera donc caractérisée par une relation entre ces deux derniers éléments, ou, si l'on veut, par le tracé géométrique de la courbe dont cette formule serait l'équation. Ce mode de figuration est d'autant plus précieux qu'il subsiste en toute circonstance, pour des contours discontinus, ou même pour des profils produits par l'enregistrement de conditions fortuites, dont la représentation analytique deviendrait ou très compliquée ou même tout à fait impossible.

On prend, à cet effet, deux axes rectangulaires (fig. 236), dont

l'un, des abscisses, Ov sert à représenter les volumes, et l'autre Op, des ordonnées, les pressions. On convient, pour cela, d'adopter une longueur arbitrairement choisie, mais déterminée, Ov_1, pour désigner l'unité de volume. Un volume quelconque v sera dès lors marqué par une abscisse Om égale à v fois l'échelle Ov_1. On adopte également, pour représenter l'unité de pression, une longueur arbitraire Op_1, généralement différente de la première, avec laquelle elle ne présente aucune relation nécessaire. On porte alors la pression en ordonnée suivant mM.

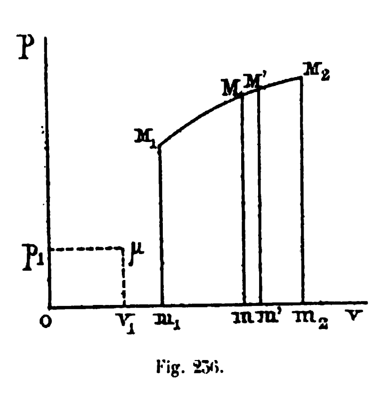


Fig. 256.

L'extrémité M de cette droite est appelée *point représentatif de l'état* (p, v, t). Il suffit, inversement, de connaître un tel point figuratif pour en déduire, par son ordonnée et son abscisse, la pression et le volume, après quoi l'équation-typique fournit la température.

A chaque point du plan correspond donc un état du corps parfaitement déterminé. Un tracé quelconque M_1M_2 représente d'après cela une succession d'états bien définis, c'est-à-dire une *transformation* ou *évolution*, partant d'un *état initial* fourni par l'extrémité M_1, et aboutissant à *l'état final* M_2. Présentons, à cet égard, quelques exemples.

372 — Un changement d'état à pression constante serait figuré par une droite horizontale; puisque la pression est représentée par l'ordonnée.

Un changement d'état à volume constant sera caractérisé par une droite verticale; le volume étant fourni par l'abscisse.

Une transformation isotherme sera, pour un gaz parfait, représentée par un arc d'hyperbole équilatère admettant pour asymptotes les axes coordonnés. Une telle évolution est, en effet, soumise à la loi de Mariotte, c'est-à-dire déterminée par l'équation :

$$pv = \text{const.}$$

Une transformation adiabatique sera, pour les mêmes corps, marquée par un arc de la courbe binôme d'ordre $k = 1,41$:

$$(50) \qquad pv^k = \text{const.}$$

puisqu'elle doit être réglée par la loi de Laplace (¹).

Il est souvent utile de se représenter tout l'ensemble du plan comme sillonné par deux familles de courbes isothermes et adiabatiques, qui seraient représentées par les équations précédentes, dans lesquelles on attribuerait par la pensée à la constante arbitraire une succession de valeurs graduées.

Le paramètre des premières sera la température absolue t. On pourrait également choisir pour cet office n'importe quelle fonction bien déterminée de cette variable; mais une telle manière de procéder serait évidemment moins simple.

Le long de chaque adiabatique, c'est l'entropie s (éq. 26) qui reste invariable, puisque l'équation différentielle de ces courbes est $dQ = 0$. Nous l'adopterons comme paramètre de cette seconde famille de courbes.

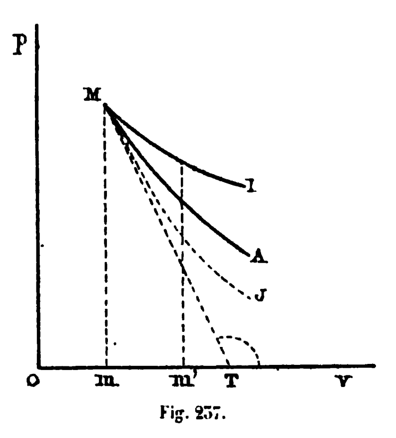


Fig. 237.

En ce qui concerne, pour chaque point, la disposition respective des deux lignes de ce réseau (fig. 237), il est bon de remarquer que, lorsque l'on s'avance dans le sens positif de l'axe des abscisses, ce qui revient à supposer une dilatation du gaz, l'adiabatique MA plonge au-dessous de l'isotherme MI, et se rapproche plus rapidement qu'elle de l'axe des volumes. On déduit en effet de l'équation (50), qui représente à la fois ces deux familles de courbes, suivant que l'on attribue par la pensée à l'exposant les valeurs 1 ou 1,41 :

$$\frac{dp}{dv} = -k\,\frac{p}{v}.$$

(¹) Les *courbes adiabatiques* de Rankine ont aussi été appelées par Verdet *lignes de nulle transmission*, et par Gibs (*Transactions of the Connecticut Acad.*, t. II, p. 309)

Le signe négatif exprime que la tangente MT fait avec le sens positif de l'axe O*v* un angle obtus, dont $\frac{dp}{dv}$ mesure la tangente trigonométrique. La valeur absolue $k\frac{p}{v}$ de cette dernière correspond donc à l'angle supplémentaire MTO, et comme elle s'accroît avec k, l'on voit que la droite MT se rapproche de la verticale à mesure que cet exposant augmente, c'est-à-dire quand on passe de l'isotherme à l'adiabatique.

373 — Cette circonstance peut être rattachée à une loi plus générale, en ce qui concerne l'interprétation concrète des tracés représentatifs. Toute courbe qui, comme MI, se trouve au-dessus de l'adiabatique MA lorsque l'on s'avance dans le sens positif de l'axe des abscisses, représente une transformation accompagnée d'une absorption de chaleur aux dépens de l'enceinte (1). Toute ligne MJ inférieure à l'adiabatique correspond au contraire à une évolution de nature à rendre de la chaleur aux objets environnants.

En effet, pour une même abscisse quelconque O*m'*, l'ordonnée de la courbe MI est plus grande que celle de l'adiabatique MA. La pression, après une dilatation *mm'*, sera donc supérieure à la valeur qu'elle prendrait sans absorption de chaleur. Par conséquent, elle a nécessité une fourniture de calorique. Le contraire a lieu avec la courbe MJ.

§ 2

REPRÉSENTATION DU TRAVAIL

374 — Il est facile de trouver sur la figure la représentation du travail externe qui a pour expression (1) :

$$T_e = \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$

courbes *isentropiques*, attendu que l'entropie reste constante le long de chacune d'elles. — Hällstein. Sur les lignes adiabatiques. *Acta Societatis scientiarum fennicæ*. Helsingfors, t. X, p. 451.

(1) La transformation isotherme rentre, en effet, dans cette catégorie, car elle exige

En effet, pdv constitue (fig. 236) la différentielle de l'aire $MM'mm'$ de la courbe qui a pour abscisse et ordonnée courantes v et p. L'intégrale définie correspond donc à l'aire finie $M_1M_2m_1m_2$, étendue depuis le point figuratif initial M_1 jusqu'au point final M_2.

Il reste toutefois à connaître l'interprétation de cette mesure géométrique comme nombre de kilogrammètres. Si l'on imagine, à cet égard, une transformation à tension constante effectuée sous l'unité de pression, elle sera représentée par l'horizontale $p_1\mu$ menée par le point p_1. En la suivant jusqu'à ce qu'un volume initial quelconque ait subi une augmentation égale à l'unité de volume, on devra avoir pour la longueur $p_1\mu$ de cette horizontale l'échelle même des volumes Ov_1. L'aire qui correspond à cette transformation spéciale sera donc celle du *rectangle des échelles* $Op_1v_1\mu$. Mais l'intégrale définie qui mesure alors le travail est évidemment égale à 1. Concluons donc que l'unité de travail est représentée par le rectangle des échelles adoptées pour le volume et la pression.

375 — Il est facile, d'après une remarque de Cazin, de trouver sur l'épure représentative la variation d'énergie intérieure qui accompagne corrélativement la production d'un travail externe proposé; et, par conséquent, d'après la somme des deux quantités, l'expression de la chaleur totale à fournir pour la production de ce travail externe, suivant la loi de transformation considérée.

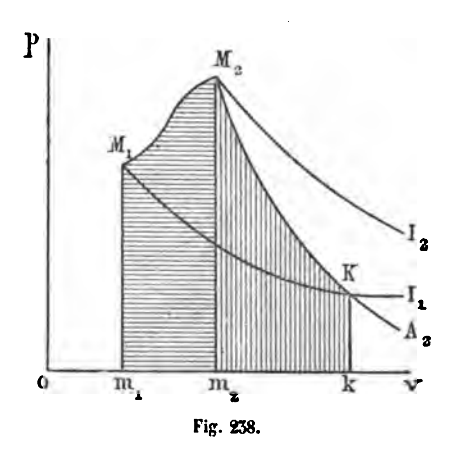


Fig. 238.

Soient en effet (fig. 238) M_1 l'état initial, M_2 l'état final d'un gaz, et M_1M_2 la ligne figurative de la loi de transformation qui fait passer effectivement de l'un à

que le gaz reçoive de la chaleur pour que la température puisse rester constante malgré la dilatation.

l'autre. L'aire $M_1M_2m_1m_2$ représente, à l'échelle, le travail externe accompli dans cette évolution. L'énergie intérieure s'est accrue en même temps, parce que la température a passé de t_1 à t_2 (éq. 18). Imaginons qu'on la ramène de t_2 à t_1, c'est-à-dire que l'on fasse passer le point représentatif, de l'isotherme I_2 à l'isotherme I_1, en suivant, à partir de l'état final M_2, l'adiabatique A_2. C'est en K que ce résultat sera obtenu. Mais comme cette opération subséquente aura été accomplie sans aucun échange thermique avec l'extérieur, toute l'énergie abandonnée par le gaz aura passé en travail externe. Elle sera donc exactement fournie par l'aire M_2Km_2k, représentative du travail externe de la transformation M_2K. De là cette construction :

Pour obtenir la variation d'énergie interne qui accompagne corrélativement le travail externe $M_1M_2m_1m_2$ *développé dans une transformation quelconque* M_1M_2, *on tracera jusqu'à leur rencontre mutuelle* K *l'isotherme* M_1K *de l'état initial* M_1 *et l'adiabatique* M_2K *de l'état final* M_2. *L'aire* M_2Km_2k *subordonnée à cet arc d'adiabatique représentera, d'après l'échelle des travaux, le résultat cherché.*

Fig. 239.

La quantité *totale* de chaleur Q qu'il est nécessaire de fournir pour un changement d'état accompli suivant une loi quelconque M_1M_2 est donc représentée, à l'échelle des travaux, par l'aire $m_1M_1M_2Kk$.

Nous noterons en passant un élégant théorème de Cazin, qui consiste en ce que *les aires* $M'_1M'_2m'_1m'_2$, $M''_1M''_2m''_1m''_2$,..., *des divers segments d'adiabatiques quelconques* A', A'',..., *qui se trouvent compris entre deux isothermes déterminées* I_1, I_2 (fig. 239), *sont toutes équivalentes*. En effet ces surfaces représentent le travail effectué sans aucun emprunt de chaleur à l'extérieur. Il est donc

équivalent à la variation de chaleur interne; et celle-ci ne dépend (éq. 18) que des températures extrêmes, lesquelles restent invariables le long des courbes I_1, I_2.

§ 3

CYCLES FERMÉS

376 — *Cycles fermés.* — Nous avons déjà dit que l'on appelle *cycle fermé,* ou simplement *cycle,* une transformation qui, partant d'un certain état initial arbitraire, y ramène finalement le corps après une succession quelconque d'états intermédiaires. La ligne figurative d'un cycle sera donc une courbe fermée $M_0AM''BM'M_0$ (fig. 240). Quant au point M_0 qui sert à représenter tout à la fois l'état initial et l'état final, il reste arbitraire sur le contour du cycle, et l'on peut concevoir que l'on reproduise la même série d'états consécutifs dans le même ordre, en commençant et finissant par l'un quelconque de ceux qui se sont succédé dans une expérience précédente.

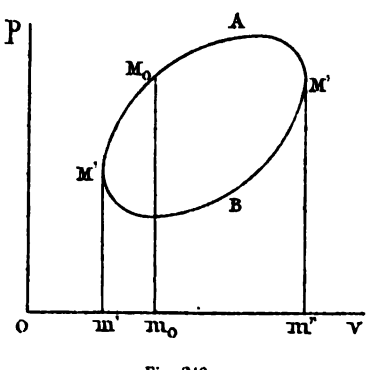


Fig. 240.

Envisageons les volumes extrêmes Om' et Om'' qui sont fournis par les points de contact M' et M'' des tangentes menées parallèlement à l'axe des ordonnées, et prenons M' comme point initial, puisque ce choix reste à notre disposition. L'évolution comporte alors deux phases distinctes, l'une de dilatation marquée par $M'AM''$, et l'autre de rétraction figurée par $M''BM'$. Dans la première, le phénomène a donné lieu à un développement de travail externe, qui se trouve représenté par l'aire $m'M'AM''m''$. Pendant la seconde, au contraire, il a fallu, pour ramener le gaz à un volume moindre, exercer sur lui un travail de compression dont chaque élément est mesuré par $-pdv$, et le total égal en

valeur absolue à l'aire $m''M''BM'm'$. Rien n'empêche, du reste, d'imaginer, qu'ayant mis en réserve une partie du travail fourni par la première partie de l'opération, l'on en reprenne ensuite possession pour l'affecter aux besoins de la seconde phase. De cette manière, l'expérience, après s'être suffi à elle-même, laisse finalement disponible un excédent de travail qui se solde par la différence de la première partie et de la seconde :

$$m'M'AM''m'' - m''M''BM'm' = M'AM''B,$$

représentée par l'*aire intérieure du noyau compris dans la courbe fermée.*

Il peut arriver, et nous en verrons des exemples [1], que la courbe se coupe elle-même en certains points appelés *nœuds*. Le résultat final est alors la *somme algébrique des divers noyaux ;* ceux-ci devenant négatifs lorsque la portion résistante du contour représentatif passe au-dessus de la partie motrice.

377 — *Cycle de Carnot.* — Comme premier exemple de cycles fermés, je citerai celui qui est formé (fig. 241) de deux horizontales et de deux verticales $M'_1M''_1M'_2M''_2$. Le corps, partant de l'état initial M'_1, subit, à pression constante, à l'aide d'une certaine addition de chaleur, une dilatation figurée par $m'm''$. Il éprouve ensuite, sous volume constant, une chute de pression représentée par $M_1''M''_2$. En troisième lieu, il subit à pression constante, par soustraction de chaleur, une rétraction $m''m'$ égale à sa première expansion. Enfin la pression remonte, à volume constant, suivant $M'_2M'_1$, jusqu'à sa valeur initiale.

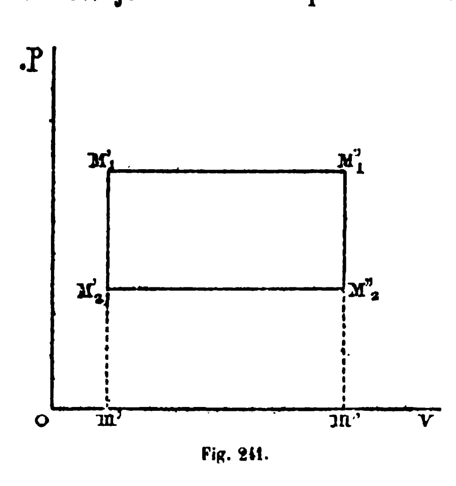


Fig. 241.

(1) Nos 418 et 424.

Un second exemple, moins simple au premier abord, est au fond beaucoup plus important, et joue un rôle absolument prépondérant dans les théories qu'il nous reste à parcourir. On l'appelle *cycle de Carnot*, du nom de son illustre inventeur (¹). Il est formé (fig. 242) de deux isothermes $M'_1M''_1$, $M'_2M''_2$, de paramètres t_1, t_2, et de deux adiabatiques $M'_1M'_2$, $M''_1M''_2$, de paramètres s', s''.

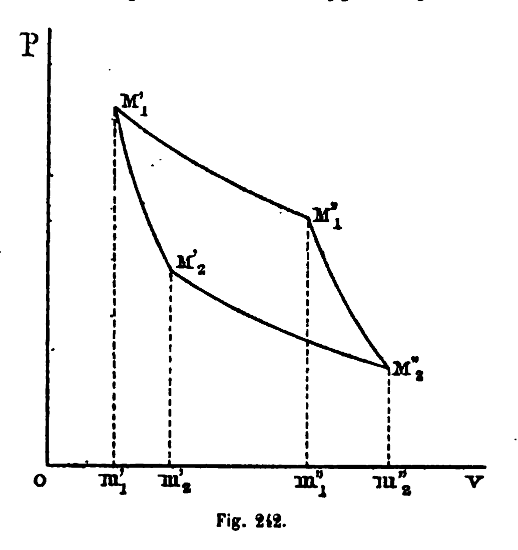


Fig. 242.

Le gaz, partant de l'état initial M'_1, éprouve une dilatation isotherme $M'_1M''_1$, en passant du volume Om'_1 au volume Om''_1 sans modifier sa température t_1, et en recevant pour cela, d'une source thermique spéciale, une quantité de chaleur Q_1. A cette première opération succède une dilatation adiabatique $M''_1M''_2$, pendant laquelle le volume continuant à croître atteint la valeur Om''_2, sans aucun échange de chaleur, d'où une chute de température de t_1 à t_2. En troisième lieu, le gaz subit une compression isotherme $M''_2M'_2$, sans modifier sa nouvelle température t_2; un réfrigérant se chargeant, pour son propre compte, de

(¹) Né en 1796, mort en 1832.

Sadi Carnot. *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance.* Bachelier, 1824. Réimprimé dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2ᵉ série, t. I, 1872; et chez Gauthier-Villars, 1878, avec des fragments inédits.

Robelin. Notice nécrologique sur Sadi Carnot. *Revue encyclopédique*, 1832, t. LV, p. 528. — Sadi Carnot, ingénieur des Ponts et Chaussées. *Notice biographique sur Sadi Carnot*, avec une analyse de l'ouvrage de ce dernier par Paul de Saint-Robert (*Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin*, t. IV. — *Annales de chimie et de physique*, 4ᵉ série, t. XVI, p. 407). — Clapeyron. Commentaire analytique sur l'ouvrage de Sadi Carnot. *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIV. — Thomson. Examen de la théorie de la puissance motrice de la chaleur par Sadi Carnot. *Transactions de la Société royale d'Édimbourg*, t. XVI, p. 541. — Chasles. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXVIII, p. 115. — Moutier. *Éléments de thermodynamique*, 1872, in-8°, p. 40.

la quantité de chaleur Q_2 progressivement dégagée par cette compression. Enfin le cycle se termine par une seconde compression adiabatique $M'_2M'_1$ qui a pour effet de faire remonter la température de t_2 à t_1, aucun échange de chaleur n'ayant lieu entre le gaz et les objets extérieurs pendant ce refoulement.

378 — Pour construire un cycle de Carnot, l'on se donnera d'une part les deux paramètres t_1, t_2, qui caractérisent les isothermes proposées, et, en outre, les abscisses v'_1, v''_1 des extrémités M'_1, M''_1 que l'on veut adopter arbitrairement sur l'une d'elles.

Les deux autres sommets M'_2, M''_2, seront alors déterminés par les intersections de la seconde isotherme avec chacune des deux adiabatiques. On peut prendre les équations de ces dernières sous la forme (24) :

$$t_1 v'^{k-1}_1 = t_2 v'^{k-1}_2, \qquad v'_2 = v'_1 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$t_1 v''^{k-1}_1 = t_2 v''^{k-1}_2, \qquad v''_2 = v''_1 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Remarquons avec soin que les quatre volumes qui marquent les diverses phases de l'opération forment une proportion :

$$(51) \qquad \frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2}.$$

Il en sera de même des quatre pressions, puisqu'elles sont respectivement unies à ces dernières par la loi de Mariotte le long des isothermes :

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{p''_1}{p'_1}, \qquad \frac{v'_2}{v''_2} = \frac{p''_2}{p'_2}.$$

Quant aux valeurs absolues de ces pressions, elles sont fournies par l'équation-typique (10) :

$$p'_1 = \frac{Rt_1}{v'_1}, \qquad p''_1 = \frac{Rt_1}{v''_1};$$

$$p'_2 = \frac{Rt_2}{v'_2}, \qquad p''_2 = \frac{Rt_2}{v''_2}.$$

On possède ainsi explicitement les groupes de valeurs des trois variables qui caractérisent les quatre états représentés par les divers sommets du diagramme.

379 — *Théorème de M. Maurice Lévy.* — Je placerai ici la démonstration d'un élégant théorème dû à M. Maurice Lévy [1].

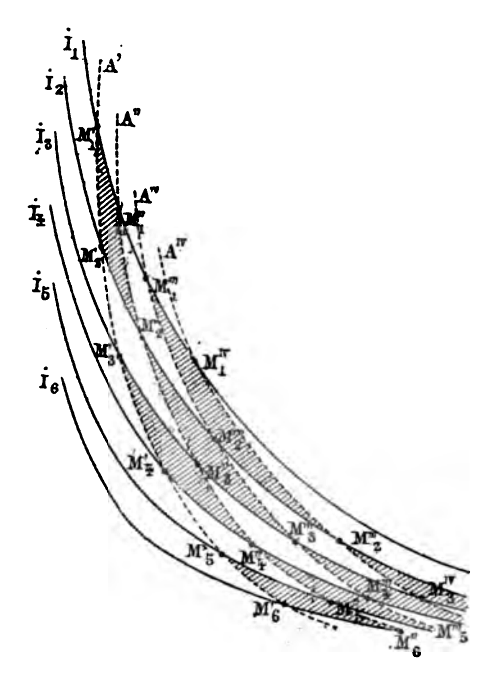


Fig. 243.

Imaginons que l'on recouvre le plan d'un double réseau d'isothermes et d'adiabatiques, de manière à le *paver* dans toute son étendue au moyen d'un système de cycles de Carnot. On a représenté ce système sur la figure 243, et des hachures ont servi à ombrer ces carreaux de deux en deux comme sur un échiquier, afin de les faire mieux ressortir. Le théorème en question consiste en ce que *la graduation des deux familles peut être réglée de telle sorte que tous ces cycles soient égaux en surface.*

Commençons, en effet, par graduer l'isotherme I_1 en M'_1, M''_1, M'''_1, M^{IV}_1, ... (fig. 244), de telle sorte que toutes les aires qui correspondent aux adiabatiques de ces points de division soient équivalentes entre elles :

$$M'_1M''_1m'_1m''_1 = M''_1M'''_1m''_1m'''_1 = M'''_1M^{IV}_1m'''_1m^{IV}_1 = \ldots;$$

Ces courbes dessinent, sur une isotherme quelconque I_2, une gra-

[1] *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXIV, p. 442, 491.

duation correspondante, et je dis que celle-ci jouit de la même propriété :

$$M'_2M''_2m'_2m''_2 = M''_2M'''_2m''_2m'''_2 = M'''_2M^{iv}_2m'''_2m^{iv}_2 = \dots$$

En effet, l'aire de l'isotherme représentée par l'équation

$$pv = Rt_1$$

a pour valeur :

$$M'_1M''_1m'_1m''_1 = \int_{v'_1}^{v''_1} pdv = Rt_1 \int_{v'_1}^{v''_1} \frac{dv}{v} = Rt_1 \, L \frac{v''_1}{v'_1}.$$

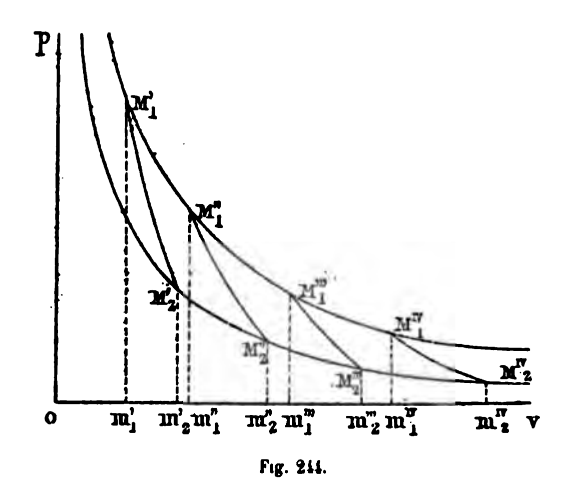


Fig. 244.

Celle de l'isotherme qui a pour équation

$$pv = Rt_2$$

sera de même :

$$M'_2M''_2m'_2m''_2 = Rt_2 \, L \frac{v''_2}{v'_2}.$$

Il vient donc, d'après la relation (51) :

$$\frac{M'_1M''_1m'_1m''_1}{M'_2M''_2m'_2m''_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

condition évidemment indépendante du choix des adiabatiques

A′, A″ que nous venons d'envisager par la pensée. Elle a lieu d'après cela pour toutes les autres; et, par suite, les aires des segments de la seconde isotherme sont proportionnelles à celles de la première. Mais celles-ci sont égales entre elles, il en est donc de même pour la seconde série.

Il suit de là l'égalité des aires des cycles de Carnot eux-mêmes. On a en effet pour l'un d'eux :

$$M'_1M''_1M'_2M''_2 = M'_1M''_1m'_1m''_1 + M''_1M''_2m''_1m''_2 - M'_2M''_2m'_2m''_2 - M'_1M'_2m'_1m'_2.$$

Or on a trouvé :

$$M'_1M'_2m'_1m'_2 = M''_1M''_2m''_1m''_2,$$

par conséquent :

$$M'_1M''_1M'_2M''_2 = M'_1M''_1m'_1m''_1 - M'_2M''_2m'_2m''_2.$$

Si donc on augmente successivement le nombre des accents pour passer d'un cycle au voisin, le terme positif du second membre gardera la même valeur par définition, et il en sera de même du terme négatif d'après ce qui vient d'être démontré. Il en est par suite encore ainsi du premier membre, c'est-à-dire de l'aire des cycles de la bande isotherme I_1I_2.

La même conséquence aura lieu dès lors pour tous les cycles renfermés dans la bande I_2I_3, lesquels devront être équivalents entre eux, puisque cette zone présente encore la même propriété que la première, à savoir l'égalité des aires des segments de son isotherme supérieure. Il en sera, par conséquent, de même pour la bande I_3I_4, et successivement pour toutes les autres.

Il reste donc à savoir s'il est possible que les constantes relatives à chacune de ces zones isothermes conservent une valeur unique dans toute l'étendue du plan. Or c'est ce qui est à notre disposition, car rien n'a encore fixé le mode de graduation de la bande adiabatique A′A″, qui renferme un cycle de chacune des zones isothermes. Il suffira de disposer à cet effet de ce mode de division, qui est resté arbitraire.

CHAPITRE XXIII

MOTEURS A AIR CHAUD — THÉORIE

—

§ 1

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

380 — *Conception fondamentale.* — Nous avons déjà examiné (chap. XIX et XX) les deux classes de récepteurs qui servent à recueillir l'énergie dont l'air se trouve momentanément chargé, soit sous la forme potentielle de tension, soit sous la forme actuelle de force vive. Il nous reste à envisager les *moteurs à air chaud*[1].

[1] Bourget et Burdin (*Théorie mathématique des machines à air chaud*, in-8°, 1865. — Machines à air chaud. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLV, p. 742, 1069). — Cazin. *Théorie élémentaire des moteurs à air chaud*, in-8°, 1865. — Hirsch. Théorie des moteurs aérothermiques. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1874, t. I, p. 409. — Courtin. *Éléments de la théorie mécanique de la chaleur contenant les formules nouvelles pour le calcul des machines à air chaud.* Mons, 1882. — Fréchin. Calcul des machines à air. *L'Institut*, 1853, p. 248. — De Vaux. Emploi de l'air échauffé comme moteur dans les machines. *Bulletin de l'Académie des sciences, lettres et beaux-arts de Belgique*, t. XIX, p. 296. — Liais. De l'air chauffé comme force motrice. *Mémoires de la Société de Cherbourg*, t. II, p. 113. — Aitkin. De l'air chauffé considéré comme pouvoir moteur. *Cosmos*, t. II, p. 353. — Andraud. Machines à air. *L'Institut*, 1853, p. 75. — Burdin. Locomotives mues par l'air chaud. *Comptes rendus de l'Académie dss sciences*, t. LVIII, p. 32. — Moteur à air chaud. *Dictionnaire des arts et manufactures.* — Briot. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 78. — Verdet. *Leçons sur la théorie mécanique de la chaleur.* — Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur.* — Combes. *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur.* — Hirsch. *Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur.* — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle.* — Moutier. *Thermodynamique.* — Ser. *Traité de physique industrielle*, 1887.

Thomson. On a remarkable property of steam connected with the theory of air engines.

destinés à utiliser l'énergie thermique dont ce fluide a été imprégné au moyen d'un foyer, dans lequel on brûle une certaine quantité de charbon.

Imaginons, à cet égard, qu'un kilogramme d'air se trouve engagé dans un cylindre derrière un piston, et qu'on lui communique à chaque instant la quantité de chaleur précisément nécessaire pour maintenir sa température constante pendant son expansion. Sa chaleur sensible ne sera pas modifiée, et d'autre part le travail interne peut toujours être considéré comme nul avec un gaz parfait. Par conséquent la totalité du calorique fourni par la source a été dépensée sous la forme de travail externe, sans que, théoriquement, rien en ait disparu. Une telle conception est assurément séduisante, et elle constituerait la perfection du moteur thermique. Malheureusement, il y a beaucoup à rabattre de ce premier aperçu.

Je ferai d'abord remarquer que, pour réaliser rigoureusement cette détente isotherme, on est obligé d'imaginer une *source chaude de masse infinie et de conductibilité infinie*. Sa masse doit être infinie, pour que les soustractions de chaleur opérées par le gaz ne modifient nullement la température propre de cette source. La conductibilité doit elle-même être parfaite, pour que les échanges soient instantanés, sans que le moindre retard à la transmission permette l'abaissement de la température de contact. Outre que cet idéal est déjà pratiquement irréalisable [1], il resterait encore, comme cause de perturbation, le défaut de conductibilité propre à l'air lui-même.

Signalons aussi un autre genre de mécompte plus décisif encore, et qui est inhérent au mode même de fonctionnement. Le kilo-

Philosophical Magazine, 3e série, t. XXXVII, p. 387. — Joule. On air-engine. *Ibidem*, 4e série, t. II, p. 150. — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur et autres moteurs*; traduction et notes de M. Gustave Richard. — Nicklès. Caloric engines. *Silliman's Journal*, 2e série, t. XV, p. 418. — Fleeming Jenkin. Machines à air chaud ou à gaz. *Institution of civil engineers*, 21 février 1884. — Cheverton. On the use of heated air as a motive power. *Mechanical Magazine*, t. XVIII, p. 148, 170; LXIV, p. 82. — Ramsbottom. The caloric engines. *Ibidem*, t. LXIV, p. 110. — Redtenbacher. *Calorische Maschine*. — Menabrea. Sopra un nuovo sistema di macchine motrici ad aria calda. *Memor dell' Accad. di Torino*, t. XIX, p. XCII.

[1] On pourrait reconnaître la trace de cette idée dans les anciens régulateurs de température introduits par M. Testud de Beauregard sous la forme de bains métalliques en fusion.

gramme d'air qui en est le ressort essentiel se trouve actuellement détendu. La machine a fourni un coup de piston, à titre d'*expérience unique*. Mais pour en obtenir une série, de manière à constituer une *marche industrielle*, il faudrait pouvoir recommencer l'opération et, pour cela, ramener préalablement le kilogramme aux conditions initiales, en un mot lui faire parcourir un cycle (¹). Il est donc nécessaire d'en opérer la compression, ce qui ne saurait avoir lieu sans une dépense spéciale de travail. Naturellement c'est à la machine elle-même que l'on demandera cette fourniture d'énergie; car elle doit, bien entendu, se suffire à elle-même, sans qu'il y ait besoin de la faire aider par un moteur étranger. On aura donc, pour effectuer la *course rétrograde*, à prélever un tel appoint sur la provision de travail qui a été fournie par la *course directe*. Par conséquent, la *double course* ne donnera plus intégralement, en travail *disponible*, l'équivalent exact de la chaleur fournie par la source calorifique.

On comprend même qu'elle ne donnerait plus rien du tout, si la compression devait s'effectuer suivant la même loi que la dilatation, c'est-à-dire à la même température constante. Une telle marche, théoriquement inutile, serait en outre pratiquement irréalisable, puisqu'il ne resterait rien pour faire face aux résistances passives. Il faudra donc avoir bien soin d'effectuer le retour suivant une loi différente, et l'on disposera d'ailleurs pour cela d'un nombre illimité d'hypothèses. De là une infinité de modes, dont le résultat variera depuis zéro (pour ceux qui s'écarteraient très peu du précédent) jusqu'à un certain maximum qui existe nécessairement, bien que nous n'en discernions pour le moment ni les conditions, ni la valeur.

C'est précisément cette limite qu'il est intéressant de découvrir, ainsi que le cycle qui est capable d'y conduire ; car ce sera naturellement celui-là que l'industrie devra s'attacher à réaliser autant que possible, comme étant le plus avantageux au point de vue

(¹) Cette circonstance enlève immédiatement à l'emploi des gaz parfaits l'intérêt spécial que l'on fondait sur leur propriété de ne donner lieu à aucun travail interne. En effet, avec un corps quelconque, *ramené aux conditions initiales*, ce travail, bien qu'il ait traversé dans l'intervalle certaines vicissitudes, sera nul en dernière analyse (nº 256).

pécuniaire. Cette recherche fondamentale fait l'objet des théorèmes suivants.

381 — *Théorème de Carnot.* — Reportons-nous à l'équation de Clausius (27), d'après laquelle l'entropie totale est identiquement nulle pour un cycle quelconque. Nous l'appliquerons en particulier au cycle de Carnot (fig. 242).

Le long de l'isotherme supérieure, la *source chaude*, appelée aussi *calorifère* ou *foyer*, exerce son action pour maintenir l'air à la température t_1, en lui fournissant à cet effet une quantité totale de chaleur Q_1. Le long de l'isotherme inférieure, une *source froide* [1], que l'on nomme également *frigorifère* ou *réfrigérant*, retire au gaz la chaleur Q_2 que tend à y dégager la compression, effectuée à la température constante t_2. Ces deux températures étant invariables, sortiront du signe d'intégration de l'entropie, et celui-ci, ne portant plus dès lors que sur dQ, donnera pour résultats en valeur absolue $\frac{Q_1}{t_1}$ et $\frac{Q_2}{t_2}$. Mais cette dernière fraction doit figurer avec un signe négatif, car chacun des éléments dQ représente, sur cette partie du parcours, une soustraction de chaleur.

Le long de chacune des adiabatiques, l'entropie reste constante, et son accroissement est nul pour un arc fini de la courbe.

En résumé donc, l'équation de Clausius prend la forme très simple

$$\frac{Q_1}{t_1} - \frac{Q_2}{t_2} = 0,$$

et nous donne :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{t_1}{t_2}, \tag{52}$$

d'où l'énoncé du *théorème de Carnot :*

Dans un cycle de Carnot, le rapport des deux quantités de chaleur empruntée à la source chaude et cédée à la source froide est celui des températures ABSOLUES ***de ces deux sources.***

[1] De masse infinie et de conductibilité infinie, comme la première.

382 — *Théorème du coefficient économique.* — La quantité de chaleur Q_2 qui se trouve ainsi finalement transportée de la source chaude à la source froide est presque toujours totalement inutilisable. Si quelque circonstance de détail vient à permettre, dans certains cas particuliers, d'en appliquer une partie à des usages accessoires, ce point de vue reste, même alors, étranger à la question qui nous occupe, et Q_2 y doit être considéré comme perdu.

L'industriel n'utilise donc, en définitive, que $Q_1 - Q_2$, tandis qu'il a dû fournir *et payer* la quantité Q_1. Dès lors, le *coefficient économique* (¹) de l'opération aura pour valeur :

$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (52) :

$$\varepsilon = \frac{t_1 - t_2}{t_1}; \tag{53}$$

d'où ce théorème :

Dans le cycle de Carnot, on n'utilise qu'une fraction de la chaleur dépensée, qui est marquée par le rapport de la chute de température à la température ABSOLUE *la plus élevée.*

383 — *Théorème du coefficient économique maximum.* — Nous touchons maintenant au but que nous nous étions proposé, et dont la solution va nous être fournie par l'énoncé suivant :

De tous les cycles qui fonctionnent entre deux températures extrêmes assignées, le plus avantageux est celui de Carnot.

Considérons en effet (fig. 245) la courbe représentative $A'A_1A''A_2$ d'un cycle quelconque, pour lequel on est obligé de supposer que le gaz se trouve, pendant son évolution, en rapport avec une source à température variable, ou avec une infinité de sources succes-

(¹) *Efficiency* (Macquorn Rankine). — Bourget (Du coefficient économique dans la thermodynamique des gaz parfaits. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. 29 avril 1872. — Rendement des machines thermiques. *Annales scientifiques de l'École Normale*, t. XIX, p. 111; t. XXIV, p. 150).

sives à température fixe. En y choisissant la plus haute et la plus basse de toutes, on peut montrer qu'il existe toujours, entre ces deux températures extrêmes, un cycle de Carnot dont le coefficient économique ε sera supérieur à celui ε' du cycle proposé.

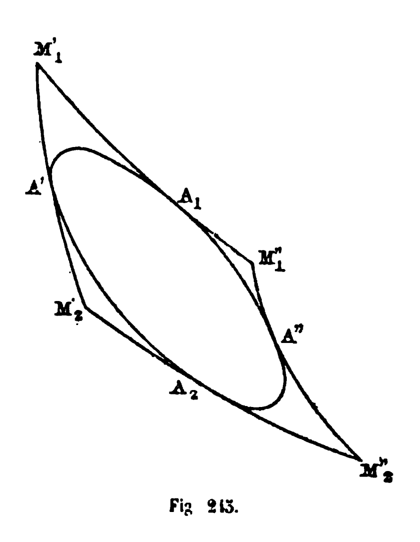


Fig. 213.

Si, par la pensée, nous redescendons, dans le plan indéfini, des isothermes les plus élevées jusqu'aux plus basses, nous en rencontrerons d'abord qui seront complètement au-dessus de la courbe; d'autres la couperont ; une troisième série se trouvera entièrement au-dessous d'elle. Il existe donc deux de ces lignes qui formeront les limites respectives de ces trois groupes. Ce seront les isothermes $M'_1M''_1$ et $M'_2M''_2$, tangentes au cycle en A_1 et A_2, et correspondant aux températures extrêmes t_1 et t_2 entre lesquelles l'air effectue son évolution. Traçons de même les deux adiabatiques $M'_1M'_2$ et $M''_1M''_2$ qui sont tangentes au cycle proposé en des points A', A''. Ce dernier se trouvera de cette manière inscrit dans un cycle de Carnot.

Séparons maintenant par la pensée les deux phases $A'A_1A''$ et $A''A_2A'$. Dans la première, on traverse la série des adiabatiques de gauche à droite, suivant l'ordre croissant des entropies, et, pendant la seconde, on revient de droite à gauche avec des entropies décroissantes. Il s'ensuit que dQ reste positif durant la première période, et négatif pendant la seconde. En d'autres termes, il se produit une absorption de chaleur par le gaz dans le premier intervalle, et une restitution pendant le second ([1]).

Le long de l'arc supérieur $A'A_1A''$, la température effective t reste constamment inférieure à celle t_1 qui correspond au seul point A_1 :

$$t < t_1.$$

([1]) On peut du reste également se reporter sous ce rapport à une observation précédente (n° 373).

On a donc identiquement, pour les diverses entropies élémentaires qui s'ajoutent dans cet intervalle :

$$\frac{dQ}{t} > \frac{dQ}{t_1},$$

et pour leur somme étendue de A′ à A″ en passant par A_1 :

$$\int_{(A_1)} \frac{dQ}{t} > \int_{(A_1)} \frac{dQ}{t_1} > \frac{1}{t_1}\int_{(A_1)} dQ > \frac{Q'_1}{t_1},$$

si nous appelons Q'_1 le total de la chaleur cédée à l'air.

On a de même sur le parcours $A''A_2A'$:

$$t > t_2,$$

$$\frac{dQ}{t} < \frac{dQ}{t_2},$$

$$\int_{(A_2)} \frac{dQ}{t} < \int_{(A_2)} \frac{dQ}{t_2} < \frac{1}{t_2}\int_{(A_2)} dQ < \frac{Q'_2}{t_2},$$

si Q'_2 représente *en valeur absolue* la chaleur restituée par l'air durant cette période.

En retranchant ces inégalités, qui sont de sens contraires, il vient :

$$\int_{(A_1)} \frac{dQ}{t} - \int_{(A_2)} \frac{dQ}{t} > \frac{Q'_1}{t_1} - \frac{Q'_2}{t_2}.$$

Or le premier membre représente la somme algébrique des entropies pour toute la périphérie du cycle; quantité qui est nulle d'après l'équation de Clausius. Il vient donc :

$$\frac{Q'_1}{t_1} - \frac{Q'_2}{t_2} < 0.$$

On en déduit :

$$\frac{Q'_1}{t_1} < \frac{Q'_2}{t_2},$$

et, comme ces diverses quantités sont essentiellement positives :

$$\frac{Q'_2}{Q'_1} > \frac{t_2}{t_1},$$

$$1 - \frac{Q'_2}{Q'_1} < 1 - \frac{t_2}{t_1},$$

$$\frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} < \frac{t_1 - t_2}{t_1},$$

c'est-à-dire enfin :

$$\varepsilon' < \varepsilon.$$

§ 2

COEFFICIENT ÉCONOMIQUE MAXIMUM

384 — *Température limite.* — Le rendement idéal d'un moteur à air chaud, qui avait semblé un instant (n° 380) pouvoir s'élever jusqu'à l'unité, ne saurait en réalité, d'après ce qui précède, dépasser la limite (1) :

$$\varepsilon = 1 - \frac{t_2}{t_1}.$$

On aura donc avantage à augmenter t_1 et à diminuer t_2 autant que possible.

La combustion du charbon fournit un moyen simple d'élever t_1, et l'on ne sera limité à cet égard que par la préservation de la machine elle-même.

Nos ressources sont beaucoup moins efficaces en ce qui concerne le réfrigérant; et si des réactions chimiques d'un autre ordre que la précédente nous fournissent encore certaines ressources pour abaisser sa température, dans une mesure d'ailleurs assez restreinte (2),

(1) Klein. Concerning $\frac{t_1 - t_2}{t_1}$ or the limit of efficiency of heat engines. *Journal of the Franklin Institute*, avril 1879.

(2) Largement dépassée aujourd'hui par l'emploi des moyens mécaniques, que nous étudierons plus tard (chap. XXI), mais dont l'introduction dans le cas actuel constituerait un cercle vicieux.

ces procédés ne sauraient, en aucun cas, être appliqués en grand pour la question actuelle. On se trouve réduit, à cet égard, à l'emploi de l'eau de source, dont la température varie peu en général, et peut être fixée ici à :

$$\theta_2 = 10^D, \qquad t_2 = 283^D.$$

La limite inférieure étant ainsi rendue fixe par la pensée, tout l'intérêt de la discussion se reporte sur t_1. On peut résoudre par rapport à cette variable l'équation précédente en fonction de ε, de manière à faire connaître à quel degré il convient d'élever la température de la source chaude, en vue de réaliser un coefficient économique de valeur donnée. Il vient ainsi :

$$t_1 = \frac{t_2}{1 - \varepsilon} = \frac{283}{1 - \varepsilon}.$$

Si, par exemple, on voulait se contenter de recueillir la moitié de la dépense pécuniaire effectuée, en consentant à perdre l'autre moitié, l'on trouverait, pour l'hypothèse $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$t_1 = 566^D, \qquad \theta_1 = 293^D,$$

température intermédiaire entre les points de fusion de l'étain (235^D) et du plomb (335^D).

Cazin a conseillé de ne pas dépasser, dans les machines à air chaud, la valeur $\theta_1 = 272^D$. M. Pochet place la limite entre 250^D et 280^D (¹). Ces chiffres restent encore inférieurs à celui que nous venons de déterminer; et, par conséquent, le coefficient économique des moteurs à air chaud ne saurait atteindre la moitié. La découverte d'un nouvel enduit, adoucissant au point de vue du frottement, et en même temps capable de résister aux températures élevées, pourrait exercer à cet égard une grande influence.

On remarquera que la température conseillée par Cazin se con-

(¹) M. Genty, ingénieur des mines, annonce avoir réalisé, au moyen d'artifices spéciaux, dans un moteur qui est encore à l'état d'expérience, des températures dépassant 1000 degrés du thermomètre usuel.

fond à peu près avec $\theta_1 = 275^D$, c'est-à-dire $t_1 = 2 \times 273$. D'après l'équation-typique, la pression en vase clos serait donc simplement doublée par ce degré d'échauffement par rapport à celle de l'air normal. Il suit de là que les machines à air chaud sont essentiellement des *moteurs à basse pression*.

Notons à ce propos les tentatives qui ont été faites en vue de remédier à cet inconvénient, dans la voie de l'échauffement d'une masse d'air préalablement mise en tension par un compresseur. On obtient par là des *machines à air chaud et comprimé* (¹). Le *moteur thermo-pneumatique* de M. Babilot se rattache à cette donnée. On peut, au moyen de cet artifice, réaliser, sans un trop grand encombrement ni des poids excessifs, un engin capable d'un effort statique plus important; donnée essentielle qui reste indépendante de la force en chevaux résultant de la vitesse que l'on juge à propos de lui imprimer.

385 — *Rendement effectif.* — Le *coefficient économique maximum* ε est loin de constituer à lui seul le *rendement effectif* d'un moteur à air chaud. Il y a pour cela plusieurs motifs.

En premier lieu, ce coefficient se rapporte exclusivement au cycle de Carnot, lequel ne saurait être pratiquement réalisé dans toute sa rigueur. Les isothermes nécessiteraient en effet l'emploi de sources présentant une masse et une conductibilité infinies. La conductibilité du gaz lui-même est insuffisante. Quant aux adiabatiques, elles exigeraient un temps d'une brièveté irréalisable, ou des matériaux sans conductibilité, ce qui est aussi éloigné que possible de la nature des métaux. Nous verrons également (n° 395) que les machines deviendraient alors excessivement encombrantes.

Il suit de là que le cycle réel sera différent de celui de Carnot, et qu'il présentera par suite (n° 383), par rapport à lui, une certaine infériorité. Nous le caractériserons, avec M. Hirn, au moyen du *coefficient économique spécifique* ε_1, destiné à mesurer le rapport du

(¹) Bourget. *Théorie mathématique des machines à air chaud*, in-4°, p. 56. — Hirsch. Moteurs aérothermiques. *Annales des Ponts-et-Chaussées*, 1874, 1er semestre, p. 400. — Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*. Traduction Cazin et Arnthal, p. 211. — The differential high-pressure air engine. *The industrial News*, janvier 1882.

rendement théorique du cycle réel au coefficient économique du cycle de Carnot qui fonctionnerait entre les mêmes températures extrêmes. On aura donc $\varepsilon\varepsilon_1$ pour le rapport effectif entre le calorique utilisé mécaniquement et la chaleur qui a été fournie à l'air.

Mais cette dernière elle-même est loin de reproduire le total qui correspondrait, dans un calorimètre de précision, à l'union précise d'une quantité suffisante d'oxygène au carbone et à l'hydrogène renfermés dans le combustible, c'est-à-dire le *pouvoir calorifique* de ce dernier. Les foyers industriels ont, à cet égard, leur rendement propre ε_2, que nous appellerons *coefficient économique thermique*, et qui mesure le rapport de la chaleur effectivement recueillie par le gaz à celle que le charbon est théoriquement capable de développer. Le piston recueille donc seulement l'équivalent dynamique de la fraction $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ de cette dernière.

Ajoutons enfin que cet organe essentiel ne constitue que le point de départ du mécanisme, et qu'un grand nombre d'autres pièces viendront accumuler successivement leurs résistances passives, en faisant subir une nouvelle diminution à l'effet utile. De là un dernier *coefficient économique dynamique* ε_3, exprimant le rapport de la *puissance disponible sur l'arbre* au nombre de *chevaux indiqués sur le piston*.

En résumé, le *rendement effectif*, que nous désignerons par η, prend comme valeur définitive :

$$(54) \qquad \eta = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

On comprend donc à quel point nous avons continué à nous éloigner de plus en plus de l'idéal si satisfaisant que semblaient nous promettre les premiers aperçus (n° 380).

Dans la réalité, les moteurs à air chaud ne paraissent pas avoir jamais utilisé couramment plus de 10 à 11 % de la chaleur théorique de combustion.

386 — *Comparaison avec les récepteurs hydrauliques.* — Une telle infériorité par rapport aux chiffres que nous avons indiqués dans la seconde Partie de ce Cours pour les divers moteurs hydrau-

liques, ne pouvait manquer de frapper l'attention. On en est venu, à un certain moment, à considérer comme un gaspillage inouï des richesses naturelles l'emploi des moteurs thermiques. Toutefois il est équitable, si l'on veut entrer dans cette voie, d'approfondir de plus près la comparaison.

Remarquons en premier lieu que le coefficient économique maximum :

$$\varepsilon = \frac{t_1 - t_2}{t_1 - 0},$$

peut être considéré comme mettant en parallèle la chute de température *utilisée*, avec la chute de température *complète* qui ferait retomber par la pensée l'état calorifique du corps jusqu'au zéro absolu. Il faudrait donc, pour retrouver dans le régime hydraulique, la représentation équitable de cette notion, au lieu de rapporter, comme nous l'avons toujours fait, l'effet utile à la hauteur de chute *disponible* H, le rattacher à la hauteur *complète* h que l'on étendrait par la pensée jusqu'au niveau de la mer, dernier terme de l'abaissement progressif que subira ce liquide avec le temps. Il conviendrait même, plus justement encore, d'étendre h en sens inverse jusqu'au point d'où est partie cette eau, c'est-à-dire jusqu'à la région des nuages, ou tout au moins, si l'on veut se limiter là, jusqu'au point d'émergence de la source du cours d'eau (1).

Tel est, en effet, l'approvisionnement total d'énergie que la nature avait accumulée dans ce liquide sous forme de travail potentiel, par l'effet de l'évaporation solaire; de même que le jeu des forces physiques, à l'époque houillère, a mis le charbon en possession de fournir, à un moment quelconque, par son union avec l'oxygène, une quantité déterminée de chaleur, et par suite, de travail dynamique, équivalente à l'énergie dépensée pour subvenir à la végétation de ces temps reculés.

On se trouve ainsi conduit à un coefficient économique *auxiliaire*, spécial à cet ordre de considérations :

$$\varepsilon' = \frac{H}{h},$$

(1) Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 222.

qu'il serait nécessaire d'introduire ici avant toute comparaison. A la vérité, il convient, une fois engagé dans cette voie, de réunir ensemble toutes les chutes industrielles qui se trouvent échelonnées sur le même cours d'eau, utilisant les unes après les autres son même débit, le long de divers segments successifs H', H'', H''', ..., de la hauteur totale h. Nous emploierons donc de préférence l'expression plus justifiée :

$$\varepsilon' = \frac{\Sigma H}{h}.$$

C'est ensuite sur ce coefficient de réduction préalable qu'il conviendra de greffer l'influence de celui d'ordre purement dynamique ε'_s, dont nous avons consigné les diverses valeurs dans la seconde Partie de ce Cours. Le rendement théorique ainsi obtenu :

$$\eta' = \varepsilon'\varepsilon'_s,$$

devient alors justement comparable à celui η du moteur à air chaud, tel que nous l'avons constitué ci-dessus.

Or il est, dans ces conditions, difficile d'effectuer aucune comparaison précise, en raison du vague complet qui plane sur la valeur de h. On reconnaît toutefois que la quantité ε' sera ordinairement si faible dans la pratique, que les termes de la conclusion précédente se trouveraient certainement intervertis. Nos moyens de captage de la puissance solaire qui est journellement déposée dans l'eau des mers par l'évaporation restent ainsi, en définitive, très inférieurs à nos procédés d'utilisation de la puissance autrefois développée par cet astre, pour la formation de la houille que nous extrayons aujourd'hui du sein de la terre.

Ajoutons cependant une dernière observation, afin de compléter cet aperçu en l'envisageant sous toutes ses faces. L'évaporation à la surface de l'Océan constitue un phénomène actuel, qui se déroule sous nos yeux, et qui durera plus longtemps que l'humanité elle-même, dont il est la sauvegarde. Nous aurons donc perpétuellement des cours d'eau à la surface de la terre. De plus leur énergie

se trouve constituée dans un état essentiellement fugitif; et si ce liquide ne coulait pas sur nos appareils, il n'en devrait pas moins retourner forcément à son point de départ, c'est-à-dire à la mer. La portion de cette puissance que nous pouvons saisir au passage est, si l'on peut s'exprimer ainsi : *autant de sauvé*. Sans cela, elle s'userait, comme le reste, en frottements du liquide sur lui-même et sur les parois de son lit. Il n'en est pas de même du stock houiller, qui, bien que d'une importance gigantesque, est absolument déterminé dans sa quantité, et ne se renouvellera pas; l'ensemble des conditions géologiques qui lui ont donné naissance ne devant plus se reproduire dans l'évolution que traverse le globe terrestre. Le combustible que l'on consomme en vain constitue donc un véritable *gaspillage;* expression qui ne saurait convenir, ainsi que je viens de l'expliquer, aux pertes opérées dans le régime hydraulique.

Concluons donc définitivement qu'il est infiniment plus regrettable pour les moteurs thermiques que pour ceux de l'hydraulique de les voir fonctionner avec une telle imperfection, et brûler à peu près dix kilogrammes de charbon pour n'en utiliser qu'un seul.

§ 3

COEFFICIENT ÉCONOMIQUE SPECIFIQUE

387 — Lorsque le tracé représentatif d'un cycle aura été effectivement spécifié, l'on pourra, par la méthode connue (n° 264), déterminer d'une part la chaleur fournie, de l'autre la partie consommée en travail. Leur rapport fera connaître le rendement théorique $\varepsilon\varepsilon_1$ de ce cycle. En le divisant par la valeur qui a été obtenue d'une manière générale pour ε (53), on obtiendra le coefficient économique spécifique ε_1.

Je prendrai comme exemples de cette recherche les cycles tels que $N'M''_1N''M'_2$ (fig. 246 et 247), qui sont formés de deux adiabatiques $N'M'_2$ et $N''M''_1$ associées, soit avec deux verticales (fig. 246), soit avec deux horizontales (fig. 247). Ils consistent en un échauf-

fement et un refroidissement opérés, soit à volume constant, soit

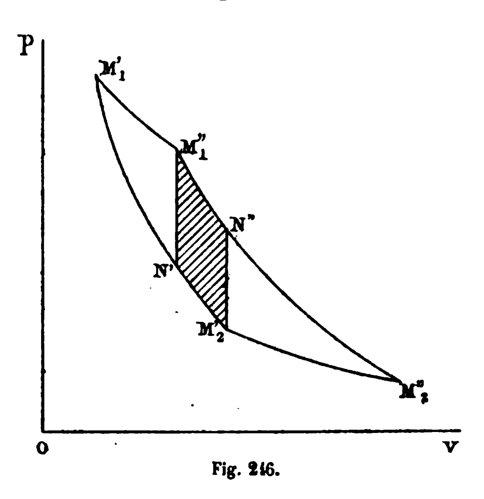


Fig. 246.

à pression constante, et séparés l'un de l'autre par une dilatation

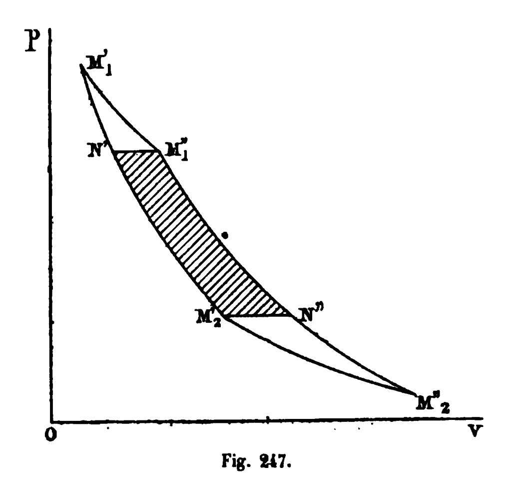


Fig. 247.

et une compression effectuées sans communication de chaleur avec l'extérieur (¹).

(¹) On a souvent (Moutier. *Éléments de thermodynamique*, 1872, p. 58. — Hirn. *Exposition analytique de la théorie mécanique de la chaleur*, p. 436 et 438. — Zeuner *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 212) rapporté ces diagrammes à des machines de Stirling et d'Ericsson, par analogie avec les cycles des machines effectives de ces auteurs (nos 396 et 398), qui sont constitués par deux *isothermes* associées avec des verticales ou des horizontales. Or ces derniers donnent lieu, comme nous le verrons plus

La quantité de chaleur échangée reste nulle, dans l'un et l'autre cas, le long des profils courbes. En ce qui concerne les côtés rectilignes, qui représentent un déplacement de chaleur à volume constant ou à pression constante, on aura :

$$mc\,(t_1 - t'),$$

de N' en M''_2, et :

$$mc\,(t'' - t_2),$$

de N'' en M'_2, en ayant soin de prendre $m = 1$ pour le premier diagramme, et $m = k = 1{,}41$ pour le second. Ce coefficient m disparaît d'ailleurs, quelle que soit celle des deux valeurs qui a été employée, lorsque l'on en vient à évaluer le rapport de la chaleur consommée en travail :

$$mc\left[(t_1 - t') - (t'' - t_2)\right], \tag{55}$$

à la première de ces deux expressions, qui représente la chaleur fournie. De là ce résultat remarquable que ces deux cycles, si différents l'un de l'autre, possèdent cependant le même rendement théorique :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = 1 - \frac{t'' - t_2}{t_1 - t'}.$$

On remarquera que, dans cette formule, t_1 et t_2, ainsi que t', constituent des données immédiates indépendantes les unes des autres, qui devront par suite subsister dans le résultat. Il n'en est pas de même de t'', qui est une fonction des précédentes, et que l'on peut éliminer à l'aide de l'équation de Clausius. Comme on a sur les contours horizontaux ou verticaux :

$$dQ = mcdt,$$

loin (n° 391), au coefficient économique maximum (pour lequel $\varepsilon_1 = 1$); résultat qui est alors atteint par la réalisation du type *ternaire*, avec le secours d'un régénérateur de chaleur, combinaison absolument différente de celle du système *binaire*, dont nous n'avons pas cessé de nous occuper jusqu'ici. Il importe par conséquent de se tenir en garde contre toute confusion à cet égard.

il viendra pour l'entropie totale (le résultat étant nul le long des adiabatiques) :

$$\int \frac{dQ}{t} = mc \int \frac{dt}{t}.$$

L'équation de Clausius deviendra donc :

$$L\frac{t_1}{t'} - L\frac{t''}{t_2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{t_1}{t'} = \frac{t''}{t_2}.$$

En tirant de cette égalité la valeur de t'' pour la reporter dans l'expression de $\varepsilon\varepsilon_1$, il vient :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = 1 - \frac{t_2\left(\frac{t_1}{t'} - 1\right)}{t_1 - t'} = 1 - \frac{t_2}{t'}.$$

En divisant maintenant par la valeur de ε (53), nous obtenons pour celle du coefficient économique spécifique :

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \frac{t_2}{t'}}{1 - \frac{t_2}{t_1}}.$$

388 — Pour que l'écart entre le cycle effectif et celui de Carnot, qui correspondrait au maximum d'effet utile, fût le moindre possible; en d'autres termes, pour rapprocher autant que nous le pourrons ε_1 de l'unité, il faudrait resserrer indéfiniment l'intervalle de t' et de t_1, c'est-à-dire faire tendre vers zéro la distance $N'M_1''$. Mais il est facile de voir que l'on réduirait par là sans limites la quantité absolue de travail, c'est-à-dire la force de la machine, ce qui est inacceptable.

Reportons-nous au contraire à l'expression (55) de la chaleur utilisée sous forme de travail, et cherchons à la rendre maximum.

Le facteur variable devient, quand on y remplace t'' par sa valeur :

$$(t_1 + t_2) - \left(t' + \frac{t_1 t_2}{t'}\right).$$

La partie négative nous présente la somme de deux quantités dont le produit est constant. Elle deviendra donc minima pour l'égalité de ses deux termes :

$$t' = \frac{t_1 t_2}{t'}, \qquad t' = \sqrt{t_1 t_2}.$$

Le rendement effectif prend alors la forme :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = 1 - \sqrt{\frac{t_2}{t_1}},$$

et le coefficient spécifique :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}$$

Si, par exemple, nous adoptons pour t_2 la valeur 273 qui correspond à la glace fondante, il viendra pour la température de l'eau bouillante et pour une série d'autres également espacées :

$t_1 =$ 273.	$\varepsilon_1 =$ 0,500
373.	0,541
473.	0,570
573.	0,591
673.	0,612
773.	0,627

§ 4

FONCTIONNEMENT GÉNÉRAL DU MOTEUR A AIR CHAUD

389 — La machine à air chaud d'effet utile maximum étant celle qui réaliserait théoriquement le cycle de Carnot, il ne sera pas inutile de suivre ici avec détail les diverses phases de son fonctionnement. Elles sont au nombre de six pour la *double course*, à savoir : trois pour la course *directe* ou *motrice*, et trois pour la course *rétrograde* ou *résistante*.

I. — COURSE DIRECTE. — 1° PLEINE PRESSION. — Le gaz se trouve renfermé dans un *réservoir* indéfini, que le *calorifère* maintient à la température t_1. Un système quelconque de distribution démasque la *lumière* qui met cette enceinte en communication avec le cylindre. La pression p'_1 du réservoir (qui, ainsi que t_1, constitue une donnée immédiate et arbitraire) sollicite le piston à se porter en avant, en surmontant la résistance qu'il rencontre. On referme la lumière dès que le mouvement du piston a engendré l'espace v'_1 capable de loger un kilogramme d'air, volume qui a pour valeur (10) :

$$v'_1 = \frac{Rt_1}{p'_1}.$$

Telle est la phase de *pleine pression*. Le récepteur recueille pendant cet intervalle (3) le travail moteur :

$$p'_1 v'_1.$$

Ce travail est représenté graphiquement sur la figure 248 par l'aire $OMM'_1m'_1$ que l'on y a mise en évidence au moyen de hachures pointillées.

2° DÉTENTE ISOTHERME. — L'air se trouve dorénavant séparé du réservoir, de manière à pouvoir détendre sa pression ; mais il n'a pas cessé pour cela de subir l'influence du calorifère, qui conti-

nue à lui fournir la chaleur nécessaire pour maintenir constante sa température t_1. Le piston se trouve ainsi poussé jusqu'à ce que

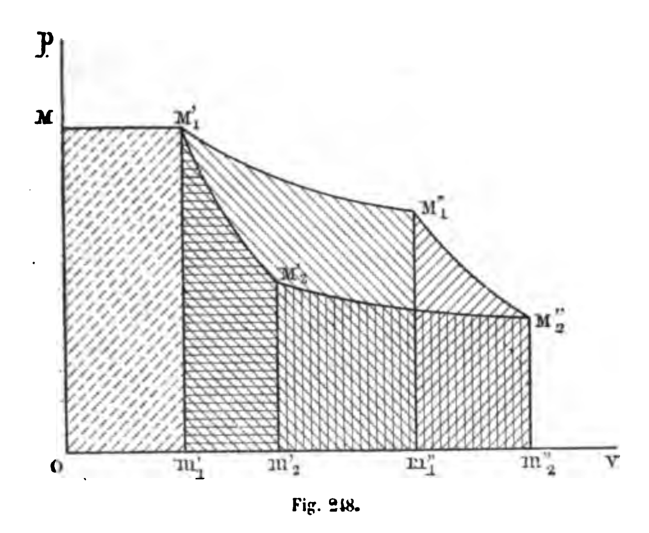


Fig. 218.

l'espace qui se trouve derrière lui ait acquis une valeur *arbitraire* v''_1.

Telle est la phase de *détente isotherme*. Le *degré de détente* $\frac{1}{\delta}$ [1] est fourni par l'expression :

$$\delta = \frac{v''_1}{v'_1} = \frac{v''_1 p'_1}{Rt_1},$$

en fonction des trois arbitraires de la question. Le récepteur recueille pendant cet intervalle (20) le travail moteur :

$$(56) \qquad Rt_1 \, L\delta.$$

Ce travail est représenté graphiquement par l'aire $M'_1M''_1m'_1m''_1$ que l'on a recouverte de hachures inclinées de gauche à droite.

[1] Nous évaluerons, suivant l'usage, la détente dans les machines d'après les volumes, et non d'après les pressions. Ce n'est que dans le mode isotherme qu'il y a identité entre ces deux points de vue, en raison de la loi de Mariotte. On ne devra donc pas confondre l'une avec l'autre les deux notations $\frac{1}{\delta}$ et $\frac{1}{\rho}$. Il reste d'ailleurs sous-entendu que nous prenons $\delta > 1$ (n° 267).

3° Détente adiabatique. — A partir de ce moment, le gaz se trouve définitivement soustrait à l'action du calorifère. Il continue encore à se détendre, mais il effectue cette nouvelle expansion dans une enceinte imperméable à la chaleur. Le degré $\frac{1}{\delta'}$ de cette détente est fourni par l'expression :

$$\delta' = \frac{v''_2}{v''_1};$$

il n'est plus arbitraire comme le précédent. Si l'on se donne *à volonté* la température t_2 du réfrigérant, on aura (24) :

$$\delta' = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Ni l'une ni l'autre de ces deux *détentes partielles* ne doit d'ailleurs être confondue avec la *détente totale* $\frac{1}{\Delta}$ de la machine. Elles en forment en quelque sorte les deux composantes. Celle-ci sera fournie par l'expression :

$$\Delta = \frac{v''_2}{v'_1} = \delta\delta',$$

c'est-à-dire en fonction des quatre arbitraires t_1, t_2, p'_1, v''_1 :

$$\Delta = \frac{v''_1 p'_1 t_1^{\frac{2-k}{k-1}}}{R t_2^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Telle est la phase de *détente adiabatique*. Le récepteur recueille pendant cet intervalle (22) le travail moteur :

$$\frac{R}{k-1}(t_1 - t_2).$$

Ce travail est représenté graphiquement par l'aire $M''_1M''_2m''_1m''_2$ que l'on a recouverte de hachures inclinées de droite à gauche.

II. — Course rétrograde. — La course directe est alors terminée, et le piston a fini par engendrer un volume total :

$$v''_2 = v''_1 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Il a recueilli, en définitive, une quantité de travail moteur égale à la somme des trois précédentes :

$$p'_1 v'_1 + Rt_1 L\delta + \frac{R}{k-1}(t_1 - t_2).$$

Ce travail est représenté par l'aire totale $OMM'_1M''_1M''_2m''_2$.

Alors commence la course rétrograde, pendant laquelle le piston subit maintenant de la part de l'air qui remplit le cylindre, non plus, comme jusqu'à présent, un effort moteur, mais, au contraire, une résistance qu'il doit surmonter. De là un travail négatif que nous devrons ajouter algébriquement au précédent.

Pour y subvenir, on prélève l'énergie nécessaire, soit sur la force vive qui se trouve emmagasinée dans le volant, s'il s'agit d'une *machine à simple effet*, pour laquelle le fluide n'actionne jamais qu'une seule face du piston, soit, avec les machines à double effet, sur le travail moteur dorénavant développé par un nouveau kilogramme d'air qui va commencer à travailler à son tour sur la face opposée, pour accomplir sa propre course directe.

4° Compression isotherme. — Dans la première phase de la course rétrograde, le piston s'emploie à ramener l'air du volume précédent v''_2 à un volume moindre v'_2 qui n'est pas arbitraire, et qui se détermine d'après la proportion des quatre volumes du cycle de Carnot (51) :

$$v'_2 = v'_1 \frac{v''_2}{v''_1} = v'_1 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Pendant cette période, le gaz reste en communication avec le réfrigérant, qui maintient sa température à la valeur constante t_2.

Telle est la phase de *compression isotherme*. Le récepteur

surmonte, pendant cet intervalle, un travail résistant qui a pour valeur absolue :

$$Rt_2 L\delta.$$

La valeur de δ reste ici la même que ci-dessus, en raison de la proportion des quatre volumes.

Ce travail est représenté graphiquement par l'aire $M''_2M'_2m''_2m'_2$ que l'on a recouverte de hachures verticales.

5° Compression adiabatique. — La communication se trouve alors interrompue entre le réfrigérant et le gaz. La compression se poursuit, mais dorénavant dans une enceinte imperméable à la chaleur. On ramène ainsi, de v'_2 à v'_1, le volume occupé par le fluide, et le degré de cette compression est marqué comme tout à l'heure par $\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$, c'est-à-dire δ'.

Telle est la phase de *compression adiabatique*. Le récepteur surmonte pendant cet intervalle un travail résistant qui a pour valeur absolue :

$$\frac{R}{k-1}(t_1 - t_2).$$

Ce travail est représenté graphiquement par l'aire $M'_2M'_1m'_2m'_1$ que l'on a recouverte de hachures horizontales.

6° Refoulement. — La lumière de communication entre le cylindre et le réservoir d'alimentation se rouvre à ce moment. Cette enceinte se trouve en équilibre de température et de pression avec le cylindre, puisque l'air a été finalement ramené aux conditions représentées sur le diagramme par le point M'_1, lesquelles ne diffèrent pas de celles du réservoir lui-même. Le piston achevant son mouvement pour revenir au point mort, repousse définitivement le kilogramme d'air dans ce réservoir.

Telle est la phase de *refoulement*. Le récepteur surmonte, pendant cet intervalle, un travail résistant à pression constante qui a pour valeur absolue :

$$p'_1v'_1.$$

Ce travail est représenté graphiquement par l'aire $M'_1Mm'_1O$, que l'on a recouverte de hachures pointillées.

La course rétrograde est alors achevée. Elle a donné lieu à un ensemble de travaux résistants dont la valeur absolue est la somme des trois précédentes :

$$Rt_2 L\delta + \frac{R}{k-1}(t_1 - t_2) + p'_1 v'_1.$$

Ce travail est représenté par l'aire totale $OMM'_1M'_2M''_2m_2$.

Si nous retranchons ce trinôme du précédent, il restera pour le travail effectif de la course totale :

$$(57) \qquad R(t_1 - t_2) L\delta,$$

exprimé, comme on le voit, en fonction des températures et du degré de détente *isotherme*. Ce travail est représenté par l'aire intérieure du noyau $M'_1M'_2M''_1M''_2$.

390 — Si, au lieu d'opérer précisément sur un kilogramme d'air, comme nous l'avons supposé pour plus de simplicité, l'on emploie un poids quelconque, le résultat lui sera évidemment proportionnel. On peut donc dire que *le travail théoriquement recueilli pendant la course double d'une machine à air chaud à simple effet, ou dans une course simple d'une machine à double effet, capables l'une et l'autre de réaliser le cycle de Carnot, a pour valeur le produit de la constante numérique* R = 29,2814 *par le poids de la cylindrée d'air, par la chute de température, et par le logarithme* NÉPÉRIEN *du degré de détente* ISOTHERME.

On peut également substituer, dans cet énoncé, le logarithme ordinaire au logarithme népérien, en remplaçant le facteur numérique précédent par :

$$2{,}3026 \times 29{,}2814 = 67{,}4254.$$

Nous avons vu que le *rendement* d'un cycle de Carnot ne dépend que de ses températures extrêmes (53), c'est-à-dire de la *zone*

isotherme sur laquelle il se trouve prélevé, mais nullement de la longueur qu'il y occupe. Son aire, ou le *travail absolu* qu'il permet de réaliser, s'y relie au contraire directement. La formule précédente nous montre qu'il n'en dépend que par le facteur Lδ, c'est-à-dire d'après le degré de détente isotherme. On peut donc, tout en restant dans une même zone, y tracer une infinité de cycles de Carnot équivalents les uns aux autres. Ils s'allongent progressivement au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de l'axe des ordonnées, de manière à conserver une même valeur pour le rapport δ.

Quant au degré de détente adiabatique δ', il ne figure pas explicitement dans la valeur de l'aire, non plus, par conséquent, que celui de la détente totale Δ. On a vu d'ailleurs que le degré δ' dépend du *rapport* des températures absolues, tandis que la valeur du travail réalisé ou de l'aire totale ne renferme que leur *différence*.

Il est facile de vérifier ici le théorème du coefficient économique (n° 382). En effet, pour réaliser l'effet utile (57), le calorifère a dû fournir, dans la course directe, le travail de pleine pression par l'intermédiaire du réservoir, et directement celui de la détente isotherme. On a recueilli dans le réfrigérant, pendant la course rétrograde, le travail de la compression isotherme, et dans le réservoir, celui du refoulement. Pendant les deux phases adiabatiques, le gaz a fonctionné seul, et comme il est revenu à son état initial, il y a eu compensation. Nous avons déjà dit, d'ailleurs, que le réfrigérant est impuissant dans la pratique à rendre utilement ce qu'il recueille. Peu importe donc que l'on ait récupéré *au point de vue physique* la chaleur qui correspond à la compression isotherme. Elle n'en est pas moins *industriellement* perdue. Il ne reste par suite à faire entrer en ligne de compte que les trois termes relatifs au calorifère. Or on voit que le travail fourni par le réservoir pour la pleine pression lui a été restitué par le refoulement. Il ne reste ainsi en définitive que l'énergie qui a été dépensée directement par la source chaude pendant la détente isotherme (56). Le rapport de la chaleur utilisée à la dépense fournie est donc bien :

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1}.$$

§ 5

RÉGÉNÉRATEURS DE CHALEUR

391 — Le *type binaire* que nous venons d'étudier jusqu'ici est formé de deux sources de chaleur ou de froid, c'est-à-dire de deux corps étrangers avec lesquels le gaz vient successivement se mettre en rapport. Nous constituerons, dans un nouvel ordre de considérations, un *type ternaire*, en adjoignant aux deux sources précédentes un troisième corps appelé *régénérateur* [1]. De tels systèmes présentent cette circonstante remarquable, qu'au lieu de n'admettre, comme les précédents, qu'une seule voie (le cycle de Carnot) pour parvenir au maximum d'effet utile, ils en présentent, au contraire, une infinité. La valeur de ce maximum reste d'ailleurs la même que ci-dessus (53).

La circonstance qui a permis, dans le raisonnement employé ci-dessus (n° 367), d'arriver à cette expression, tenait à la disparition spontanée de l'entropie le long des adiabatiques du cycle de Carnot. Or le résultat final serait le même si, au lieu de présenter une entropie *perpétuellement nulle* pour chacune de ses différentielles individuellement, les deux contours $N'_1N'_2$, $N''_1N''_2$ (*fig.* 249) destinés à relier à droite et à gauche deux isothermes $N'_1N''_1$, $N'_2N''_2$, qui ne sauraient d'elles-mêmes se rencontrer, présentaient *par leur ensemble* une *entropie totale nulle*. Si, d'ailleurs, on demande

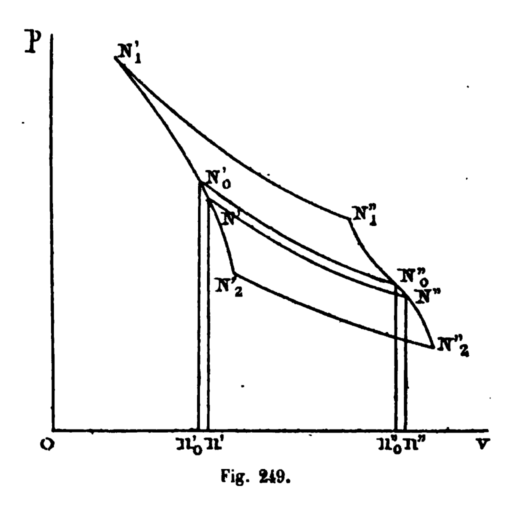


Fig. 249.

[1] Ou *tamis respirateur* (Moutier. *Éléments de thermodynamique*, p. 66).

que cette propriété subsiste pour des isothermes indéterminées, il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour une zone isotherme élémentaire quelconque $N'_0N''_0N'N''$. On pourra, dans ces conditions, se donner à volonté, pour fermer le cycle, une *ligne entièrement arbitraire* $N'_1N'_0N'N'_2$, et il suffira de lui associer une seconde courbe $N''_1N''_0N''N''_2$ tellement choisie que, pour chacun de ses éléments N''_0N'', l'entropie infinitésimale soit égale en valeur absolue à celle de l'élément correspondant N'_0N' que les isothermes de ses extrémités découpent sur la courbe proposée. De cette manière, si cette dernière est parcourue en montant, par exemple, la conjuguée l'est en descendant, les deux entropies élémentaires sont de signes contraires, et leur somme algébrique s'annule identiquement.

Remarquons d'ailleurs que, la température t étant la même aux deux points homologues N' et N'' marqués par une ligne isotherme, l'égalité des entropies $\frac{dQ}{t}$ entraîne celle des quantités de chaleur dQ, c'est-à-dire des travaux élémentaires, ou enfin des aires $N'_0N'n'_0n'$ et $N''_0N''n''_0n''$. La question se trouve ainsi réduite à un simple problème de géométrie.

392 — La condition à remplir s'exprimera par l'égalité :

$$p'dv' = p''dv'',$$

puisque v et p représentent les coordonnées auxquelles sont rapportées les deux courbes. La correspondance des points N' et N'' étant d'ailleurs fournie par une isotherme, on aura, d'après la loi de Mariotte qui en constitue l'équation :

$$p'v' = p''v''.$$

Il vient donc, en divisant membre à membre :

$$\frac{dv'}{v'} = \frac{dv''}{v''},$$

et, en intégrant avec une constante arbitraire $L\mu$:

$$Lv'' = Lv' + L\mu,$$

$$v'' = \mu v'.$$

Il s'ensuit la relation corrélative :

$$p'' = \frac{p'}{\mu}.$$

La loi de transformation destinée à fournir la courbe associée d'une ligne proposée [1] *consiste donc à modifier les coordonnées courantes en raison inverse l'une de l'autre dans l'équation de cette dernière.*

Si le profil arbitraire est représenté par :

$$f(v,p) = 0,$$

la courbe conjuguée aura pour équation .

$$f\left(\mu v, \frac{p}{\mu}\right) = 0,$$

μ formant le *module de la transformation.*

On voit ainsi que, non seulement l'un des côtés du cycle peut-être tracé arbitrairement, mais qu'il reste encore loisible de choisir parmi une infinité de valeurs le module de la transformation. Chacun des cycles ainsi constitués fournira, dans le type ternaire, le coefficient économique que procure le type binaire par son cycle de Carnot.

393 — On peut d'après cela se figurer plus clairement l'intervention du troisième corps. Jusqu'ici, une fois que le fluide était soustrait à l'action du calorifère, sa température tombait de t_1 à t_2 dans une enceinte incapable d'exercer sur lui aucune influence. Actuellement dQ n'est plus nul à chaque instant. Pour opérer le

[1] Rankine appelle ces courbes *isodiabatiques* l'une par rapport à l'autre.

refroidissement, on fait intervenir une paroi active qui soutire à l'air, suivant une loi quelconque, les quantités de chaleur capables de déterminer l'abaissement progressif de sa température.

Elle ne le fait pas dans les mêmes conditions que le réfrigérant, qui engouffre définitivement, et en pure perte, durant la phase de compression isotherme, les calories dont il est chargé de dépouiller le gaz. Le régénérateur les reçoit seulement en dépôt. Il les *emmagasine* momentanément pour les restituer ultérieurement, aux instants et dans la proportion convenables, pendant la quatrième phase du cycle. Ainsi donc, tandis que le calorifère se borne à fournir, et le réfrigérant à soustraire de la chaleur à l'air, ce troisième organe la recueille et la rend alternativement. Il en devient transitoirement le dépositaire, pour la régénérer au moment opportun. De là son nom de régénérateur.

394 — Appliquons le mode de transformation géométrique qui nous occupe aux divers tracés que nous avons déjà pris comme exemples (n° 372), à savoir l'isotherme, l'adiabatique, la verticale, l'horizontale.

L'isotherme des gaz parfaits a pour équation :

$$pv = C.$$

Sa transformée sera :

$$\frac{p}{\mu} \cdot \mu v = C.$$

La formule se reproduit donc elle-même, et chaque isotherme reste immuable dans sa transformation. Il est clair d'ailleurs que ces courbes ne peuvent nous apporter aucun secours, pour fermer les cycles qui nous occupent.

L'adiabatique a pour équation :

$$pv^k = C, \tag{58}$$

et sa transformée :

$$\frac{p}{\mu} \cdot (\mu v)^k = C,$$

c'est-à-dire :

$$pv^k = C\mu^{1-k}.$$

On retrouve ainsi encore une adiabatique, mais ce n'est plus identiquement la même, comme dans le cas précédent, car la constante a changé de valeur.

Remarquons toutefois que cette propriété restant indépendante de la valeur de k, appartient non seulement aux adiabatiques des gaz parfaits, pour lesquelles $k = 1,41$, mais encore à une infinité d'autres lignes algébriques qui ont reçu le nom de *courbes binômes*, et qui peuvent rendre d'utiles services pour la constitution des cycles (¹). Ces courbes formeront, pour la transformation qui nous occupe, des familles d'anallagmatiques pour les diverses valeurs de l'exposant. On sait que ce terme signifie que chacune des lignes de cette nature a pour conjuguée un autre profil du même groupe, qui ne diffère du précédent que par la valeur du paramètre du second membre. L'identité complète de la proposée et de sa conjuguée ne peut d'ailleurs avoir lieu, par la disparition de μ de ce second membre, que pour l'hypothèse $k = 1$ qui caractérise les isothermes, ainsi que nous l'avons reconnu directement pour ces dernières.

Passons aux évolutions thermiques qui s'effectuent à volume constant ou à pression constante. Elles sont représentées par des verticales :

$$v = C,$$

ou des horizontales :

$$p = C',$$

qui se transforment respectivement en d'autres verticales :

$$v = \frac{C}{\mu},$$

(¹) Au contraire, une adiabatique ayant pour conjuguée, ainsi que nous venons de le voir, une autre adiabatique, ne fait que reproduire le cycle de Carnot ; et le régénérateur manque alors à sa destination, puisqu'il n'a rien à emmagasiner suivant l'une des deux courbes, ni à rendre le long de l'autre.

et d'autres horizontales (¹) :

$$p = \mu C'.$$

De là deux types très simples de cycles ternaires à coefficient maximum, composés de verticales (²) et d'isothermes (fig. 250), ou d'horizontales (³) et d'isothermes (fig. 251) (⁴).

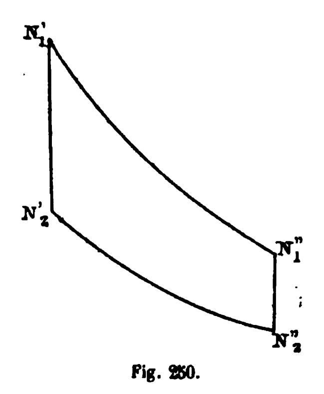


Fig. 250.

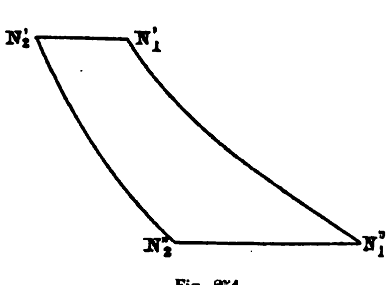


Fig. 251.

395 — Les régénérateurs, pour remplir leur rôle avec netteté

(¹) Ces nouvelles anallagmatiques ne sont du reste que des cas-limites des précédentes, pour les valeurs nulles ou infinies de l'exposant.

Je consignerai encore ici cette remarque plus générale, que *la transformation n'altère jamais le degré des courbes algébriques, ni même, dans ce degré, les différents groupements de termes de divers ordres qui correspondent à des classements déterminés.* C'est ainsi que les courbes binômes correspondent à d'autres courbes binômes du même degré ; une droite quelconque à une autre droite, qui est tangente à la même isotherme : une conique à une autre conique du même genre, etc.

Ajoutons encore que la tangente de la transformée d'une courbe quelconque se déduira très facilement du tracé de la tangente à la proposée, supposée connue. On remarquera en effet l'inaltérabilité, par la transformation considérée, de l'expression différentielle :

$$\frac{p\,dv}{v\,dp}.$$

On aura donc, de l'une à l'autre courbe, aux points correspondants, la relation :

$$\frac{\text{tang}\ \alpha}{\text{tang}\ \beta} = \frac{\text{tang}\ \alpha'}{\text{tang}\ \beta'},$$

si α et β désignent les inclinaisons respectives de la droite qui joint l'origine au point décrivant, et de la tangente en ce point. Les trois premiers termes de la proportion étant connus, la construction du dernier revient à celle d'une quatrième proportionnelle.

(²) Machine de Stirling (voy. chap. XXIV, § 1).

(³) Machine d'Ericsson (voy. chap. XXIV, § 2).

(⁴) On a même imaginé, sous le nom de machine Girard (Cazin. *Théorie élémentaire*

dans les mouvements rapides, doivent présenter, en même temps qu'une grande conductibilité, une surface considérable. On a employé dans ce but des toiles métalliques, de la grenaille, des tubes de verre multipliés. Ce sont des organes encombrants, susceptibles de s'encrasser, et surtout des occasions de résistances passives notables. Aussi cette conception très ingénieuse [1] était-elle, après un certain nombre de tentatives, tombée dans un grand discrédit [2]. Le dernier mot ne semble toutefois pas dit à cet égard, et un certain retour d'opinion s'est manifesté dans ces derniers temps.

On a cherché notamment à trouver dans l'emploi de ces organes un moyen de diminuer les tensions extrêmes des gaz, et, par suite, les volumes des cylindres, en un mot les dimensions et le poids de la machine, en la dispensant de présenter une aussi grande résistance aux pressions intérieures. Considérons par exemple un

des machines à air chaud, 1865, p. 36), un cycle composé (fig. 252) d'une verticale, d'une horizontale et de deux isothermes. Mais il est clair que cette combinaison ne rentre nullement dans les conditions actuelles, et que l'on ne doit pas en attendre le coefficient maximum.

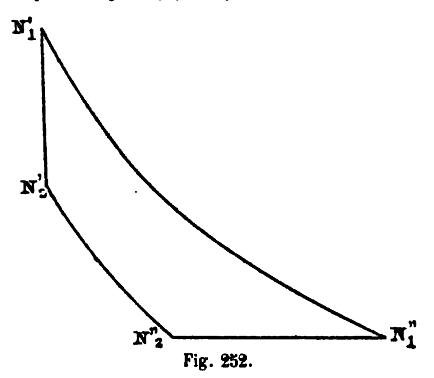


Fig. 252.

L'arc $N''_2N'_2$ représente alors, dans la pensée de l'inventeur, une compression isotherme subie dans le réfrigérant; $N'_2N'_1$, l'échauffement à volume constant sur le régénérateur et le foyer; $N'_1N''_1$, la détente isotherme dans le cylindre récepteur; enfin $N''_1N''_2$, la rétraction opérée librement et à pression constante sur le régénérateur refroidi.

[1] Introduite en 1816 par Robert Stirling, et appliquée plus tard par James Stirling, Ericsson, Siemens, Franchot, etc.

[2] Les opinions les plus opposées se sont fait jour au sujet de l'emploi des régénérateurs. M. Zeuner porte sur eux le verdict suivant (*Théorie mécanique de la chaleur*, Gauthier-Villars, 1869, p. 206) : « En un mot, les régénérateurs, sur lesquels on a beaucoup compté lors de leur invention pour perfectionner les machines à air, ne produisent aucun effet. C'est M. Hirn qui, le premier (*Exposition analytique de la théorie mécanique de la chaleur*), a fait remarquer que les régénérateurs ne peuvent produire un effet utile dans les machines à feu qui travaillent convenablement. »

M. Hirsch, dans son mémoire sur la théorie des machines aérothermiques (*Annales des Ponts et Chaussées*, 5e série, t. VII, p. 428 et 436), s'est attaché, au contraire, à réfuter les objections élevées contre l'emploi de ces organes, dont il a présenté une théorie détaillée sous le rapport des échanges de chaleur dont ils sont le théâtre.

cycle de Carnot $M'_1M''_1M'_2M''_2$ (fig. 253), et menons par ses sommets M'_1 et M''_2 des courbes $M'_1N'_2$, $M''_2N''_1$ représentées par l'équation binôme (58) avec un exposant supérieur à celui des adiabatiques $k > 1,41$. Ces lignes, conjuguées l'une de l'autre, ainsi que nous l'avons reconnu, ont, d'après une remarque précédente (n° 372), une pente plus rapide que les adiabatiques en chaque point. Dès lors $M'_1N'_2$ se trouvera au-dessous de $M'_1M'_2$. De même le prolongement de $N''_1M''_2$ se dirigerait au-dessous de celui de $M''_1M''_2$. Par conséquent $M''_2N''_1$ sera au-dessus de $M''_2M''_1$. Dans ces conditions, le cycle $M'_1N''_1N'_2M''_2$ sera évidemment plus grand que le proposé $M'_1M''_1M'_2M''_2$. Il fournira plus de travail avec le même volume Om''_2 pour le cylindre, et la même pression extrême $m'_1M'_1$. Il permettrait donc inversement, à égalité de puissance, de réduire ces deux éléments caractéristiques, ainsi qu'il vient d'être énoncé, et sans altérer en rien le coefficient économique théorique.

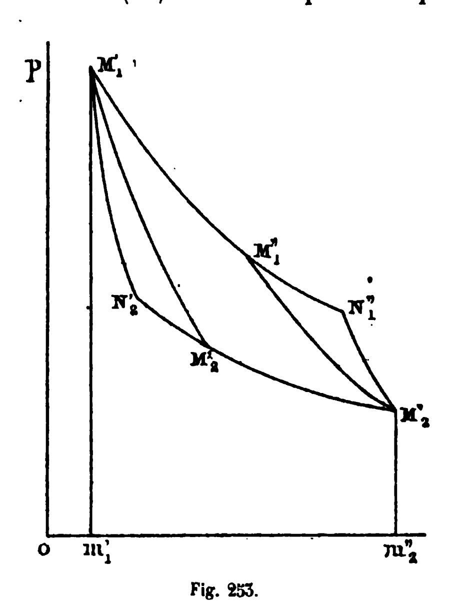


Fig. 253.

CHAPITRE XXIV

MOTEURS A AIR CHAUD. — DESCRIPTION

—

§ 1

MACHINE DE STIRLING

396 — La machine créée en 1816 par Robert Stirling, et perfectionnée depuis cette époque par James Stirling ([1]), réalise le premier des deux diagrammes indiqués ci-dessus (n° 394), à savoir celui qui est formé de verticales et d'hyperboles équilatères (fig. 250). Son évolution comprend donc un échauffement et un refroidissement à volume constant, séparés par une détente et une compression à température constante. La figure schématique 254 donne une idée du dispositif employé à cet effet.

Un *piston-déplaceur* rempli de plâtre, de poussière de brique, ou de toute autre substance peu conductrice de la chaleur, se meut au contact de la paroi intérieure d'une double enveloppe. La paroi extérieure se termine vers le bas en forme de calotte sphérique, directement chauffée par le foyer qui se trouve situé au-dessous d'elle ([2]). Le piston présente une forme identique, de

([1]) Verdet. *Théorie mécanique de la chaleur*, t. I, p. 139. — Briot. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 88. — Hirn. *Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur*, 1re édition, p. 436. — Moutier. *Éléments de thermodynamique*, 1872, p. 57. — Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 212. — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*, p. 382. — *Proceedings of the Institution of civil Engineers*, 1845 et 1854.

([2]) Dans le but d'améliorer le rendement effectif en développant la surface de

manière à pouvoir s'y emboîter, au moment du passage au point mort. Dans l'intervalle, l'on a accumulé de nombreux tubes de verre, qui ne laissent entre eux que d'étroits passages. Leur ensemble constitue le régénérateur, destiné à dépouiller de son calorique l'air chaud qui remonte du foyer à la partie supérieure, pour le céder inversement à l'air froid qui reviendra ultérieurement de cette région. Dans le haut sont concentrées les spires d'un serpentin parcouru par un courant d'eau froide, et destiné à compléter la chute de température que subit l'air quand il parvient dans cet espace. En ce point, s'embranche un tube de communication, conduisant au cylindre moteur, dans lequel se meut le *piston-récepteur*, dont la tige transmettra à un mécanisme analogue à celui des machines à vapeur le travail recueilli. Le jeu de cet appareil s'effectue de la manière suivante.

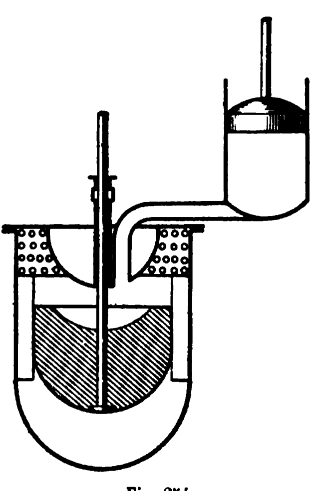


Fig. 254.
Machine à air chaud de Stirling.
(Coupe schématique).

397 — Le piston-déplaceur reçoit de la machine motrice un mouvement alternatif, à l'aide de transmissions appropriées (qui ont été supprimées pour simplifier la figure). Supposons le parvenu à la partie supérieure de sa course. L'espace inférieur est actuellement plein d'air qui vient de subir l'action du foyer, et se trouve porté à la température t_1. En redescendant sous l'empire du volant, le piston déplace cet air, qui filtre à travers les nombreux trous pratiqués dans la cloison intérieure, pénètre à l'intérieur de la couronne annulaire, et en parcourt les interstices, en se dépouillant d'une partie de sa chaleur au profit des tubes de verre qui constituent le régénérateur. Lorsqu'il parvient à la

chauffe, J. Napier et Macquorn Rankine ont modifié le foyer à l'aide d'un dispositif dont la coupe rappelle celle d'une chaudière Field (Macquorn Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*, traduction Richard, p. 301).

partie supérieure, il achève de se refroidir au contact du serpentin, et de retomber à la température t_2. C'est la *phase du refroidissement de t_1 à t_2 à volume constant.*

La rétraction du gaz rappelle alors le piston-récepteur qui se trouvait au sommet de sa course en même temps que le précédent. La température ne change pas pour cela, puisque l'air reste pendant ce temps au contact du serpentin. C'est la *phase de compression à la température constante t_2.*

Le mouvement descendant du récepteur actionne, par l'intermédiaire des transmissions, le déplaceur, dont il détermine l'ascension. L'air situé au-dessus de ce dernier se trouve donc ramené en sens contraire de son premier trajet, au travers du régénérateur, qui lui restitue alors les calories emmagasinées pendant la course inverse. Il revient ainsi au contact du foyer pour y reprendre la température t_1. C'est la *phase de réchauffement de t_2 à t_1 à volume constant.*

La dilatation qui accompagne cette élévation de température soulève le piston-récepteur, et le renvoie à la partie supérieure de sa course, en exerçant sur lui l'effort impulsif qui développe du travail moteur. C'est la *phase de dilatation à la température constante t_1.*

Le cycle est alors complet, et se reproduira indéfiniment. Il est inutile d'ajouter que dans cet appareil, et pour tous les suivants, le caractère des quatre phases est loin de se trouver aussi rigoureusement réalisé que nous venons de l'expliquer. Il constitue simplement le type essentiel de la conception fondamentale, dont la réalité s'écarte plus ou moins.

Au fur et à mesure que se succèdent de semblables coups de piston, à partir de la mise en train, les tubes et les parois, suivant leur degré de rapprochement du foyer ou du serpentin, tendent vers un état stationnaire et gradué de température. On remarquera qu'une partie du volume d'air enfermé dans l'appareil ne quitte pas la région supérieure, à savoir le cylindre récepteur et le tube de communication. Cette masse ne fait pas partie, à proprement parler, du gaz actif qui parcourt dans son évolution le cycle de Stirling. Il constitue simplement une transmission mécanique souple et commode entre le fluide moteur proprement dit et le piston-récepteur.

§ 2

MACHINE D'ERICSSON

398 — Le capitaine Ericsson a créé successivement deux types distincts de machine à air chaud ([1]). Le premier d'entre eux (1852), que nous décrirons ici, comprend un régénérateur, dont l'autre était dépourvu.

L'ancien moteur Ericsson réalise le second des diagrammes simples qui ont été indiqués ci-dessus (n° 394), à savoir celui qui est composé d'horizontales et d'hyperboles équilatères (fig. 251). Le cycle comprend donc un échauffement et un refroidissement à

([1]) Ericsson (Caloric engine. *Mechanical Magazine*, t. LVI, p. 447. — Caloric engine. *Athenæum*, 1853. p. 231. — Caloric engine. *Sillimann's Journal*, 2e série, t. XV, p. 284. — Caloric engine. *L'Institut*, 1853, p. 86. — Substitution de l'air chaud à la vapeur. *Cosmos*, p. 347. — New air engine. *Mechanical Magazine*, t. XIV, p. 487. — Calorische Maschine. *Polytr. Centralb.*, 1853, p. 183. — Luftdruck Maschine. *Dingler's Journal*, t. CXXVI, p. 153. — Angaben über die Leistung der calorischen Schiffs. *Ibidem*, t. CXXVIII, p. 74. — Maschinen Einrichtung der Caloricschiffs. *Ibidem*, t. CXXVIII, p. 174. — Hochdruck Luftmaschine. *Ibidem*, t. CLIX, p. 161).

Lissignol (*Description de la machine Ericsson*. 1854, Le Havre. — Étude sur les machines à air chaud d'Ericsson. *Archives des sciences physiques*, t. XXIV, p. 209). — Galy Cazalat (Machine calorique d'Ericsson. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 1853, p. 44. — Note sur le régénérateur d'Ericsson. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXVI, p. 298). — Cazavan. La machine calorique d'Ericsson. *Cosmos*, t. III, p. 342. — Gauldrée Boileau. *Annales des Mines*, 5e série. t. II, p. 453. — Combes. *Ibidem*, 5e série, t. III, p. 775; IV, p. 451. — Tresca. *Ibidem*, 5e série, t. XIX, p. 413. — Verdet. *Théorie mécanique de la chaleur*, t. I, p. cxxv et 145. — Briot. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 89. — Hirn. *Exposition analytique et expérimentale*, etc., p. 436. — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, p. 148, 168. — Moutier. *Éléments de thermodynamique*, p. 59. — Hirsch. Théorie des moteurs aérothermiques. *Annales des Ponts et Chaussées*, 5e série, t. VII, p. 427. — Résal. *Traité de mécanique générale*, t. IV, p. 424. — De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 75. — *Portefeuille économique des machines*, 1880, planches 41, 42. — *Revue industrielle*, 1881, p. 245.

Boetius. *Die Ericsson'sche calorische Maschine*, 1861, Hambourg. — Grashof. Théorie de la machine à feu d'Ericsson. *Revue de la Société des ingénieurs allemands*, t. IV, p. 292. — Lipowitz. *Les nouvelles machines motrices de Lenoir et d'Ericsson*. 1861, Leipzig. — Gebauer. Maschine von Ericsson. *Jahresbericht der Schles. Gesellschaft zu Breslau*, 1853, p. 310. — Poppe. Ericsson's Luftexpansions Maschine. *Dingler's Journal*, t. CXXVII, p. 401. — Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*. Traduction Arnthal et Cazin, p. 194, 212.

Norton. On Ericsson's hot air. *Sillimann's Journal*, 2e série, t. XV, p. 395. — *Iron*, 1881, p. 254. — *Engineering*, 1881, p. 382. — *Engineering news*, 1881, p. 404.

pression constante, séparés par une dilatation et une rétraction isothermes. La figure 255 retrace le dispositif employé à cet effet.

Un piston A se meut dans un cylindre B ouvert à sa partie supérieure. Celui-ci est surmonté d'un second cylindre B', dont la section n'est que les deux tiers de la précédente, et dans lequel joue un contre-piston A', uni au précédent par des tiges *a*. La face inférieure du piston est contournée de manière à s'adapter exactement sur le ciel C du foyer. Cet organe est, comme dans la machine précédente, rempli de matières peu conductrices. Une tige α transmet à un mécanisme du type ordinaire le travail recueilli par le piston A. Deux soupapes sont installées sur le fond supérieur du cylindre B'. L'une d'elles D s'ouvre de dehors en dedans, pour établir une libre communication avec l'atmosphère. L'autre E s'ouvre, au contraire, de dedans en dehors, et met en relation le cylindre B' avec une capacité distincte F. Le système formé par le

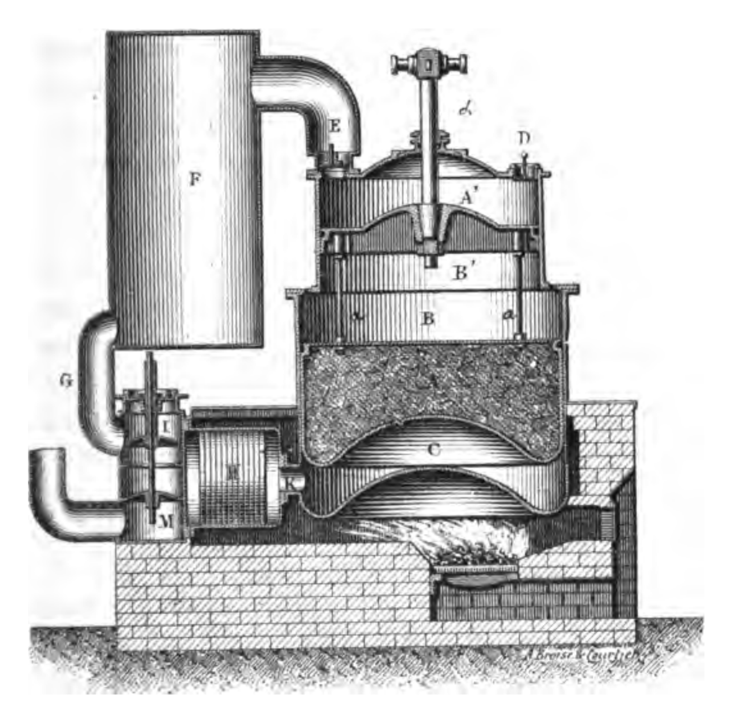


Fig. 255. — Moteur à air chaud d'Ericsson (coupe verticale).

piston A′, les soupapes D,E, et le réservoir F constitue une pompe de compression. Un tube G met ce dernier en rapport avec le régénérateur H, qui est formé de paquets de toiles métalliques superposées. Une tubulure K établit une relation entre lui et la partie inférieure du cylindre B. Deux soupapes L et M le font de même communiquer respectivement avec le réservoir F et avec l'atmosphère extérieure. Toutes les deux s'ouvrent de dehors en dedans. Les quatre soupapes D,E,L,M sont d'ailleurs actionnées aux instants convenables par la machine elle-même, au moyen de transmissions appropriées que l'on a supprimées sur la figure pour plus de simplicité. Le fonctionnement de cet appareil s'opère de la manière suivante.

399 — Supposons le piston arrivé au sommet de sa course. La soupape D s'ouvre, tandis que E se referme. Pendant la descente, l'air extérieur se trouvera donc appelé dans la partie supérieure du cylindre B′ au-dessus du contre-piston A′. Au contraire, le piston A refoule dans le régénérateur, à travers la tubulure K, l'air qui remplissait précédemment la partie inférieure du cylindre B. Ce gaz chaud cède ses calories aux toiles métalliques, et s'échappe dans l'atmosphère à travers la soupape M, qui est alors ouverte, tandis que L repose sur son siège.

On voit que, pendant cette période, le réservoir F reste confiné, puisque les soupapes E,L sont fermées.

On reconnaît également qu'il s'opère un échange d'air entre le moteur et l'atmosphère, à l'inverse de ce qui avait lieu pour la machine de Stirling, dans laquelle travaille perpétuellement la même quantité d'air. Ce n'est là d'ailleurs qu'une nuance de peu d'importance. Il suffirait, pour rentrer dans les mêmes conditions, d'établir *par la pensée* un tuyau de communication entre M et D. L'air chaud qui s'échappe de B rentrerait par là dans le cylindre B′, après s'être refroidi dans le régénérateur H.

A cette phase descendante succède la période ascendante. Au moment où le piston AA′ va recommencer à s'élever, toutes les soupapes changent de situation. D et M se renfermant, les communications se trouvent supprimées avec l'extérieur. E et L venant

à s'ouvrir, le réservoir F, jusque-là isolé, se trouve remis en relation avec le cylindre B′ et le régénérateur H. L'équilibre de pression se rétablit entre eux. Nous allons en effet reconnaître que ce réservoir était resté, en fin de course ascendante, soumis à une tension d'une atmosphère et demie. La montée du piston va chasser, à pression sensiblement constante, l'air de B′ dans la partie inférieure B, à travers le réservoir F et le régénérateur H. Ce fluide récupérera, dans cette dernière enceinte, la chaleur laissée en dépôt par la cylindrée précédente qui vient d'être évacuée dans l'atmosphère, et il achèvera de s'échauffer sur le ciel du foyer C. Avant la fin de l'ascension, la soupape L se referme. En raison de cette interruption de communication, l'air supérieur se comprime, tandis que le gaz inférieur continue à se dilater. C'est ainsi que se forme, dans le réservoir F, une surpression d'une demi-atmosphère, en raison du rapport établi ci-dessus entre les sections des deux corps de pompe, et que s'effectue la dilatation isotherme de la cylindrée inférieure.

Nous retrouvons ainsi les quatre phases du cycle : dilatation isotherme, suivie d'un refroidissement à pression constante quand le gaz s'écoule librement dans l'atmosphère par la soupape M, à travers les toiles H; et d'autre part (sur une nouvelle cylindrée équivalente à la première), compression à la température constante de la partie supérieure (tandis que F reste confiné pour gagner une demi-atmosphère de pression), suivie d'échauffement à tension constante lorsque, après l'ouverture de L, l'équilibre élastique étant établi, l'ascension du piston balaye cette quantité d'air de F en B, à travers les toiles métalliques du régénérateur.

§ 3

MACHINE DE FRANCHOT

400 — Le moteur Franchot [1] présente une grande simplicité

[1] Franchot. Moteurs à air chaud. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXVI, p. 223, 393; XXXVIII, p. 131). — Combes (Théorie de la machine de M. Franchot.

de principe. Il se compose (fig. 256) de deux cylindres verticaux, dont les pistons attaquent un même arbre coudé, à l'aide de bielles couplées à angle droit sur ce dernier. Celle du *cylindre chaud* AA' précède de 90° dans la rotation la manivelle du *cylindre froid* BB'. Le premier de ces corps de pompe se trouve environné par les

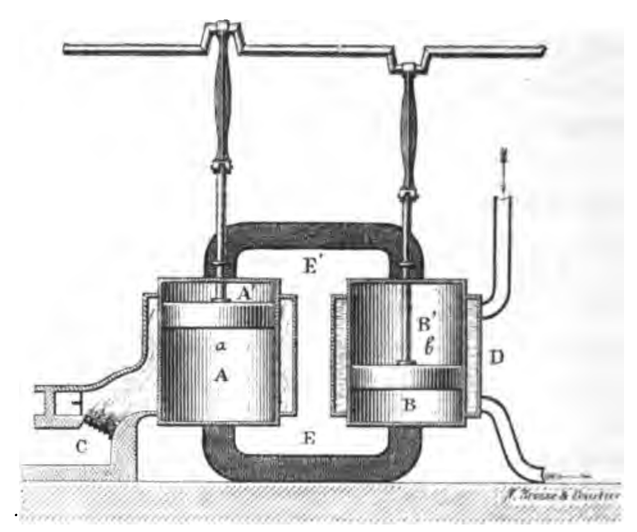


Fig. 256. — Machine à air chaud de Franchot (coupe verticale).

flammes du foyer C sur toute sa surface latérale ([1]). Le second est renfermé dans une enveloppe D à circulation d'eau froide. Deux tuyaux E,E' font communiquer ensemble ceux des fonds des cylindres qui se trouvent situés d'un même côté. Ces conduites, remplies de toiles métalliques, font l'office de régénérateur.

Si l'on suppose le piston *a* parvenu au sommet de sa course, il va descendre en chassant, à travers la conduite E, l'air chaud qui remplit le cylindre A. Ce gaz déposera sur les toiles métalliques le calorique dont il est actuellement chargé. Il arrivera refroidi dans le cylindre B. En même temps, la descente du piston *a* appelle

Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale, 1863, p. 88. — *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*, p. 62). — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, p. 198. — De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 77.

([1]) C'est l'inconvénient le plus sérieux du système, car il expose à brûler les garnitures, particulièrement pendant les temps d'arrêt, l'eau cessant alors de se renouveler pour rafraîchir les surfaces

en A′ l'air qui se trouve en B′ au-dessus de b. Ce courant, en circulant dans le régénérateur E′, recueille la chaleur dont ce dernier s'est imprégné pendant la course inverse. Il arrive donc déjà réchauffé dans le cylindre A′, et y subit un nouveau coup de feu destiné à remplacer la chaleur qui a été consommée en travail. A la suite de cette course directe, s'opère la course rétrograde dans des conditions semblables.

401 — Il est facile de définir à l'aide du calcul le régime variable des pressions p,p' qui se développent respectivement dans les espaces AEB,A′E′B′.

Exprimons à cet effet que le poids de l'air renfermé dans la capacité A + B est constant, en négligeant, dans un aperçu de cette nature, le volume E. Ce poids est, d'une part, proportionnel à la pression p de l'ensemble, et varie en outre, pour chacune de ses parties, en raison inverse des températures absolues t_1 et t_2 qui règnent respectivement en A et en B. Il renferme enfin en facteur, pour les deux parties en question, leurs hauteurs respectives, à savoir $1 - \cos \alpha$ et $1 - \cos(\alpha - 90)$, c'est-à-dire : $1 - \sin \alpha$; en désignant par α l'angle de rotation compté à partir du fond de course dans le cylindre A. La relation qui égale ce volume à une constante prendra donc la forme :

$$p\left(\frac{1-\cos\alpha}{t_1}+\frac{1-\sin\alpha}{t_2}\right)=C.$$

On en déduit (¹) :

$$p=\frac{Ct_1t_2}{t_1+t_2-(t_1\sin\alpha+t_2\cos\alpha)}.$$

Pour l'espace opposé A′B′, nous n'aurons qu'à changer α en $\alpha + 180°$, ce qui donne :

$$p'=\frac{Ct_1t_2}{t_1+t_2+(t_1\sin\alpha+t_2\cos\alpha)}.$$

(¹) On pourrait dégager de là l'équation du cycle, en exprimant que le volume est proportionnel au facteur $2 - \sin\alpha - \cos\alpha$, et éliminant α entre ces deux relations. L'on voit combien cette formule serait compliquée, si on la compare aux exemples simples que nous avons envisagés jusqu'ici.

On voit clairement que le maximum de l'une de ces expressions correspond au minimum de l'autre. Tous les deux dépendent des limites de la fonction :

$$t_1 \sin \alpha + t_2 \cos \alpha.$$

Pour déterminer ces dernières, formons l'équation dérivée :

$$t_1 \cos \alpha - t_2 \sin \alpha = 0,$$

on en déduit :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{t_1}{t_2}.$$

Nous obtenons ainsi deux situations angulaires directement opposées.

402 — Cette machine présente l'inconvénient d'avoir quatre points morts, ce qui exigera l'emploi d'un volant particulièrement important, ou l'accouplement de deux machines semblables dans des azimuts de rotation rectangulaires entre eux.

En effet, l'effort résultant sera, pour chacun des deux pistons, proportionnel à $p - p'$. Il se transmet à l'arbre tournant au moyen d'un bras de levier qui, pour le piston A, sera proportionnel à $\sin \alpha$, si nous négligeons l'influence de l'obliquité de la bielle. Le facteur correspondant sera, pour l'autre piston : $\sin (\alpha - 90)$, c'est-à-dire : $-\cos \alpha$. Le moment total qui actionne l'arbre tournant renferme donc le facteur :

$$(p - p') (\sin \alpha - \cos \alpha).$$

Il s'annulera, par conséquent, d'une part pour l'hypothèse :

$$p = p',$$

et, de l'autre, si nous posons :

$$\sin \alpha = \cos \alpha.$$

Cette dernière condition se trouve remplie pour les deux positions diamétralement opposées :

$$\alpha = 45^\circ, \qquad \alpha = 225^\circ.$$

La première équation conduit de son côté à poser, d'après les valeurs respectives de p et p' que nous avons obtenues ci-dessus :

$$t_1 \sin\alpha + t_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{t_2}{t_1}.$$

Elle fournit également comme solutions deux situations, qui sont diamétralement opposées l'une à l'autre, et perpendiculaires sur celles qui correspondent au maximum et au minimum.

403 — Cherchons maintenant le coefficient économique de ce cycle si compliqué.

Si le piston a se soulève infiniment peu, en engendrant un volume proportionnel à la différentielle de la hauteur $1 - \cos\alpha$, c'est-à-dire à $\sin\alpha d\alpha$, le travail développé, et la chaleur correspondante, seront proportionnels à $p \sin\alpha d\alpha$, c'est-à-dire, d'après la valeur de p :

$$\frac{\sin\alpha d\alpha}{t_1 + t_2 - (t_1 \sin\alpha + t_2 \cos\alpha)}.$$

La quantité de chaleur Q_1 cédée par le foyer sera donc, pour une période complète, proportionnelle à l'intégrale définie :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha d\alpha}{t_1 + t_2 - (t_1 \sin\alpha + t_2 \cos\alpha)}.$$

La quantité absolue Q_2 cédée au réfrigérant le sera, de son côté, à la suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha d\alpha}{t_1 + t_2 - (t_1 \sin\alpha + t_2 \cos\alpha)},$$

car la pression, et par suite le dénominateur, restent les mêmes; tandis que le chemin parcouru, ou le numérateur, se déduisent du précédent en remplaçant α par $\alpha - 90°$. Le rapport de ces deux quantités de chaleur sera d'après cela marqué par le quotient des deux intégrales définies.

Si l'on pose :

$$\tan \varphi = \frac{t_1}{t_2},$$

on pourra mettre la première sous la forme :

$$\frac{\cos\varphi}{t_2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha d\alpha}{(\sin\varphi + \cos\varphi) - \cos(\alpha - \varphi)},$$

ou, en prenant comme variable d'intégration :

$$\beta = \alpha - \varphi,$$

et modifiant les limites en conséquence :

$$\frac{\cos\varphi}{t_2}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\frac{\sin(\beta + \varphi)\,d\beta}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\beta}.$$

En ce qui concerne la seconde, rien n'est changé pour le dénominateur; et quant au numérateur, on y doit substituer au sinus le cosinus. Il vient par là :

$$\frac{\cos\varphi}{t_2}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\frac{\cos(\beta + \varphi)\,d\beta}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\beta}.$$

Si l'on développe les deux numérateurs en fonction de $\sin\beta$ et $\cos\beta$, chacune de ces deux intégrales se séparera en deux autres. L'une de ces dernières contiendra en facteur :

$$\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\frac{\sin\beta d\beta}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\beta}.$$

L'intégrale indéfinie de cette fraction serait le logarithme népérien de son dénominateur. L'intégrale définie s'évanouit donc, puisque ce dernier reprend la même valeur aux deux limites.

La seconde :

$$\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\cos\beta d\beta}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\beta},$$

pourrait facilement s'évaluer par les méthodes connues. Mais il sera inutile de prendre cette peine, car elle disparaît comme facteur commun dans le rapport des deux quantités de chaleur Q_1 et Q_2. Il nous suffit de remarquer que cette intégrale se trouve, dans l'expression de Q_1, affectée du facteur $\sin\varphi$, et pour Q_2, du coefficient $\cos\varphi$; d'où il suit :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{t_1}{t_2}$$

On a donc, pour le coefficient économique effectif :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{t_1 - t_2}{t_1},$$

c'est-à-dire la valeur du coefficient maximum, d'où :

$$\varepsilon_1 = 1.$$

On reconnaît ainsi que, malgré sa grande complication analytique (n° 401, note 1), le cycle du moteur Franchot se trouve constitué précisément d'après les règles des systèmes ternaires qui permettent de retirer de l'emploi du régénérateur le plus grand effet utile.

404 — *Machine de Ryder.* — La machine Franchot, après avoir fait son apparition à l'Exposition universelle de 1855, paraît être demeurée depuis lors à peu près ignorée. M. Ryder en a récemment rajeuni et amélioré les dispositifs, sans en modifier au fond

le principe (¹). La surface de chauffe a été augmentée à l'aide d'un appendice inférieur du piston (fig. 257), analogue à celui du moteur Laubereau, dont nous allons nous occuper dans un instant.

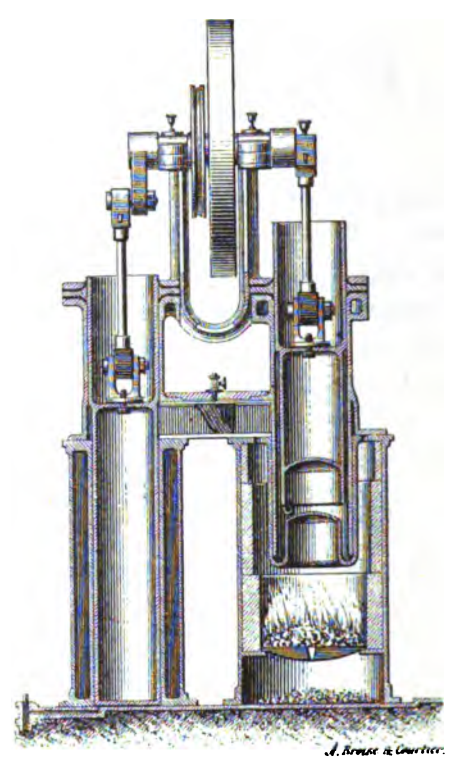


Fig. 257. — Moteur à air chaud de Ryder (coupe longitudinale).

Les récepteurs ont pris la forme du piston-plongeur. L'étanchéité est obtenue à l'aide de cuirs emboutis, que l'on maintient éloignés des parties chaudes. Une petite soupape permet de réparer au besoin les fuites, en laissant rentrer un peu d'air froid.

(¹) Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition universelle de 1878*, groupe VI, classe 54, p. 301. — Sciama. *Moteurs industriels*, p. 210. — *Revue industrielle*, 1876, p. 307; 1883, p. 165. — *La Nature*, 21 octobre 1880. — *The Rail-road Gazette*, 9 avril 1880, p. 189. — *Engineering*, 12 octobre 1888, p. 354.

§ 4

MACHINE DE LAUBEREAU

405 — La machine Laubereau [1] diffère essentiellement des précédentes, en ce qu'elle ne comprend pas de régénérateur et rentre dans le type binaire. Elle appartient à la catégorie des *machines à déplacement*. L'inventeur en a modifié à diverses reprises le dispositif, qu'il destine spécialement au développement des petites forces. Son dernier modèle appartient au type vertical.

Le cylindre A (fig. 258) est, à sa partie supérieure, refroidi par un courant d'eau froide B, et surchauffé dans le bas par l'influence du foyer C. En haut se meut, au contact de la partie froide et alésée, un piston-récepteur D. Dans la partie inférieure, un piston déplaceur E oscille avec un certain jeu, c'est-à-dire sans exercer de frottement sur la paroi chaude. Cet organe, épaissi par une forte couche de plâtre, se prolonge vers le bas en forme de gaine métal-

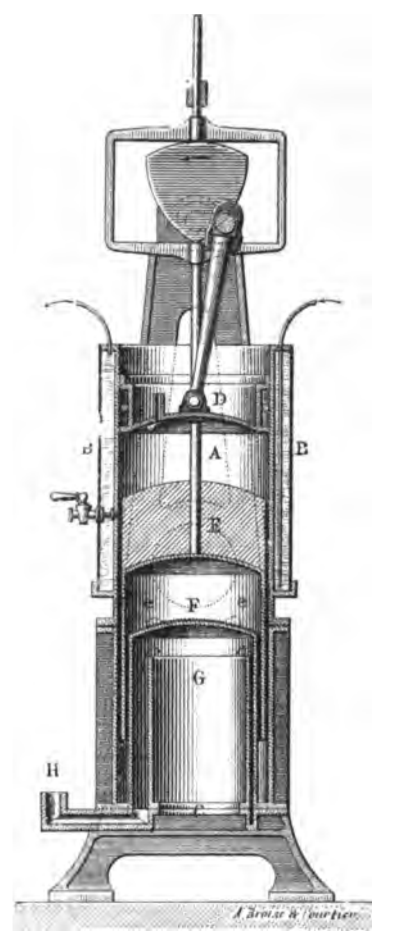


Fig. 258.
Machine à air chaud de Laubereau.
(Coupe verticale.)

[1] Tresca. Procès-verbal des expériences faites sur la machine Laubereau. *Annales du Conservatoire.* — Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 295. — Sciama. *Moteurs industriels*, p. 207. — De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 78. — Haton de la Goupillière. *Revue des cours scientifiques*, 18 mai 1867.

lique *e*, pénétrant dans l'intervalle étroit que l'on a laissé libre entre le cylindre A et le ciel F du foyer. Une boîte à feu G force les flammes à buter contre ce dôme. Elles redescendent ensuite en léchant les parois cylindriques, et s'échappent en E dans la cheminée. Le piston-récepteur D actionne, à l'aide d'une bielle et d'une manivelle, un arbre tournant sur lequel se trouve calé un excentrique triangulaire pour commander le déplaceur. Le fonctionnement de l'appareil est le suivant.

406 — Quand le piston-déplaceur est à bas, l'air, totalement logé au-dessus de lui, se refroidit au contact du courant d'eau, se rétracte et tend à rappeler le récepteur. Le déplaceur venant à s'élever sous l'empire de ses liaisons, l'air froid est obligé de filtrer entièrement entre la gaine inférieure et la paroi brûlante du couloir des gaz. Il s'échauffe donc en se logeant sous le déplaceur. De là, une augmentation de tension, qui tend à remonter le récepteur. Il y a toujours, en effet, égalité de pression dans toutes les parties de la machine, qui communiquent librement entre elles et jamais avec l'atmosphère extérieure; le même air servant indéfiniment pour le fonctionnement, ce qui tend à diminuer les pertes de chaleur. Un volant est destiné à régulariser le mouvement, et à faciliter le passage des points morts.

Des expériences déjà anciennes de Tresca (1863) ont indiqué un rendement de 6,70 %, avec une consommation par cheval-heure de $4^{kg},55$ de combustible, et de 700 litres d'eau froide à 16 ou 18 degrés. La température de l'air était de 235 degrés du thermomètre ordinaire, et la vitesse de 30 à 40 tours par minute. Le piston avait $0^m,50$ de diamètre et $0^m,40$ de course. La surpression atteignait un quart d'atmosphère.

§ 5

MACHINE DE BELOU

407 — L'apparition de l'*aéromoteur* de Belou remonte à 1860 (1). L'inventeur s'est placé spécialement, pour l'amélioration du rendement effectif η, au point de vue du perfectionnement du coefficient économique thermique ε_2 (n° 385). Frappé de la perte considérable due à la quantité de chaleur emportée dans la cheminée par le grand excès d'air qui passe sur le foyer, il supprime cette influence en envoyant directement dans le cylindre les produits de la combustion. Il s'attache en même temps à les réduire au strict nécessaire, en suppléant aux difficultés de l'appel dans ces nouvelles conditions par le *tirage forcé*, au moyen d'une pompe de compression actionnée par la machine elle-même. De là une consommation de travail, qui est de nature à faire perdre, en ce qui concerne le coefficient dynamique ε_3 (n° 385), une partie de ce que l'on a regagné pour ε_2. Mais cette influence négative est certainement la moins importante des deux, et le système se recommande, en définitive, comme très rationnel en principe. Malheureusement, l'envoi dans le cylindre des fumées, des cendres, des escarbilles doit faire redouter à bref délai la détérioration des surfaces et des garnitures du piston. De plus, à l'inverse de ce que nous avons remarqué dans la machine Laubereau, les frottements s'exercent entre surfaces chaudes, et exposent à des grippements par la destruction des graisses. Malgré ces défauts, cet appareil a beaucoup fixé l'attention, et il convient de l'étudier ici.

Le piston-récepteur, qui se meut dans un premier cylindre (fig. 259), actionne directement celui de la pompe de compression; celle-ci envoie dans le foyer un courant d'air qui se bifurque

(1) Belou. Machine à air chaud ou aéromoteur. *Cosmos*, t. XVIII, p. 53. — Tresca. (Procès-verbal des expériences faites sur la machine Belou. *Annales du Conservatoire*. — *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, t. X, p. 34). — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, p. 209. — Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 297.

suivant des proportions que l'on peut régler à volonté. Une partie pénètre sous la grille, et le reste arrive au-dessus de cette dernière pour brûler les gaz combustibles. Le charbon est versé périodiquement sur cette grille au moyen d'une trémie qui est constituée comme une véritable écluse, avec deux registres, dont

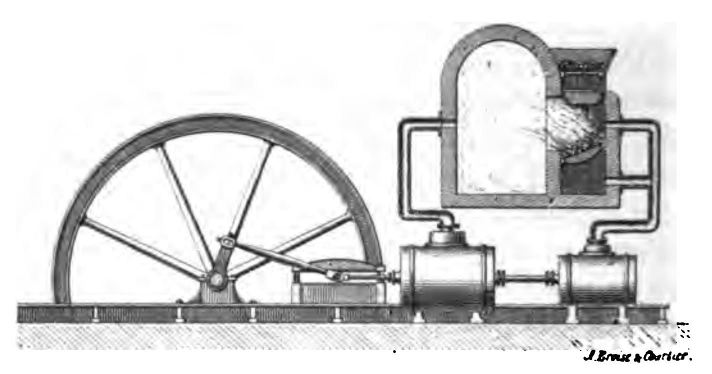


Fig. 259. — Moteur à air chaud de Belou (coupe verticale).

l'un au moins se trouve toujours fermé, de manière à intercepter la communication avec l'extérieur. Les produits de la combustion, convenablement brassés dans la boîte à feu, se rendent par un tuyau dans la boîte de distribution du premier cylindre. Ils y sont utilisés en pleine pression, puis en détente, pour être finalement expulsés dans l'atmosphère.

408 — Pour accomplir le cours de ces opérations, l'air part de la pression atmosphérique p et de la température ambiante t du thermomètre absolu. Il subit une compression qui le porte à une température t' et à une pression p'. Il passe ensuite librement dans le foyer à pression constante, en acquérant la température t''. Il pénètre dans le cylindre avec cette même tension p', et s'y détend jusqu'à la pression atmosphérique p (si nous supposons pour plus de simplicité la détente complète). Il arrive ainsi à la température t'''.

La machine recueille, dans ces conditions, le total de la chaleur qui correspond à la combustion, sauf deux causes de déperdition, à savoir : la chaleur interne emportée par le gaz, et celle qui corres-

pond au travail de la pompe. La variation de chaleur interne relative aux températures initiale et finale est, pour un kilogramme d'air :

$$c\,(t''' - t).$$

Pour le faire rentrer dans l'atmosphère à la pression p et sous son volume final v''', il faut développer le travail pv''', c'est-à-dire Rt''' (éq. 10). Mais l'atmosphère avait fourni de son côté, pour le faire pénétrer dans la pompe, le secours de sa pression motrice, ou le travail Rt. On n'a donc eu à dépenser en définitive que la différence $R\,(t''' - t)$, à laquelle correspond la quantité de chaleur :

$$AR\,(t''' - t).$$

Le total de ces deux causes de perte est par conséquent :

$$Q_2 = (AR + c)\,(t''' - t),$$

ou, d'après l'équation paramétrique (14) :

$$Q_2 = kc\,(t''' - t).$$

Quant à la chaleur fournie, c'est celle qui a permis d'élever, à pression constante, la température du gaz de t' à t'', c'est-à-dire :

$$Q_1 = kc\,(t'' - t).$$

Le coefficient économique sera par conséquent :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{t''' - t}{t'' - t},$$

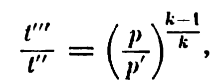
ou, sous une forme équivalente :

$$1 - \frac{t'''}{t''} \cdot \frac{1 - \dfrac{t}{t'''}}{1 - \dfrac{t'}{t''}}.$$

Or, si nous supposons que la compression et la détente soient l'une et l'autre adiabatiques, on aura, en remarquant qu'elles s'exercent toutes les deux entre les mêmes pressions (25) :

$$\frac{t}{t'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{k-1}{k}}, \qquad \frac{t'''}{t''} = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

et par suite :



$$\frac{t}{t'''} = \frac{t'}{t''},$$

ce qui réduit l'expression précédente à la forme définitive :



$$1 - \frac{t'''}{t''}.$$

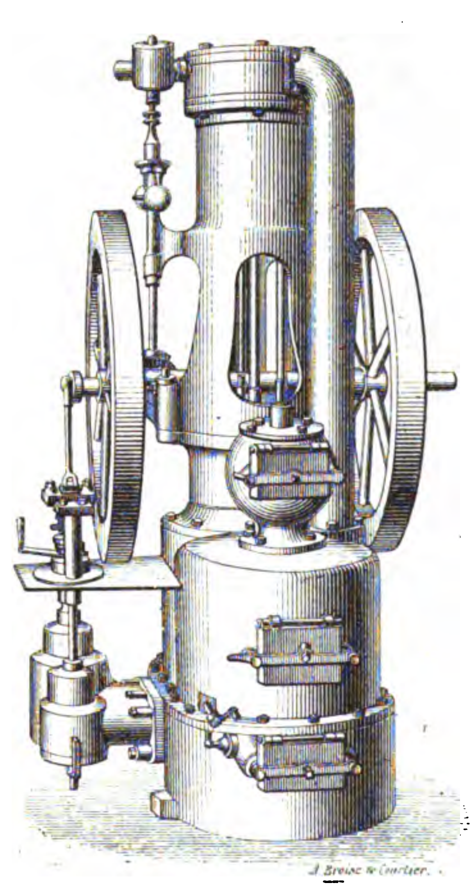


Fig. 260. — Moteur à air chaud de Hock. (Vue perspective.)

En ce qui concerne l'effet utile réel, les expériences exécutées par Tresca sur un moteur de 120 chevaux à double effet, installé à la papeterie de Cusset, avaient indiqué une consommation de $1^{kg},46$ de houille par cheval-heure. La vitesse était de 23 tours; la surpression : $0^{kg},68$; la température d'échappement 250 degrés du thermomètre usuel, après une détente complète que l'on obtenait en coupant l'admission aux 0,389 de la course. Celle-ci était de $1^{m},50$ pour les cylindres récepteurs et le cylindre alimentaire, qui avaient pour diamètres respectifs $1^{m},40$ et $1^{m},00$.

409 — *Machine de Hock.* — Le moteur Belou a inspiré jusqu'à un certain point, dans ces derniers temps, la construction de la machine de Hock ([1]). On y retrouve (fig. 260, 261) les mêmes éléments essentiels avec un dispositif amélioré. On y a introduit, en outre, une innovation très utile en y injectant une certaine quantité d'eau qui entre en vapeur. Elle a pour effet d'atténuer les coups de feu et d'assouplir les garnitures, en même temps qu'elle travaille pour son propre compte ([2]). Mais ce dernier point de vue, très important, se rattache à des considérations générales que nous aurons à envisager plus tard (n° 513).

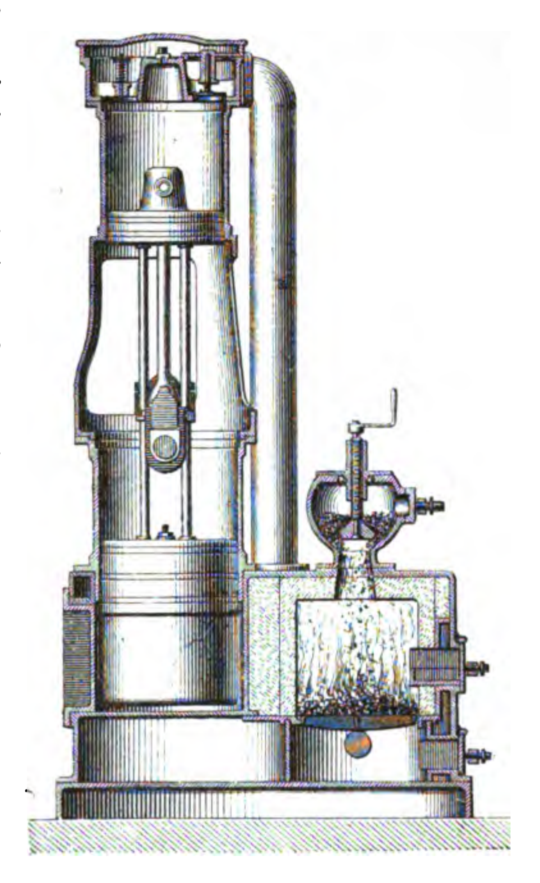


Fig. 261. — Machine à air chaud de Hock. (Coupe horizontale.)

Machine de Bénier. — Le moteur Bénier ([3]), très employé aujourd'hui, est fondé sur les mêmes principes. On a cherché à éviter l'inconvénient de l'encrassement du cylindre, en y en-

([1]) Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 298. — *Portefeuille économique des machines*, 1883, p. 114. — *Annales industrielles*, 1884, t. I, p. 559. — *Les Mondes*, t. LI, p. 7. — *The Railroad Gazette*, 9 avril 1880, p. 189.

([2]) Luft Dampf Maschine.

([3]) *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1888, p. 108. — *Écho des mines et de la métallurgie*, 1886, p. 438.

voyant, à l'aide de la pompe, un jet d'air qui remplit une sorte de ceinture annulaire pratiquée dans sa paroi autour du piston, lequel est allongé comme un plongeur. On coupe ainsi le courant, ce qui tend à déterminer la précipitation des corps solides entraînés (n° 328). On arrive en outre par ce moyen à rafraichir

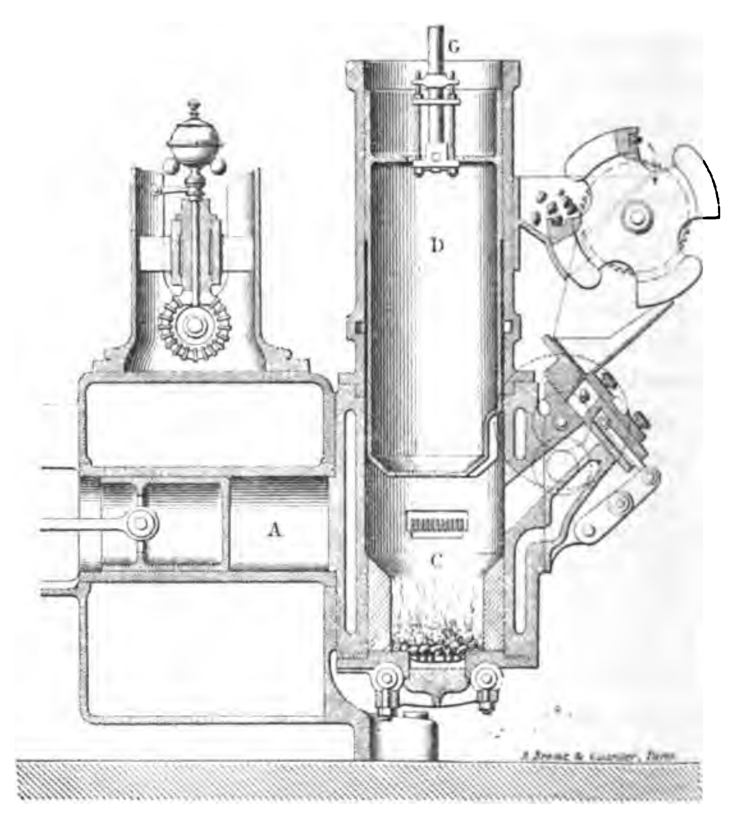


Fig. 262. — Machine à air chaud de Bénier (coupe verticale en long).

cet organe, de manière à permettre sa lubrifaction en limitant la température à 85 degrés. A cet effet, le piston A de la pompe commandée, à l'aide des intermédiaires nécessaires, par l'arbre tournant B (fig. 262, 263, 264), refoule l'air, qu'un tiroir de distribution dirige, pour la plus grande partie, dans le foyer C, et quant au reste, autour du piston plongeur D.

La masse gazeuse la plus importante s'échauffe dans le foyer

fermé C, qui est alimenté avec le coke E au moyen d'un distributeur F. Les gaz brûlés sont évacués périodiquement à l'aide d'une soupape qui est soulevée par la révolution de l'arbre B. Mais

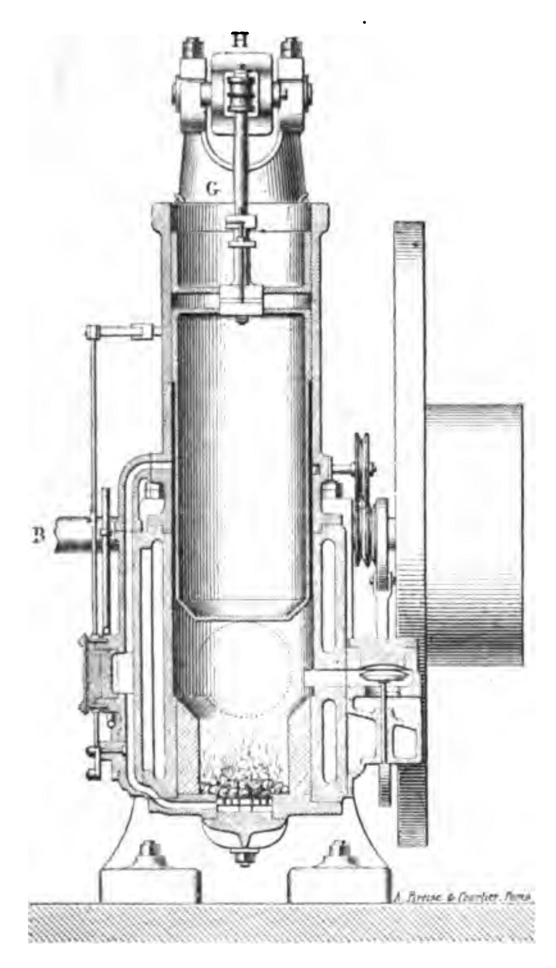


Fig. 263. — Machine à air chaud de Bénier (coupe verticale en travers).

auparavant, la dilatation qu'éprouve ce volume d'air en passant sur le feu soulève le piston plongeur D, qui, à l'aide de la bielle G et du balancier H, attaque d'autre part l'arbre tournant B, auquel sont empruntées les commandes dont nous avons parlé

Ce moteur, qui marche sans chaudière spéciale, consomme.

suivant le constructeur (1), $1^{kg},7$ de coke par cheval et par heure

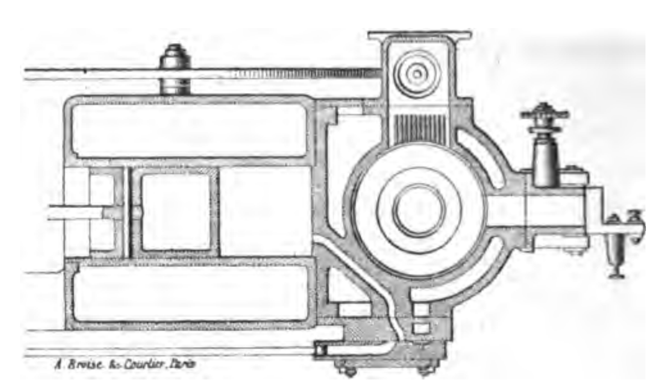


Fig. 264. — Moteur à air chaud de Bénier (coupe horizontale).

dans les petits moteurs de 4 chevaux, quantité qui se réduit à 1 kilogramme seulement avec les machines de 20 chevaux.

410 — *Machines diverses.* — Je citerai encore, sans entrer dans aucun' développement, les moteurs à air chaud de Andraud. Avenier de la Grée (2), Babcock, Bailey (3), Baldwin et Richards. Baudin, Beam (4), Boulton, Bresson, Brossard, Brown (5), Buckett (6). Burdin, Buschbaum (7), Cayley (8), Daulton (9), Galy-Cazalat, Giffard. Giraudon (10), Gordon (11), Hargreaves of Widness (12), Howard et Lloyd, Jenkins et Jameson, Joule (13), Knabb, Kœrber, Kühne, Lake.

(1) *Compte rendu mensuel des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, 1888, p. 198.

(2) Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 595.

(3) *The Engineer*, 8 septembre 1882, p. 174.

(4) *Scientific American*, 26 février 1887.

(5) Hirsch. *Rapports du jury international de l'Exposition universelle de* 1878. groupe VI, classe 54, p. 209. — *Portefeuille économique des machines*, 1885, p. 21.

(6) *The Engineer*, 4 mai 1883. — *Engineering*, 16 février 1883. — *Scientific American*, 16 juin 1883.

(7) *Revue industrielle*, 1880, p. 353.

(8) Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 595.

(9) De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 81.

(10) *Annales industrielles*, 1886, t. II. p. 9.

(11) Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 595.

(12) *Scientific American*, 3 mars 1888, p. 134. — *Scientific American supplement*, 18 février 1888, p. 10104.

(13) Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 591, 655. — *Philosophical Transactions*, 1851.

Leavill, Lehmann [1], Louis Lemoine [2], Lynam, Mackinley [3], Mouline [4], Napier [5], Pascal [6], Rankine, Reech [7], Reed, van Rennes [8], Robinson [9], Roper, Shaw [10], Siemens, Sudheim, Tawlet et Preston [11], Tellier [12], Todt [13], Wilcox [14], Woodburry [15], Zipf et Langsdorf [16].

Ajoutons enfin que nous aurons encore à revenir plus tard (n° 507) sur les moteurs à air chaud, pour en effectuer la comparaison avec les machines à vapeur, lorsque nous aurons établi la théorie de ces dernières.

[1] Tresca. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. II, p. 524. — De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 79. — *Iron* 13 août 1880.

[2] Louis Lemoine (Description d'une machine à air dilaté. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXVI, p. 263. — *L'Institut*, 1853, p. 88, 107. — *De l'emploi des toiles métalliques dans les machines à air chaud et de leur application à un système particulier*, 1853, Paris). — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, p. 176.

[3] *Scientific American*, 29 mai 1886, p. 342. — *American machinist*, 5 juin 1886, p. 1.

[4] Cazin. *Les Mondes*, t. V. p. 18.

[5] Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction Richard, p. 391.

[6] De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 77.

[7] Reech. Machine à air d'un nouveau système déduit de la comparaison des systèmes Ericsson et Lemoine, 1851, Paris.

[8] *Revue industrielle*, 1880, p. 305. — *Les Mondes*, t. XLVIII, p. 166.

[9] *The Engineer*, 13 juillet 1883, p. 28. — *Mechanical Progress*, 24 mars 1888.

[10] Shaw. *Machine à air chaud*, in-8°. — American hot engine. *Mechanical Magazine* t. LXI, p. 97.

[11] De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 76.

[12] Tellier. Nouveau moteur thermodynamique. *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences*, Congrès de Toulouse, p. 114.

[13] *Revue industrielle*, 1881, p. 201. — *Bulletin du Musée de l'Industrie belge*, 1881

[14] De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 77.

[15] *The industrial News*, janvier 1882.

[16] *Société des Ingénieurs allemands*, 22 octobre 1887.

CHAPITRE XXV

MOTEURS A GAZ

—

§ 1

GÉNÉRALITÉS

411 — La conception ordinaire du moteur à air chaud suppose que l'enceinte qui sert de laboratoire à la conversion de la chaleur en travail dynamique, c'est-à-dire le cylindre récepteur, reste distincte de celle dans laquelle on développe cette chaleur elle-même par l'union de l'oxygène de l'air avec le combustible. Le courant oxydant qui parcourt ce foyer, pour s'échapper ensuite par la cheminée, reste d'ailleurs en général essentiellement distinct de la masse élastique qui sert de véhicule au calorique dans cette transformation d'énergie.

Déjà nous avons rencontré, avec les types de Avenier de la Grée, Belou, Cayley, Gordon, Hock, Jenkins, Pascal, etc., une première modification, destinée à diminuer la grande perte de chaleur qui résulte de cet état de choses. Les deux capacités en question y restent encore géométriquement distinctes, mais le même fluide les traverse toutes les deux. Toutefois nous avons reconnu que l'avantage ainsi réalisé se trouve très atténué dans la pratique par divers inconvénients, qui tiennent principalement à l'emploi, malgré ces conditions nouvelles, de l'ancien mode de combustion avec de la houille en morceaux sur une grille.

En poursuivant plus loin la même idée, on se trouve conduit à opérer directement la combustion dans le cylindre lui-même. On

supprime alors la grille, et l'on commence par amener le combustible à un état d'extrême division, qui assure entre lui et l'oxygène de l'air l'union la plus intime et une réaction presque instantanée, permettant de chauffer l'une après l'autre chaque cylindrée.

De là trois catégories spéciales de machines à air chaud. Si le combustible est solide, on obtient le *moteur à poussière de charbon;* s'il est liquide, le *moteur à pétrole;* s'il est gazeux, le *moteur à gaz.* Parmi ces trois types, le dernier, de beaucoup le plus simple, s'est infiniment plus répandu que les deux autres. C'est par lui que nous commencerons cette étude.

412 — Les ressources de la chimie nous présenteraient au besoin une grande variété pour le choix d'un gaz combustible. Quelques-uns peuvent même s'obtenir en grand dans des conditions vraiment industrielles. Je citerai par exemple l'oxyde de carbone dans certains gazogènes; le *gaz tonnant* ou *gaz oxyhydrique,* c'est-à-dire un mélange d'hydrogène avec un poids huit fois plus grand d'oxygène; le gaz de l'éclairage, qui est constitué par un mélange variable d'hydrogène bicarboné, d'hydrogène protocarboné et d'oxyde de carbone, avec des traces de produits accessoires. Ce dernier fluide efface comme importance tous les autres, pour son emploi dans le cas qui nous occupe. Il est nécessaire d'ajouter cependant que l'on s'est fréquemment servi, pour actionner des moteurs, du *gaz à l'eau* [1]. Son application ne tardera sans doute pas à s'étendre aux très grandes forces. On a fait tout récemment de notables progrès dans cette direction. La dépense de combustible oscille, avec le moteur Otto alimenté au gaz Dowson, dans les

[1] On désigne sous ce nom un mélange en proportions variables d'acide carbonique, d'oxyde de carbone, d'azote, d'hydrogène et d'oxygène, que l'on obtient en faisant traverser par un courant d'air et de vapeur d'eau une colonne de charbons incandescents. M. Pascal a, le premier, réalisé cette application dès 1861. On peut citer également dans cette voie les appareils Crowe, Dowson, Parker et Strong.

Gustave Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 452 à 459. — Fichet. Le gaz à l'eau. *Génie civil*, t. X, p. 412. — Lencauchez. Fabrication du gaz à l'eau à Essen. *Revue industrielle*, 6 janvier 1887. — Grenier. *Le gaz d'eau comprimé pour force motrice*, Vienne, 1888, in-8°. — Le gaz Dowson et son emploi dans les moteurs à gaz. *Société des ingénieurs allemands*, 12 novembre 1887. — Dowson (Gas for motive power. — On gas power compound with steam power. *Inst. of civil Engineers*, 1883 et 1887, pap. n° 1929 et 2225). — Rowan. On gas producers. *Ibidem*, 12 janvier 1886.

environs de 700 grammes d'anthracite ou de coke par cheval effectif et par heure.

La machine à gaz d'éclairage (¹) qui a pris récemment un si grand

(¹) Gustave Richard. *Les moteurs à gaz*, un vol. gr. in-8° avec atlas. Dunod, 1885: ouvrage fondamental sur cette question. — Witz (*Études sur les moteurs à gaz*, Gauthier-Villars, 1884. — Histoire des moteurs à gaz. *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 20 janvier 1883, p. 161. — Moteurs à gaz. *Ibidem*, 1883, p. 112, 327. — De l'action de paroi dans les moteurs à gaz tonnant. *Ibidem*, avril 1886, p. 565. *Bulletin de la Société industrielle du Nord de la France*, 1885, n° 45. *Revue des questions scientifiques*, t. V, p. 381. — Moteurs à gaz tonnant. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XCVII, p. 523. — Du cycle des moteurs à gaz tonnant. *Ibidem*, t. XCVI, p. 1310. — Mémoire sur les moteurs à gaz. *Annales de chimie et de physique*, novembre 1883, p. 320. — Pouvoir calorifique du gaz de l'éclairage. *Ibidem*, 6° série, t. VI. — *Graissage des moteurs à gaz*. Lille, 1888, in-8°. — Réponse à quelques objections contre l'action de paroi dans les moteurs à gaz. *Société industrielle du Nord de la France*, 1887. *Journal des usines à gaz*, 1887. p. 91. Le *Technologiste*, février 1887). — Tresca. De l'invention et de l'avenir des machines à gaz combustibles. *Annales du Conservatoire*, 1862, t. II, p. 121. — Armengaud jeune. Conférence sur les moteurs à gaz à l'Exposition de 1878. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 3° série, t. VII, p. 551. *Revue industrielle*, 18 septembre 1878, p. 383. — Cazin. Expériences sur les moteurs à gaz. *Les Mondes*, 1866, 1868. — Lefer. Étude sur le travail du gaz et son application aux machines. *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, janvier 1888. — Salanson. *De l'effet de la compression préalable dans les moteurs à gaz détonants*. Paris, 1887, in-8°. — Salanson et Debuchy. Recherches expérimentales sur les machines à gaz. *Génie civil*, t. X, p. 275. *Compte rendu du treizième congrès de la Société technique de l'industrie du gaz en France*. *Journal des usines à gaz*, 5 février 1887. — Robson et Ruckney. Marteau à gaz (*Revue générale des machines-outils, des appareils de levage et de pesage*, janvier 1887, p. 77. — *American Machinist*, 24 décembre 1887. — *Mechanical progress*, septembre 1887, p. 39).

Dugald Clerk (*The gas engine*. Londres 1886. — The theory of the gas engine. *Proceedings of the Institution of civil Engineers*, t. LXIX, part. 111. — On the explosion of homogeneous gaseous mixtures. *Ibidem*, 9 mars 1886). — Mac Gregor. *Gas engines*. Londres, 1885. — Goodeve. *On gas engines*. — Struve. *Essai théorique et pratique sur la dilatation des gaz et étude des perfectionnements apportés récemment aux moteurs à gaz*, 1865, in-8°. — Fleeming Jenkin. Machines à air chaud ou à gaz. *Institution of civil Engineers*, 11 février 1884. — Denny Lane. The elementary principles of the gas engine. *Van Nostrand's engineering Magazine*, novembre 1885, p. 372. — Ayrton. The gas-engine-indicator-diagram. *Philosophical Magazine*, t. XVIII, p. 59. — Adams. On the heating power of coal gas. *British Association of gas Managers*, juin 1881, p. 104.

Schottler (*Die Gas Maschine*, 1882. — Nouvelles machines à gaz. *Société des ingénieurs allemands*, 15, 22, 29 octobre 1887). — Köhler. *Theorie der Gas Motoren*. Leipzig, 1888. — Schwartze. *Die Gas Maschine*, Leipzig, 1888. — Brauer et Slaby. *Versüche ueber Leistüng und Brenn Material Verbrauch von Kleinmotoren*, Berlin. 1879. — Kœrting. Diagrammes des machines à gaz. *Société des ingénieurs allemands*, 12 novembre 1887.

Dionosotti et Bottiglia. Sur le prix de revient de la force motrice du gaz. *L'Ingegneria civile*. t. X, p. 183. — Fustegueras. Cours de mécanique théorique et appliquée, 1876. — Agostino Cavellero. *Le macchine a vapore*.

essor, remonte en réalité à la fin du siècle dernier, et a été, en 1799, brevetée par Lebon, ingénieur des Ponts et Chaussées. Après des essais de Rivaz en 1807 ([1]), Samuel Brown en 1823 ([2]), Demiohélis et Monnier, Talbot et Cristoföris ([3]), on rencontre comme solutions vraiment industrielles la machine de M. Hugon ([4]) en 1858, et la première machine de M. Lenoir ([5]) en 1859, puis une série infiniment nombreuse de types, dont nous décrirons tout à l'heure les principaux.

413 — La capacité de travail dont sera susceptible une certaine quantité de gaz d'éclairage résulte du produit de trois facteurs, à savoir : l'équivalent mécanique 424; un coefficient d'utilisation pratique qui ne saurait jamais dépasser $\frac{1}{5}$, et qui reste presque toujours beaucoup au-dessous de cette valeur; enfin la chaleur de combustion de ce mélange complexe. En ce qui concerne ce dernier élément, on a indiqué des nombres assez variables ([6]). On caractérise d'ordinaire le rendement effectif d'un semblable moteur par le nombre de litres de gaz qui lui est nécessaire, pour entretenir pendant une heure la puissance d'un cheval, c'est-à-dire ce que l'on appelle un *cheval-heure* ([7]).

([1]) Jules Armengaud. *L'aéronaute*, avril 1878, p. 112.
([2]) *Ibidem*, p. 112.
([3]) *Ibidem*, p. 114.
([4]) Voy. n° 515.
([5]) Voy. n° 426.
([6]) Indépendamment de certaines divergences dans les expériences et les modes de calcul employés, une certaine variabilité du résultat est inhérente à celle de la composition chimique d'un produit aussi complexe. On peut citer, en ce qui concerne la chaleur de combustion d'un mètre cube de gaz, les nombres suivants exprimés en calories :

4900 — Ruhlmann. *Handbuch der mechanischen Wärm Theorie.*
5340 — Péclet. *La chaleur*, t. I, p. 116.
5520 — Witz. *Annales de chimie et de physique*, 1883, p. 304.
6000 — Schottler. *Die Gasmaschine.*
8000 — Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 30.
9000 — Résal. *Mécanique générale*, t. IV.
11900 — Adams. *On the Heating Power of Coal Gas.*

Si l'on adopte, comme une moyenne assez élevée, le chiffre de 8000 calories pour le mètre cube, on pourra prendre corrélativement le nombre rond 10 000 rapporté au kilogramme de gaz.

([7]) Le cheval-heure représente un nombre de kilogrammètres égal à :

$$75 \times 60 \times 60 = 270\,000.$$

Cette énergie peut se développer dans le mélange d'air et de gaz suivant deux modes distincts : la *combustion* ou la *détonation* [1]. La transmission de l'*onde explosive* est considérablement plus vive que celle de la simple *inflammation*. La dilution par des produits inertes tend à ramener du second mode au premier. La compression a, au contraire, pour effet de faire passer du régime de la combustion simple à celui de la détonation proprement dite.

L'allure pratique de l'explosion dans les machines à gaz varie avec la nature du mélange, sa compression préalable, l'intensité de l'allumage, l'influence des parois, la vitesse du piston, etc. Le point le plus haut du diagramme [2], pour lequel la tension arrive à son maximum, correspond à l'instant où les diminutions de pression dues à l'action des parois et au travail qui s'accomplit sur le piston, arrivent à compenser, pour la dépasser ensuite, la tendance à l'augmentation de force élastique qui résulte de l'achèvement de la déflagration. Quand l'inflammation s'opère vite et bien, cet instant s'atteint en un dixième de seconde environ.

Pendant un temps aussi court, la vapeur d'eau produite dans cette sorte d'eudiomètre n'a pas le temps de reprendre la forme liquide, quand on réalise le régime de détonation proprement dite. Mais si l'onde explosive s'arrête parce que la température devient trop faible, la flamme peut être ramenée en arrière par la condensation de la vapeur, ainsi que l'ont constaté MM. Berthelot et Vieille.

La dissociation exerce dans ces phénomènes une influence importante, en limitant l'essor de la température avec la combustion proprement dite [3], bien qu'elle soit sans influence sur la propaga-

(1) Pour l'étude de ces importants phénomènes envisagés en eux-mêmes, on se reportera aux beaux travaux de MM. Bunsen, Schlœsing, Berthelot et Vieille, Mallard et Lechatelier. M. Witz s'est attaché, dans ses expériences, à se rapprocher autant que possible des conditions pratiques des moteurs à gaz.

(2) Le *diagramme* est la courbe représentative de la relation effective que présente la pression avec le volume engendré par le piston dans le cylindre. Il est fourni par l'indicateur de Watt, ou par les instruments plus perfectionnés qu'on lui a substitués depuis quelque temps. Leur description nous occupera dans la quatrième Partie de ce Cours.

(3) Berthelot. Sur quelques relations entre les températures de combustion, les chaleurs spécifiques, la dissociation et la pression des mélanges tonnants. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 23 avril 1883, p. 1186.

tion de l'onde explosive. Même avant ce point, MM. Mallard et Lechatelier ont observé (¹) une disparition de calorique, qu'ils attribuent à une augmentation de la chaleur spécifique sous volume constant. Ces savants expérimentateurs y voient un symptôme corrélatif d'un travail moléculaire préparatoire de l'acte décisif de la dissociation.

Une autre influence encore plus efficace tend de même à réduire la température maxima, et, avec elle, le coefficient économique ε. Je veux parler de l'action conductrice des parois. L'hypothèse de l'adiabaticité que l'on conserve encore dans certains calculs, faute de posséder des clartés suffisantes sur le véritable régime intérieur de ces machines, s'éloigne alors considérablement de la réalité. On a donc intérêt à maintenir les parois à la plus haute température compatible avec leur conservation (²). La combustion est d'autant plus rapide, et, par suite, la pression explosive d'autant plus élevée, que la vitesse de détente est plus considérable. Il convient par conséquent de conduire rapidement le piston. La compression préalable joue elle-même un rôle nettement favorable à cet égard. La dilution de la partie active dans une grande masse de gaz inerte n'empêche pas l'accomplissement de la combustion totale, mais elle intervient comme modérateur de la température. Elle agit jusqu'à un certain point à la manière de la paroi, en exerçant une action refroidissante. Il faut toutefois noter cette différence essentielle, que la chaleur enlevée par le métal passe en pure perte dans l'eau froide qui l'environne, tandis que celle qui est soustraite par le gaz étranger sert à élever la pression de ce dernier, de manière à travailler sur le piston. En outre, en diminuant la température générale, elle amortit d'autant l'action de paroi, qui dépend de l'écart des états thermiques.

M. Dugald Clerk, dans les expériences qu'il a exécutées sur le

(¹) *Annales des mines*, 7ᵉ série, t. VII.

(²) Witz. *Annales de chimie et de physique*, 1883, p. 320. — Berthelot et Vieille *Sur la force des matières explosives*, t. I. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 8 janvier 1883, 18 mars 1884). — Schlotter. Sur le régime de la combustion dans les machines à gaz. *Journal des ingénieurs allemands*, t. XXX, 1886, p. 209, 325, 600. — Douglas. Explosion of heterogeneous mixtures of coal gas and air. *The Engineer*, 22 avril 1887.

moteur à gaz dont il est l'inventeur, a trouvé, en ce qui concerne la répartition de la chaleur, les résultats suivants :

Conversion en travail.	17,83
Perte par l'échappement.	29,28
Perte par les parois.	52,89
	100,00

Dans une expérience de Tresca sur un moteur à gaz à double effet, le métal emportait jusqu'à 85 % de la chaleur de combustion [1]. MM. Perry et Ayrton ont constaté dans leurs essais une perte par les parois égale à 2,22 fois le travail utile indiqué par le diagramme.

414 — L'emploi des moteurs à gaz se recommande par la grande élévation de la température, condition essentielle d'un bon coefficient économique ε. Le rendement thermique ε_2 se trouve lui-même amélioré, ainsi que nous l'avons déjà dit, en ce que le phénomène de la combustion reste enfermé dans l'intérieur du cylindre. La suppression d'un générateur spécial constitue une grande simplification. La mise en marche devient instantanée. On en peut dire autant de l'arrêt. Il en résulte, outre l'économie de temps et la facilité du service, la suppression des dépenses de mise en feu et de mise hors feu, ainsi que de toute consommation pendant le repos. Tout départ inopiné est impossible. Les dangers d'explosion inhérents aux chaudières à vapeur qui renferment une grande masse volatilisable emmagasinée, n'existent plus dans les conditions actuelles. Le chauffeur disparaît avec la chaudière. Les restrictions administratives, les conditions d'assurances se trouvent facilitées. Le fonctionnement est commode, silencieux pour les bonnes machines, très propre, exempt des incommodités inhérentes à l'emploi de l'eau et du charbon. Le combustible arrive de lui-même aux étages les plus élevés des habitations à travers les conduites montantes. Sous ce rapport, il fournit une solution du trans-

(1) Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 263.

port de la force, qui se trouve portée à domicile au moyen d'usines centrales d'élaboration, et d'une canalisation déjà créée pour l'éclairage. Ce mode d'emploi de l'énergie se prête admirablement à la subdivision en petites forces, pour faciliter le travail domestique et actionner jusqu'à des machines à coudre. Ces moteurs se répandent également pour l'élévation des matériaux aux abords des constructions, pour le fonctionnement des machines électriques[1], etc.

On a souvent essayé [2], mais avec peu de succès, l'application du moteur à gaz aux tramways. Il est trop encombrant, et ne présente pas les mêmes facilités que la vapeur pour le changement de marche. On a mieux réussi en ce qui concerne la commande directe de certaines machines-outils, telles que le marteau à gaz de Robson et Rukney [3].

En compensation d'aussi grands avantages, il est nécessaire d'ajouter que la température disponible est tellement élevée que l'on se voit ordinairement obligé d'en amortir l'essor, au détriment de l'adiabaticité, déjà si compromise. Le cycle réel s'éloigne ainsi considérablement de celui de Carnot, la courbe de détente s'abaissant beaucoup au-dessous de l'adiabatique, et le coefficient ε_1 devient très faible. Remarquons enfin que le gaz est un combustible de seconde main, relativement cher, et limité, par sa nature même, à l'emploi dans les villes [4].

§ 2

EFFET UTILE

415 — La complication des influences mises en jeu, et l'incertitude qui plane sur la plupart d'entre elles, enlèvent beaucoup

(1) On estime que le gaz consommé pour les dynamos de l'éclairage rend environ deux fois plus de lumière que s'il était brûlé directement dans des becs ordinaires.

(2) Crossley, Krauss, Pursell, Stevens (Richard. *Moteurs à gaz*, p. 444. — *L'Industrie moderne*, janvier 1887. — *Journal des usines à gaz*, 4 et 20 novembre, 20 décembre 1886.

(3) Voy. ci-dessus, n° 398, note 1.

(4) Nous verrons plus loin (n° 428) que, pour les moteurs agricoles, on a la ressource des moteurs à air carburé artificiellement.

d'intérêt aux applications numériques que l'on pourrait tenter. à cette occasion, des principes de la thermodynamique. J'esquisserai cependant la marche à suivre à cet égard, sous réserve de l'introduction de coefficients de correction importants [1].

La composition du gaz de l'éclairage est assez variable. Nous admettrons la suivante [2] comme point de départ de ce calcul :

ÉLÉMENTS CONSTITUANTS	FORMULES	TENEUR	POIDS SPÉCIFIQUE — Kilogrammes	POUVOIR CALORIFIQUE — Calories
Hydrogène protocarboné. .	C^4H^4	0,128	1,275	11,858
Hydrogène bicarboné. . . .	C^2H^4	0,662	0,727	15,065
Oxyde de carbone.	CO	0,210	1,124	2,405

Ces chiffres fournissent comme poids spécifique du mélange $0^{kg},848$; comme volume spécifique, $1^{m^3},180$, et comme pouvoir calorifique. 10 684 calories.

Si l'on part des valeurs des équivalents chimiques :

$$O = 100,00; \qquad H = 12,15; \qquad C = 75,00:$$

le total de l'oxygène qu'il sera nécessaire d'ajouter pour amener, dans un kilogramme de gaz, tout le carbone à l'état d'acide carbonique, et convertir en eau tout l'hydrogène, sera de $3^{kg},207$. Comme l'air ne renferme que 23,13 parties d'oxygène contre 76,87 d'azote, il s'adjoindra à l'opération un poids inerte de ce dernier gaz égal à $10^{kg},656$; le poids total de l'air employé devenant $13^{kg},863$. Or le poids spécifique de ce mélange est $1^{kg},293$; le volume absolu sera donc $10^{m^3},619$; c'est-à-dire plus de 9 fois celui du gaz employé.

(1) Berthelot et Vieille. Calcul des températures des mélanges gazeux détonants. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 10 mars 1884, p. 601.

(2) Résal. *Mécanique générale*, t. IV, p. 446.

Ce dernier ne figure par conséquent que pour un dixième environ dans le mélange explosif.

Les résultats de la combustion sont les suivants :

ÉLÉMENTS CONSTITUANTS	FORMULES	POIDS ABSOLU — Kilogrammes	POIDS SPÉCIFIQUE — Kilogrammes	CHALEUR SPÉCIFIQUE sous pression constante — Calories
Acide carbonique.	CO^2	2,554	1,977	0,2163
Vapeur d'eau.	HO	1,653	0,806	0,4805
Azote.	Az	10,656	1,256	0,2438
		14,863		

Ces chiffres indiquent, comme poids spécifique du mélange de gaz brûlés, $1^{kg},259$; et pour sa chaleur spécifique sous pression constante, $C = 0^{Cal.},2654$. La chaleur spécifique sous volume constant s'en déduit (n° 263) à l'aide de l'équation paramétrique :

$$(C - c)\,E = \frac{\alpha p_0}{\varpi_0}.$$

On trouve ainsi pour c la valeur $0^{Cal.},1842$ [1].

Si l'on évalue d'après cela l'élévation de température que peuvent fournir théoriquement les 10 684 calories disponibles, appliquées aux $14^{kg},863$ de gaz brûlés, que l'on suppose s'échauffer à volume constant avec le coefficient de chaleur spécifique 0,1842, elle sera fournie par l'expression :

$$\frac{10684}{14{,}863 \times 0{,}1842} = 4000^{D}.$$

Tel serait donc l'échauffement, si la combustion était complète, due au minimum d'oxygène, sans dissociation, sans aucune expansion

(1) Le rapport des deux chaleurs spécifiques est 1,441 au lieu du nombre 1,410 qui correspond aux gaz parfaits.

de volume, sans action des parois, sans variation de la chaleur spécifique avec la température (¹). Mais nous avons vu, au contraire, combien toutes ces causes de perturbation sont puissantes et impossibles à écarter. Elles ont pour résultat d'abaisser énormément cette limite de température, que les appareils seraient d'ailleurs incapables de supporter. Il est toutefois impossible, dans l'état actuel de la science, d'apprécier numériquement cette réduction (²).

416. — On peut de même évaluer théoriquement la pression (³) qui sera due à la **détonation**, en la supposant effectuée sous volume rigoureusement constant. Nous invoquerons pour cela, en faisant toutes réserves sur son emploi, l'équation typique des gaz parfaits :

$$pv = \mathrm{R}t, \qquad p'v = \mathrm{R}t',$$
$$\frac{p'}{p} = \frac{t'}{t}.$$

Si donc on suppose le mélange pris à la température de 17 degrés par exemple, il viendra :

$$\frac{p'}{p} = \frac{(17 + 273) + 4000}{(17 + 273)} = 14.$$

La pression serait ainsi de 14 atmosphères.

(¹) D'après MM. Berthelot et Vieille, cet élément, ordinairement considéré comme constant pour les gaz, varie aux températures très élevées. Les chaleurs spécifiques de l'azote, de l'acide carbonique, de la vapeur d'eau, au lieu de 0,244 ; 0,215 ; 0,480 : prennent à 2000 degrés les valeurs 0,215 ; 0,308 ; 0,677. L'adoption de ces valeurs abaisserait considérablement le résultat du calcul.

(²) M. Maurice Demoulin évalue à 2500 degrés du thermomètre usuel la température de la machine Otto, et à 2000° celle du moteur Gardie (*Portefeuille économique des machines*, 3ᵉ série, t. XI, p. 134). M. Witz a observé une température de 2197° avec le gaz de l'éclairage, dans des conditions qu'il définit avec soin, et celle de 1377° avec l'oxyde de carbone (*Annales de chimie et de physique*, 1883, p. 320). M. Dugald Clerk a obtenu une température de 1537° dans son moteur à pompe (*Mémoire à l'Institution des Ingénieurs civils de Londres*).

Quant à la température des gaz *à l'échappement*, elle diffère peu de 400°, ainsi qu'il ressort des expériences exécutées sur un moteur Otto par MM. Morgan, Brooks et Steward (*Van Nostrand's Engineering Magazine*, février 1884).

(³) Vieille. Sur la mesure des pressions développées en vase clos par les mélanges gazeux. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 25 décembre 1882, p. 1280. — Mallard et Lechatelier. Sur les pressions instantanées produites pendant la combustion des mélanges gazeux. *Ibidem*, p. 1352.

Mais il s'opérera également sous ce rapport une réduction considérable, tout à la fois d'après celle que doit supporter déjà le chiffre de 4000[D], et en raison du défaut d'exactitude de l'hypothèse employée. M. Clerk a constaté dans ses expériences [1] une tension absolue de 8,5 atmosphères, en faisant détoner dans un cylindre un mélange d'air et de gaz d'éclairage, dans des proportions exactement suffisantes pour la combustion. Les expériences de **MM. Mallard** et Lechatelier relatives à l'explosion du grisou [2], qui constitue un phénomène analogue, ont indiqué des pressions maxima de 6,5 atmosphères.

417 — Il est facile de mettre en évidence par le calcul l'avantage que l'on retirera de la compression préalable du mélange inflammable. Si nous admettons en effet que ce dernier soit comprimé d'après le rapport de volumes $\frac{1}{\delta}$, et suivant le mode adiabatique, faute de connaître *a priori* une loi qui soit expérimentalement plus exacte, la température initiale t deviendra (éq. 24) :

$$t' = t\delta^{k-1},$$

et l'on sera obligé de surmonter le travail résistant (n° 270) :

$$T' = Ec(t' - t).$$

Appelons Q la quantité de chaleur subitement dégagée dans la déflagration sous volume constant par le poids P de mélange. L'élévation de température sera $\frac{Q}{Pc}$, ou plus simplement $\frac{q}{c}$, si q désigne la capacité calorifique de l'unité de poids du mélange combustible [3]. On aura donc pour la température maximum :

$$t'' = t' + \frac{q}{c}.$$

[1] *Theory of the Gas Engine*, p. 65.

[2] Mallard et Lechatelier (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XCI, p. 827 ; t. XCV, p. 1353. — *Annales des Mines*, 8e série, t. IV, p. 274). — Vieille. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XCV, p. 1280.

[3] Et non pas du gaz d'éclairage lui-même. Nous confondons d'ailleurs, pour plus de

La détente adiabatique se produit à partir de ce moment, avec un rapport de dilatation précisément inverse de celui de la compression, puisque le gaz retourne à son volume initial par le mouvement du piston. Il vient d'après cela, pour la température finale :

$$t''' = t''\left(\frac{1}{\delta}\right)^{k-1},$$

et l'on recueille pendant cette période le travail :

$$T''' = Ec\,(t'' - t''').$$

On obtient par conséquent, comme résultat définitif :

$$T = T''' - T',$$

c'est-à-dire :

$$T = Ec\,(t - t' + t'' - t''')$$
$$= Ec\left(t - t''' + \frac{q}{c}\right).$$

Mais d'ailleurs :

$$t''' = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{k-1}\left(\frac{q}{c} + t\delta^{k-1}\right)$$
$$= t + \frac{q}{c}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{k-1}.$$

Il vient donc enfin, par la disparition de c :

$$T = Eq\left[1 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^{k-1}\right];$$

[illegible]'on reconnaît clairement qu'en augmentant la caractéristique δ de la compression, on accroît la valeur de T.

simplicité, avec la chaleur spécifique c du mélange explosible, celle des gaz brûlés, qui en est cependant distincte.

§ 3

MACHINES ATMOSPHÉRIQUES

418 — Les considérations qui précèdent sont de nature à faire ressortir les avantages de la compression préalable du mélange explosif. Cette opération permet d'obtenir le même effet utile avec des dosages moins riches en gaz combustible. L'échauffement qu'elle produit assure mieux le caractère détonant, ainsi que l'élévation de température, gage d'un meilleur coefficient économique. Le piston, tout en gardant son allure régulière sous l'influence du volant, emmagasine une plus grande quantité de travail dans un faible parcours, pour lequel la moindre étendue des parois diminue les pertes dues à leur action. La compression préalable, en resserrant préalablement toutes les articulations, diminue les fuites au moment de l'explosion.

Une opération de cette importance constitue évidemment l'une des meilleures caractéristiques d'après lesquelles on puisse classer les machines à gaz ([1]). Nous les distinguerons donc en machines à compression ou sans compression, en formant en outre, en premier lieu, la catégorie supplémentaire des *machines atmosphériques*, dans lesquelles le fluide subit au contraire une dilatation.

Avec ces derniers moteurs, la détente est tellement prolongée qu'en raison du *lancé* du piston, la tension s'abaisse finalement au-dessous de la pression barométrique. Dès lors, il se présente cette circonstance originale que la course rétrograde, au lieu d'être résistante comme dans le cas général, devient motrice, pour une partie du moins de son parcours, en raison du degré de vide intérieur ainsi engendré. On observe d'après cela les phases suivantes.

Si AE (fig. 265) représente l'horizontale de la pression atmosphérique, une portion O*c* de la course directe est employée à aspirer le mélange, à une tension qui devra rester un peu inférieure à la

([1]) La compresssion était déjà signalée dans l'addition de 1801 au brevet de Lebon. Elle a été spécifiée ensuite par Wright en 1833, et par Millon en 1861.

précédente pour permettre cet écoulement. A ce moment se produit la détonation, qui, dans un intervalle très court *cd*, porte la pression à son maximum. La détente se développe à partir de là pendant le reste de la course, suivant *df*. La tension s'abaisse en *e* à la pression atmosphérique, pour diminuer ensuite au-dessous de cette valeur jusqu'au point mort *f*.

Au delà commence la course rétrograde. Pendant le parcours *fg*, le piston se trouve ramené. à la fois sous l'influence de la raré-

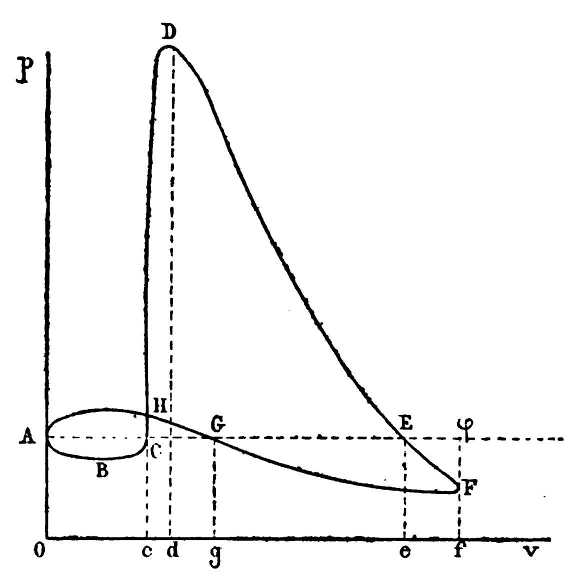


Fig. 265. — Diagramme de la machine Otto-Langen

faction intérieure, et en raison de la force vive du volant. La pression barométrique ayant fini par se rétablir en G, se trouve ensuite dépassée de *g* en O, ce qui achève de balayer au dehors, à travers l'orifice d'échappement, les produits de la combustion.

Si l'on n'envisage, pour l'évaluation du travail, que la pression effective, à savoir la différence des ordonnées du diagramme et de la droite atmosphérique AE, l'on obtiendra, dans la course directe, l'aire motrice CDE, avec les aires résistantes ABC et EFφ. La course rétrograde, dans laquelle les abscisses changent de signe, présente, pour le piston, l'aire motrice φFG et l'aire résistante GHA. On

obtient donc, en résumé, la différence entre les deux noyaux HDEFGH et HABCH, ou, en d'autres termes, la somme algébrique de ces noyaux, conformément au principe général qui a été formulé ci-dessus (n° 376).

419 — *Machine Otto-Langen.* — Le moteur Otto-Langen [1] constitue le type essentiel des machines atmosphériques [2].

Le cylindre est vertical (fig. 266 et 267). La force vive du volant commence par remonter le piston d'une petite quantité, en aspirant au-dessous de lui le mélange explosif. L'inflammation se produit par le jeu d'un

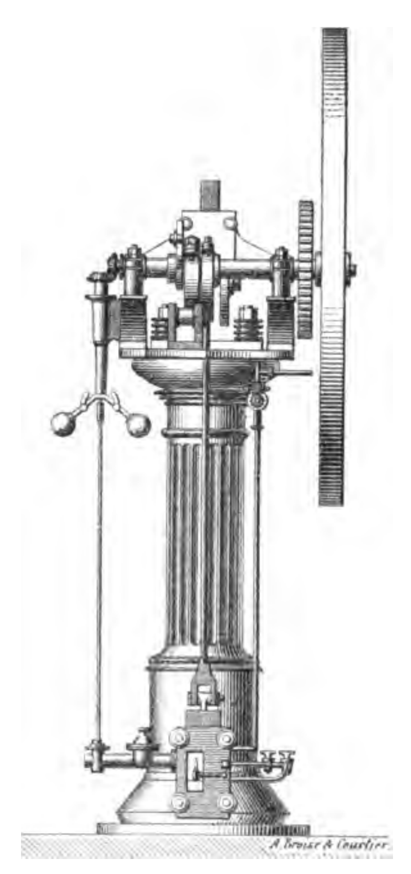


Fig. 266. — Moteur à gaz Otto-Langen. (Élévation.)

[1] Pour la première et la seconde (n° 425) des machines Otto, l'on peut consulter les sources suivantes : Tresca. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. I, p. 116, 166 ; II, 524. — Hirsch. *Rapports du jury international de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 306. — Schmitz. *Annuaire de la Société des anciens Élèves des Écoles d'arts et métiers*, 1867. — Sinigaglia. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 2e série, t. X, p. 348. — de Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 241. — Sciama. Moteurs industriels, p. 220. — *Portefeuille économique des machines*, 1868, pl. 3 ; 1876, pl. 17, 18, 19 : 1880, pl. 27, 28 ; 1884, pl. 7, 8, 9. — *Éclairage au gaz*, 5 juin 1870. — *Revue industrielle*, 20 février 1884, 4 novembre 1886. — *Le gaz*, 15 décembre 1887. — *Journal des usines à gaz*, 20 décembre 1886. — *Les mondes*, t. LI, p. 8.

Jenkins. *Gas and caloric Engines*, p. 57. — *Engineering*, 1875, t. II, p. 515 ; 1879, I, 565 ; 1881, II, 79 1886, I, 333 ; 1887, II, 42. — *The Engineer*, 1881, t. I, p. 233 ; 1885, II, 260 ; 1885, I, 424 ; II, 244, 275, 421 : 1886, II, 244 ; 1888, II, 26. — *American machinist*, 7 février, 31 octobre 1885, 27 août 1887.

Gollner. *Technische Blätter*, 1886, p. 10. — *Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss im Preussen*, 1868.

[2] On peut également rattacher à cette classe les moteurs de Gilles, Hallewel, Robson.

tiroir à deux brûleurs, l'un permanent, l'autre intermittent, rallumé par le premier après chaque explosion. La détonation lance le piston comme un projectile vers la partie supérieure. Rien ne limite d'ailleurs la course, si ce n'est un tampon d'arrêt de sûreté disposé en vue des cas extrêmes, sans qu'il doive entrer en jeu dans

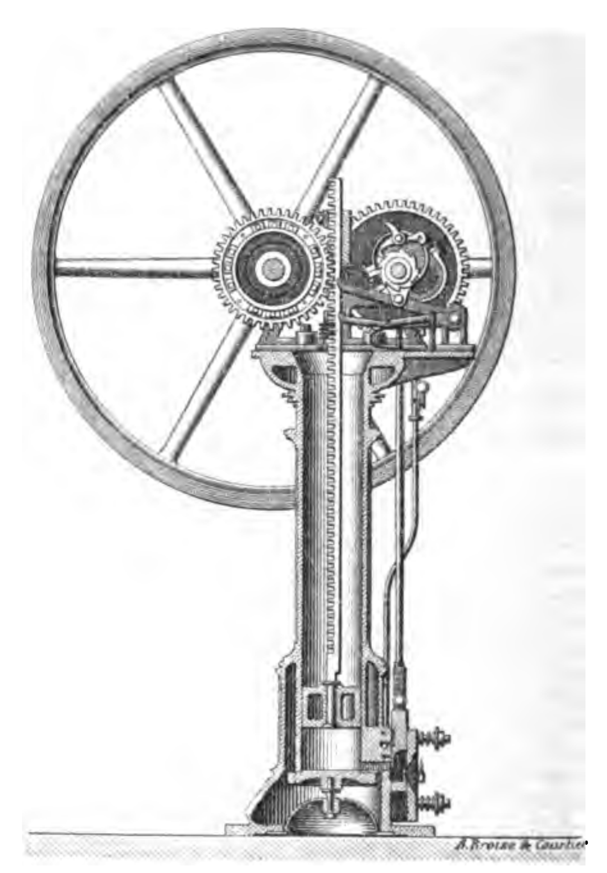


Fig. 267. — Moteur à gaz Otto-Langen (coupe verticale).

les conditions ordinaires. C'est la pesanteur seule qui, en raison de son travail résistant, finit par détruire la force vive communiquée par la déflagration du gaz, dont le volume a été limité convenablement à cet effet.

Pendant cette ascension, le piston ne se trouve pas en communication avec l'arbre du volant. L'action serait trop dure et bri-

sante. La crémaillère attaque, à la vérité, le pignon avec lequel elle ne cesse d'engrener; mais celui-ci fonctionne comme un encliquetage, sans entrainer l'arbre. C'est pendant la course inverse, que la pesanteur rend avec douceur sur le piston un travail égal à celui de la montée. La connexion du pignon avec l'arbre tournant se trouve alors embrayée, et l'énergie développée par la combustion s'écoule ainsi définitivement dans la machine, au moyen de ces ingénieux artifices.

Ce moteur a beaucoup fixé l'attention au moment de son apparition. Il ne consommait que 800 litres de gaz par cheval-heure, même pour de très petites forces, telles que celle d'un demi-cheval, dépense très inférieure à ce que l'on avait réalisé jusqu'alors. Néanmoins sa marche bruyante et peu régulière, ainsi que la complication du mécanisme, l'ont bientôt fait délaisser pour une autre machine du même auteur (¹).

§ 4

MACHINES SANS COMPRESSION

420 — *Machines sans compression.* — Dans le type précédent, la pression initiale commence par être un peu inférieure à celle de l'atmosphère, et ce caractère s'accuse encore davantage pendant la contre-course. Nous comprendrons dans une seconde catégorie les moteurs qui sont à la fois sans compression préalable, et sans dépression importante à aucun moment de leur fonctionnement.

La course directe comprend alors, pendant 30 à 40 °/₀ de sa longueur, une période d'aspiration du mélange explosif, puis la détonation, et enfin une détente prolongée qui s'étend presque jusqu'à la pression atmosphérique. La course rétrograde est consacrée à l'évacuation des produits de la combustion. Le régime est donc à simple effet. Un volant entretient la rotation, et détermine le passage des points morts.

(¹) Voir n° 425.

421 — *Machine Bisshop.* — Le moteur Bisshop [1] rentre dans cette catégorie. Il est l'un des plus employés par la pratique, spécialement pour les petites forces. Il peut descendre à cet égard jusqu'à $\frac{1}{15}$ de cheval. L'inventeur a en même temps essayé d'apporter

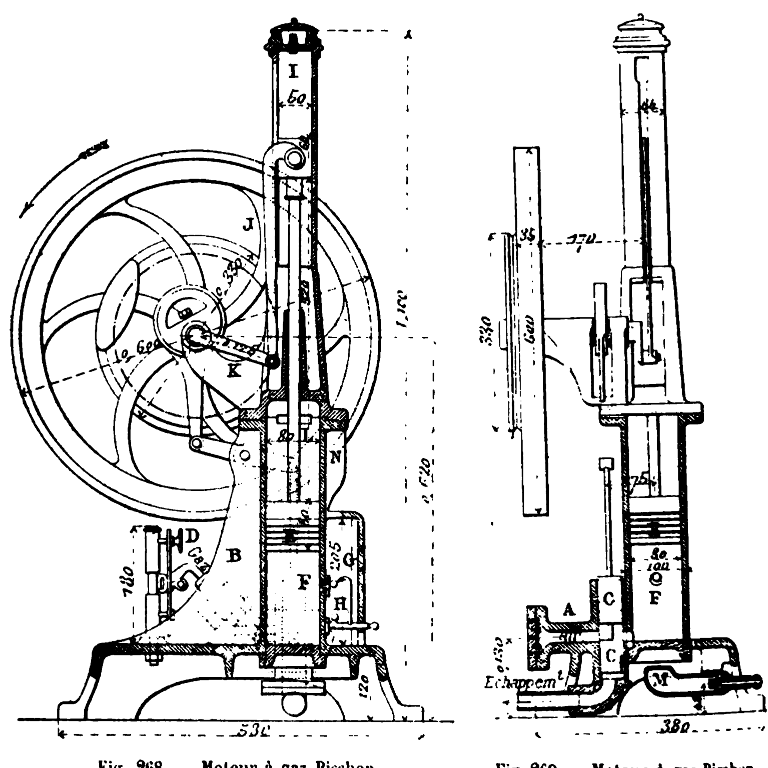


Fig. 268. — Moteur à gaz Bisshop. (Coupe longitudinale.)

Fig. 269. — Moteur à gaz Bisshop. (Coupe transversale.)

certaines modifications à sa machine pour l'approprier à des puissances plus importantes.

Les figures 268 et 269 représentent le petit moteur Bisshop. Les arrivées respectives de l'air et du gaz s'effectuent respectivement

[1] Mémoire de M. Bisshop. Paris, 1880. — Sciama. *Moteurs anciens et modernes*, p. 226. — Hirsch. *Rapports du jury international de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 309. — *Portefeuille économique des machines*, 1879, pl. 11. — Armengaud. *Conférence sur les moteurs à gaz à l'Exposition universelle* de 1878, p. 20. — *Les Mondes*, t. XLVI, p. 36 ; t. LI, p. 347. — *Engineering*, 25 octobre 1878, p. 331. — *The Iron Age*, 6 février 1879, p. 11.

par A et B. Ces deux fluides traversent un distributeur C, dans lequel s'opère le mélange. On règle le dosage à la main, en serrant plus ou moins une pince D qui comprime le caoutchouc d'amenée, et crée pour l'écoulement une résistance variable à volonté.

Le distributeur s'étant effacé sous l'empire de ses liaisons avec le mécanisme, l'alimentation se trouve interrompue. Le piston E démasque l'orifice F, et le bec de gaz G fournit une langue de flamme, qui est aspirée à travers cet orifice par le mouvement du piston, en provoquant l'explosion qui plaque sur leurs sièges les clapets A, B, G. Si le bec G se trouve éteint par le contre-coup malgré cette fermeture, une flamme fixe H le rallumera. Le piston ainsi projeté en avant est guidé en ligne droite par le coulisseau I, qui l'unit à une bielle pendante J et à la manivelle K de l'arbre moteur.

Cette disposition géométrique détermine une vitesse ascendante plus grande que celle de la descente, circonstance favorable au rendement, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus. Les éléments du mécanisme sont disposés de manière que la bielle soit, au moment de la détonation, très sensiblement verticale et perpendiculaire à la manivelle, de telle sorte que ces organes supportent le mieux possible l'action brusque que leur transmet alors la tige du piston. Ces pièces sont en outre équilibrées. La partie supérieure du cylindre reste constamment en communication avec l'atmosphère à travers l'ouverture L. La course ne saurait varier, et se trouve rigoureusement réglée par les points morts de la manivelle.

Un peu avant la fin du trajet, le distributeur rouvre la communication avec l'extérieur, de manière à compléter la chute de pression et à préparer l'évacuation. Cet organe, construit en bronze, est entouré d'une gaine du même métal, de telle sorte que ses mouvements soient très doux. Quant au graissage du cylindre lui-même, il résulte uniquement des dépôts produits par l'explosion.

Celle-ci ne s'effectue convenablement que lorsque les parois sont déjà parvenues à une certaine température. Pour la préparer, quand il s'agit de mettre en marche, on allume un réchauffeur M. Afin de prévenir, d'autre part, un échauffement excessif des parois, on les munit extérieurement d'ailettes méridiennes assez pro-

fondes N, venues de fonte avec le cylindre, et destinées à faciliter la déperdition de la chaleur.

Pour de petits moteurs Bisshop développant 3 à 6 kilogrammètres par seconde, la consommation est de 450 à 700 litres de gaz par cheval-heure; le diamètre du piston : $0^m,60$ à $0^m,80$; sa course : $0^m,22$ à $0^m,30$. Le nombre de tours par minute s'élève de 150 à 180 pour la première limite, et se réduit à 100 ou 120 pour la seconde.

§ 5

MACHINES A COMPRESSION

422 — *Machines à compression.* — Les machines à compression peuvent se ranger en deux classes, suivant que l'explosion du mélange préalablement comprimé s'opère sous pression constante, ou à volume constant. Si l'on considérait, malgré l'insuffisance reconnue de cette approximation dans le cas actuel (n° 415), la compression et la détente comme adiabatiques, on se rattacherait par là aux deux cycles qui ont été étudiés ci-dessus (n° 387). Or nous avons reconnu que tous les deux présentent le même coefficient économique. On ne pourrait donc apercevoir ici, de ce chef, aucun motif de préférence. Toutefois le régime de combustion sous pression constante paraît difficile à réaliser avec un seul cylindre. De là une complication qui tend à faire écarter ce type. Il a pris en effet, dans la pratique, beaucoup moins de développement que le second. On y peut cependant rattacher les machines Crowe, Foulis, Livesay, Welch, etc.

423 — Au contraire, les moteurs fondés sur le principe de la combustion à volume constant sont extrêmement nombreux. Ils se rangent encore en deux groupes.

Dans le premier, on s'est résigné à subir l'inconvénient que je viens de signaler, en recourant à l'emploi de deux cylindres, dont l'un agit à titre de pompe de compression et l'autre comme récepteur.

La figure 270 représente comme exemple le diagramme ABCDEFA observé sur une machine Dugald Clerk[1]. Le point A représente l'état du mélange comprimé à l'état initial. L'explosion le porte en B, presque à volume constant. La détente est représentée par l'arc BC. De *c* en *d*, s'effectuent l'échappement anticipé et la chute finale de pression. Entre *d* et *e*, la mise en communication avec la pompe

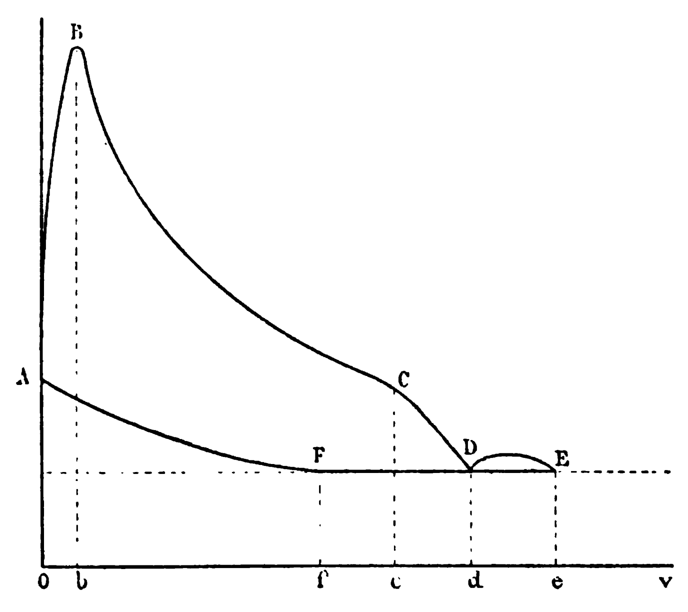


Fig. 270. — Diagramme de la machine Dugald-Clerk

contribue à balayer les produits de la combustion. L'échappement s'achève sur le parcours *ef*; et, de F en A, s'opère la compression du nouveau mélange. Les machines Edwards, Lucas, Watson, etc., peuvent être rattachées à cette catégorie. Parfois, comme dans le moteur Jenner, on donne deux coups de pompe successifs pour une seule explosion dans le cylindre récepteur.

424 — Dans le second groupe, la machine est à cylindre unique. Il suit de là immédiatement une circonstance très caractéristique.

(1) Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 200. — *Revue industrielle*, 1881, p. 293. — *The Engineer*, 2 octobre 1885. — Dugald Clerk. *Gas Engines*, p. 185.

Ces moteurs ne pourront, en effet ([1]), fournir qu'une seule course motrice sur quatre courses simples; tandis que les machines à simple effet en donnent une sur deux, et que, dans les appareils à double effet, toutes les courses simples sont motrices. On appelle parfois ces récepteurs : *machines à quart d'effet* ou *machines à quatre temps;* régime qui a été indiqué pour la première fois par Beau de Rochas.

De là découle la nécessité d'employer, avec une vitesse considérable (160 à 180 tours), un volant d'un moment d'inertie notable. On peut également, pour atténuer l'irrégularité de l'allure, coupler deux appareils semblables sur le même arbre avec des manivelles parallèles; l'explosion et l'échappement de l'un des cylindres correspondant à l'aspiration et à la compression dans l'autre.

En effet, ce régime tout spécial comprend les diverses fonctions suivantes :

Première course. — *Directe*. . . . . Aspiration.
Deuxième course. — *Rétrograde* . . . Compression.
Troisième course. — *Directe*. . . . . Explosion.
Quatrième course. — *Rétrograde* . . . Échappement.

Toutefois, dans la pratique, on prélève, vers la fin de la troisième course, la seule motrice, une certaine portion du parcours pour effectuer un *échappement anticipé,* qui détermine une chute décisive de la pression, et prépare ainsi l'évacuation des produits de la combustion, de manière qu'elle puisse être effectuée sans trop de résistance pendant la quatrième course.

Ces diverses circonstances se trouvent accusées par des diagrammes tels que celui que représente la figure 271. La première course, qui aspire le mélange explosif à une pression peu différente de celle du baromètre, est figurée par l'horizontale atmosphérique AB. La contre-course comprime le fluide à deux ou trois atmosphères, et fournit le tracé BC. Dans la course motrice, l'explosion amène rapidement en d le maximum de pression. La détente

([1]) A moins d'employer des mécanismes compliqués ou d'un entretien difficile, tels que des pistons auxiliaires, ou des garnitures de stuffing box à l'avant du cylindre qui forme corps de pompe.

s'opère ensuite sur la plus grande partie du trajet. L'échappement anticipé dure pendant le parcours *eb*, de manière à faire tomber

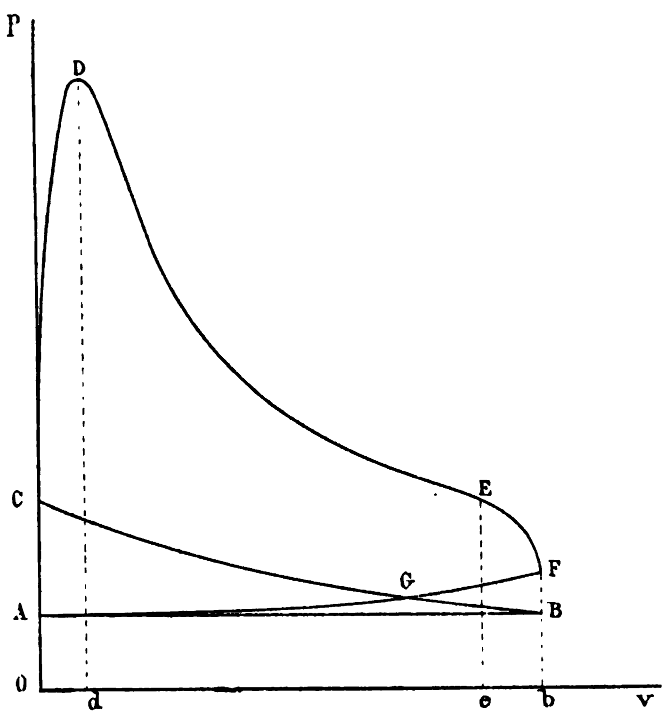


Fig. 271. — Diagramme de la machine Otto.

rapidement la tension de E en F, presque à la pression atmosphérique. Le quatrième coup de piston balaye enfin les gaz brûlés, malgré une contre-pression qui achève de s'abaisser suivant FA jusqu'à la tension extérieure.

En ce qui concerne le travail recueilli, si nous envisageons encore directement la pression effective, en rapportant les ordonnées à la droite atmosphérique AB, nous aurons pour les quatre courses :

$$\text{zéro} - \text{ABC} + \text{ADEFB} - \text{AFB},$$

ou, en réduisant :

$$\text{GCDEF} - \text{GAB},$$

c'est-à-dire la somme algébrique des noyaux intérieurs (n° 376).

425 — *Machine Otto.* — La nouvelle machine Otto présente, à l'extrémité du cylindre, un prolongement dans lequel ne pénètre pas le piston. Cette *chambre de compression*, qui exagère ainsi à dessein l'*espace libre* des distributions ordinaires, reste remplie, en fin de course, d'une partie des produits de la combustion. Lorsqu'on admet ensuite le mélange actif d'air et de gaz carburé en avant ou en arrière de cette masse, il ne s'y répand pas d'une manière homogène. Il garde pour son propre compte une teneur prépondérante, susceptible d'inflammation. En même temps, le fluide inerte sert de régulateur pour l'explosion dont il adoucit le choc, de même que les chambres à air des appareils hydrauliques y amortissent les coups de bélier. Non seulement on arrive ainsi à mieux ménager l'appareil, mais on prolonge l'effet de la déflagration, et l'on tend à rapprocher le diagramme de la forme qu'il présente pour les machines à vapeur, ainsi que nous le verrons plus tard.

Un même tiroir (fig. 272, 273, 274) (¹) sert en général pour effectuer l'admission et l'allumage. L'échappement est réglé par une soupape spéciale. Ce tiroir est serré entre la culasse du cylindre et la contre-plaque par des boulons à ressort, à l'aide desquels on évite les crachements, tout en restreignant le frottement au degré qui est pratiquement inévitable.

Le gaz et l'air pénètrent dans le diffusoir par des trous disposés de manière que le premier continue encore à affluer un peu après la fin de l'admission de l'air. On obtient ainsi un mélange plus riche et plus détonant vers la culasse du cylindre. Pour assembler ces deux pièces dans une région aussi brûlante, les constructeurs emploient avec succès le carton d'amiante.

L'allumage ne saurait s'effectuer, comme dans les cas précédents, par une aspiration de flamme, puisque la pression est maintenant plus grande dans le cylindre qu'à l'extérieur. On provoque la déflagration à l'aide d'un transport de flamme sous pression. A cet effet la contre-plaque-arrière du tiroir porte à la fois un *brûleur permanent*, constamment enflammé à l'air libre, et une prise de gaz, appelée *brûleur intermittent*, que l'on peut voir sur la

(¹) Voy. n° 404, note 1.

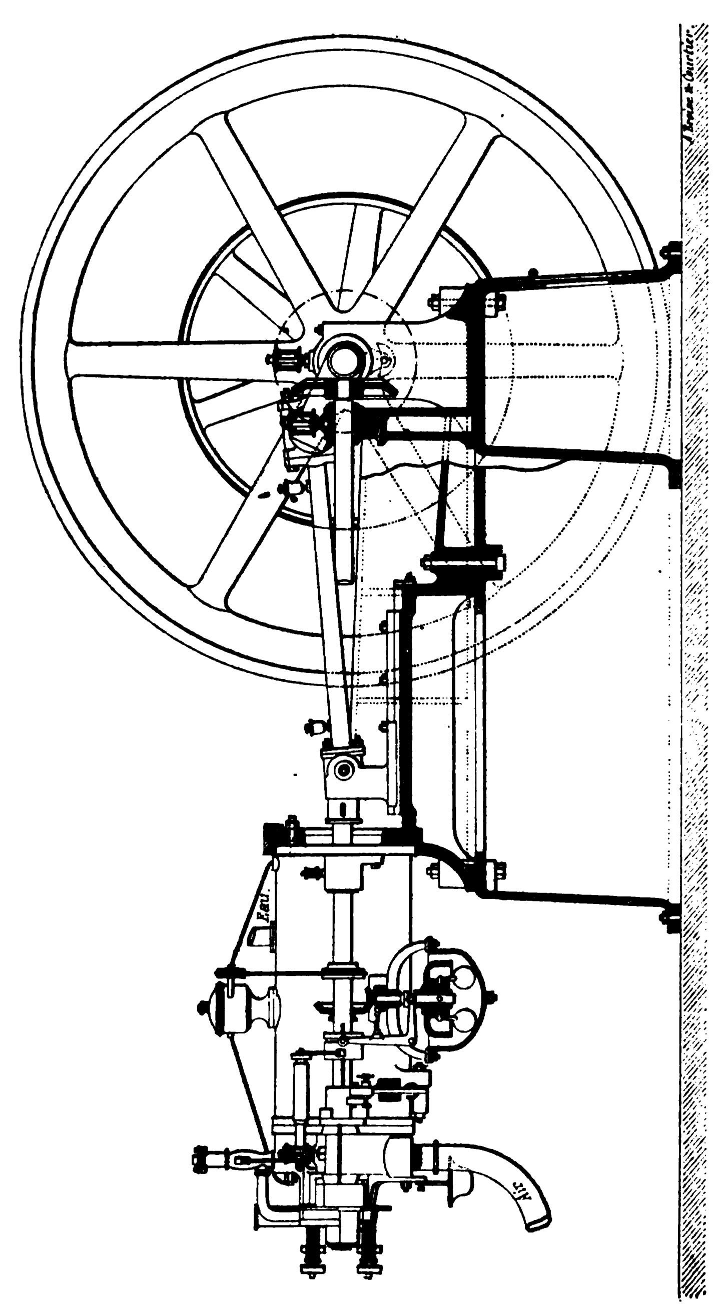


Fig. 272. — Moteur à gaz Otto (Élévation).

figure 274 à gauche du précédent. La lumière du tiroir vient, à l'aide d'une rainure, puiser au brûleur intermittent une certaine quantité de gaz qui, après s'être enflammée en passant devant le brûleur permanent, se trouve transportée entre les deux contre-plaques jusqu'à l'orifice qui sert à la fois pour l'admission et pour l'allumage dans le cylindre. Toutefois, la compression qui a été effectuée à l'intérieur de ce dernier aurait pour effet, ainsi que nous venons de le dire, de refouler la flamme et de la *souffler*, au lieu de laisser pénétrer l'inflammation dans cette capacité. Pour prévenir cet obstacle, il est nécessaire que la lumière pleine de gaz embrasé ne vienne communiquer avec le cylindre qu'après avoir été mise, pour son propre compte, en équilibre de pression avec lui.

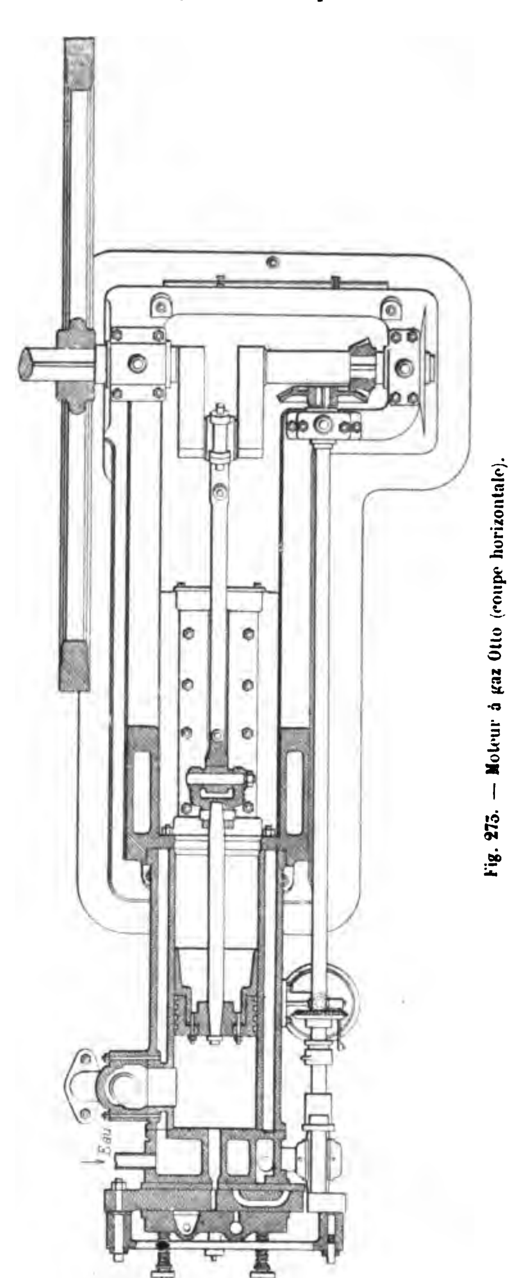


Fig. 275. — Moteur à gaz Otto (coupe horizontale).

A cet effet, on a ménagé un petit *canal d'équilibre*, qui commence par déboucher le premier dans le cylindre, à un ou deux millimètres en avant du bord de la lumière.

Lorsque le moteur Otto est établi sur de grandes dimensions, celles du tiroir deviendraient inadmissibles, si l'on continuait à demander à cet organe tout à la fois l'admission et l'inflammation. On ne le charge plus alors que de cette dernière fonction. La préparation et l'admission du mélange sont effectuées à l'aide d'un diffuseur extérieur au tiroir, et d'une soupape qui s'ouvre dans l'orifice d'allumage.

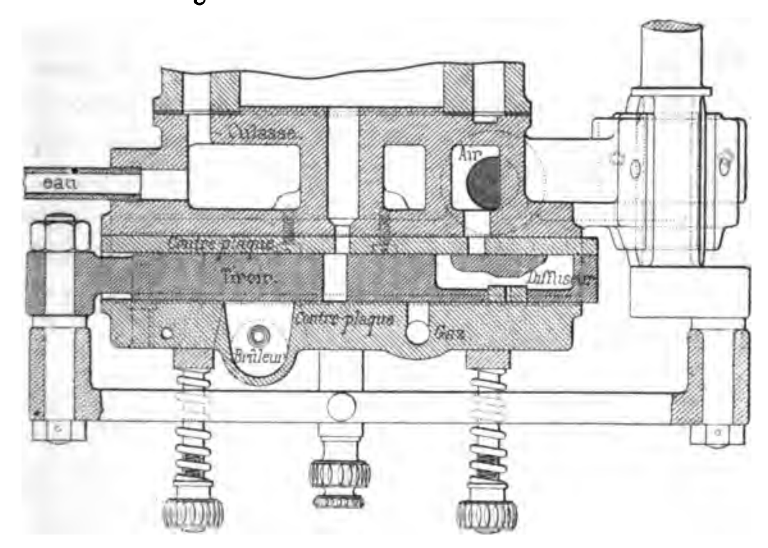


Fig. 274. — Tiroir Otto (coupe horizontale).

Un régulateur à force centrifuge gouverne, à l'aide d'une came, la soupape qui permet l'admission du gaz. Lorsque le moteur n'exige pas une régularité exceptionnelle, cette came vient fermer complètement l'admission du gaz dès que la machine s'emporte. C'est la solution la plus économique, parce que, de cette manière, on n'emploie jamais le mélange qu'à la dose la plus efficace. Mais, pour des appareils plus délicats, tels que ceux qui gouvernent l'éclairage électrique, on dispose le profil régulateur de manière qu'il commence par réduire progressivement l'admission du gaz, avant de la supprimer complètement.

La paroi est refroidie, soit par un courant d'eau, soit à l'aide d'une masse liquide toujours la même, et assez importante pour que ses changements de densité y établissent une certaine circulation.

Les moteurs Otto sont extrêmement répandus. Leur force varie depuis $\frac{1}{8}$ de cheval jusqu'à cent chevaux. Une machine bien établie consomme, suivant les circonstances, de 600 à 850 litres de gaz par cheval-heure. Les frottements donnent lieu à une perte de 4 à 5 % de la chaleur de combustion; l'échappement en consomme 12 à 24 %; la circulation d'eau 45 à 55 % [1].

426 — *Machine Lenoir*. — Le nouveau moteur de M. Lenoir [2] est à compression, à un seul cylindre, et par suite à quart d'effet (fig. 275, 276). L'auteur y a introduit un organe spécial appelé *réchauffeur*, qui enveloppe l'extrémité du cylindre, et l'entretient à une température élevée, déterminée de telle sorte que la compression pendant la contre-course facilite l'inflammation, malgré la

[1] Des expériences exécutées sur un de ces moteurs aux États-Unis, ont permis d'établir la comparaison suivante pour les prix de revient du cheval-heure :

Moteurs à gaz.	0f,440
Moteurs à air.	0f,200
Moteurs à vapeur.	0f,175

Le prix de 0f,44 tomberait à 0f,31 environ, avec le tarif du gaz d'éclairage à Paris, qui est de 0f.30 le mètre cube.

La fabrication du *gaz à l'eau* en Amérique abaisse déjà le prix du mètre cube au-dessous de 0f,08. Mais il y a lieu de tenir compte du rapport des pouvoirs calorifiques qui se réduit souvent pour ces derniers à la moitié, et même au quart de celui du gaz de houille (Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 143, 156, 458).

[2] Sur l'ancienne et la nouvelle machine Lenoir, on peut consulter les sources suivantes : Lipowitz. *Les nouvelles machines motrices de Lenoir et d'Ericsson*. Leipzig, 1861. — Lenoir. Moteur de gaz d'éclairage. *Cosmos*, t. XVI, p. 255, 618. — Tresca (*Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*, 1861, t. I, p. 840. — *Annales des mines*, 5e série, t. XIX, p. 453. — *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 3e série, t. II, p. 524). — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, p. 215. — Jacqmin. *Traité des machines à vapeur*, p. 85. — Cazin. *Cosmos*, t. XXII. p. 203. — Moigno. *Cosmos*, t. XVII, p. 610. — De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 233. — Sciama. *Moteurs industriels*, p. 216. — *Portefeuille économique des machines*, 1862, pl. 1, 2; 1864, pl. 46. — *Revue industrielle*, 1886, janvier-mars. — *Génie civil*, t. VIII, p. 331. — Claudel. *Formules, tables et renseignements usuels*, partie pratique, 1872, p. 891. — Von Schwarz. Ueber die Lenoir'sche Gasmaschine. *Würtemberg Gewerbebl*. 1860, nos 24, 49. — Schmidt. Theorie der Lenoir'schen Gasmaschinen. *Dingler's Journal*. t. CLX, p. 321.

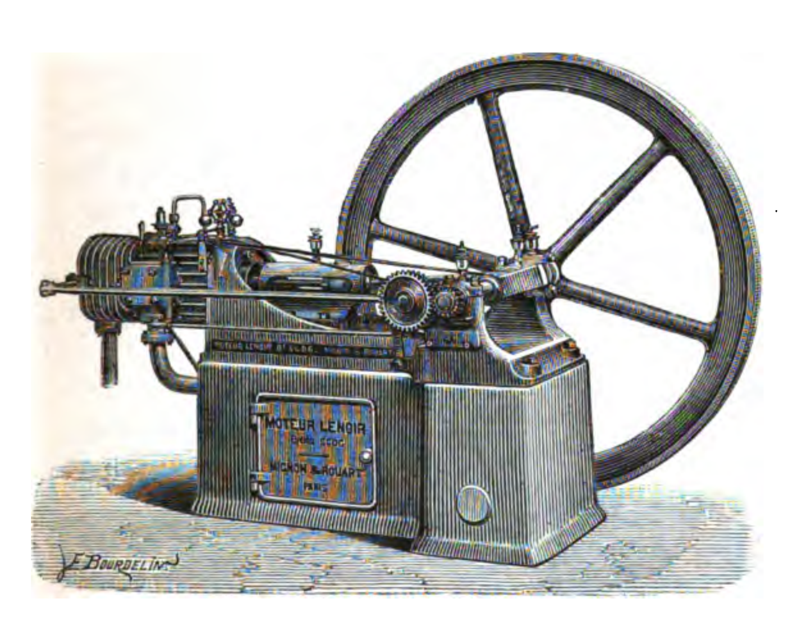


Fig. 276 *bis*

Nouveau Moteur à gaz Lenoir (vue perspecitve).

faible teneur en gaz. Des ailettes disposées sur la surface externe de ce réchauffeur évitent une trop grande accumulation de chaleur. L'emploi des ailettes suffit également, dans les petits mo-

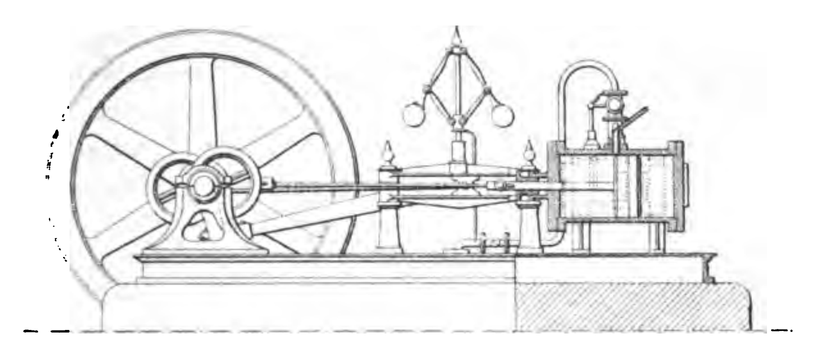


Fig. 275. — Moteur à gaz Lenoir (élévation).

teurs, pour rafraîchir la surface du cylindre. A partir de la force de quatre chevaux, il devient nécessaire d'établir une circulation d'eau, à l'aide d'un thermo-siphon. Le tiroir est remplacé par un

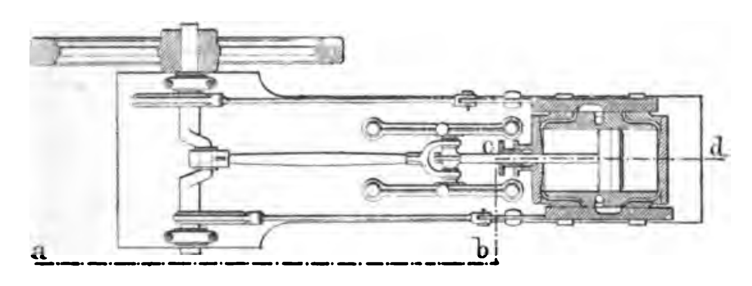


Fig. 276. — Moteur à gaz Lenoir (coupe horizontale).

jeu de soupapes. C'est dans la boîte d'admission que s'opère l'inflammation du mélange gazeux, au moyen d'une pile ou d'une petite dynamo.

Les moteurs Lenoir sont réglés pour une dépense de 700 litres de gaz par cheval-heure.

427 — *Machines diverses.* — Indépendamment des noms que nous avons déjà inscrits dans le cours de ces explications, on peut

encore citer [1] les machines à gaz de Achet [2], Allcock, Andrew, Atkinson [3], Barker, Barsanti-Matteucci, Beck [4], Beechey, Beissel, Bénier-Camart [5], Beresford-Bennett, Bernardi, Bickerton, Blass, Brayton, Brydges, Bull, Bullock, Butcher, Carus-Wilson, Chandor [6], Clayton, *Compagnie parisienne*, Daimler, Degrand, Delamarre-Boutteville-Malandrin [7], Deprez, Dongill, Drake-Marhead, *Economic motor*, Edison, Emmet, Fiddes, Fielding, Fogarty, Fontaine [8], Forest [9], Funck [10], Gardie [11], Gerome [12], Griffin [13], Grock, Haenlein [14], Haigh-Nuttel, Hale, Hargreaves, Holt-Crossley, Hutchinson, Johnson, Kabath, Kierzkowski, Kinder-Kinsey [15], King-Cliff, Kirchenpauer-Philippi, Kirk-Rider, Kœrting [16], Krauss, Laurent, Lefèvre-Rysmanns, Luiford-Cooke, Marchand, Martini, Maxim, Million, Mills-Haley, Nash, *National motor*, Niell, Northcott, Odling, Ord, Picking-Hopkins, Pinkney, Pursell, Quick, Ravel [17], Rhodes-Goodbrand-Holland, Richardson, Robson, Robinson, Rollason [18],

[1] La plupart de ces appareils se trouvent décrits dans le *Traité des moteurs à gaz* de M. G. Richard.

[2] Machine rotative. *L'éclairage au gaz*, 20 mai 1870.

[3] Moteurs à trois cylindres et autres (*Revue industrielle*, 9 juillet 1885, p. 275; 21 août 1885, p. 188. — *Engineering*, avril 1886, p. 204. — *The Engineer*, 18 décembre 1885, p. 188; 30 décembre 1887, p. 536).

[4] *Engineering*, 12 octobre 1888.

[5] De Graffigny. *Moteurs anciens et modernes*, p. 255.

[6] Jacobi et Zizine. Rapport sur la machine Chandor. *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. V, p. 313.

[7] Moteur simplex (*Génie civil*, t. VIII, p. 329. — *Annales industrielles*, 2e série, t. X, p. 523. — *Revue scientifique de la Société de Bruxelles*, 20 octobre 1886, p. 637. — *Engineering*, mars 1886, p. 300).

[8] *Portefeuille économique des machines*, 1873.

[9] *Annales industrielles*, 1883, t. II, p. 686.

[10] *Revue industrielle*, 1880, p. 55.

[11] *Portefeuille économique des machines*, 1880, p. 132. — *Annales industrielles*, 1883, t. I, p. 791.

[12] *Annales industrielles*, 1884, t. I, p. 471.

[13] *The Engineer*, 18 mai 1888, p. 403.

[14] *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, 15 février 1878. — *L'aéronaute*, novembre 1876, p. 290.

[15] *The mechanic Engineer*, nouvelle série, t. XIX, p. 277.

[16] *Portefeuille économique des machines*, novembre 1886. — *American machinist*, 18 février 1888.

[17] Moteur oscillant (*Revue industrielle*, 1881, p. 175. — Armengaud. *Conférence sur les moteurs à gaz à l'Exposition universelle de* 1878, p. 217).

[18] Machine à six périodes. *The Engineer*, 4 mai 1888, p. 368.

Sautenard [1], Schweizer [2], Shaw, Seraine, Serrell, Simon [3]. W. Siemens [4], Skène, Sombart, Steel-Whitehead, Summer, Thompson, Tonkin, Treeton, Turner, Warchalowski, Williams, Williamson, Withers, Witcker, Wittig-Hees, Woodhead, Wordsworth-Lindley, Worsam.

On retrouve dans ces appareils les divers dispositifs que nous analyserons plus tard avec détail à l'occasion des moteurs à vapeur, tels que : machines à un seul cylindre, à deux, à trois cylindres couplés; horizontales, verticales, ou oscillantes; machines à simple, double effet, à quart d'effet; machines compound; machines rotatives, etc.

§ 6

MACHINES A PÉTROLE ET A POUSSIÈRE DE CHARBON

428 — *Machines à pétrole.* — Le moteur à pétrole [5] consiste, en principe, en une machine à air chaud, dans laquelle chaque cylindrée est chauffée distinctement à l'aide de l'injection dans le cylindre d'un combustible liquide finement pulvérisé. On emploie à cet effet l'huile de pétrole. Un pulvérisateur lance sous pression, en la répartissant à l'état de pluie fine, la petite quantité de liquide nécessaire. Le récepteur est à quart d'effet.

On peut indiquer, comme formant une catégorie intermédiaire entre cette classe et celle des moteurs à gaz, les *machines à air carburé* [6]. Le gaz de l'éclairage ne se trouvant que dans les villes,

(1) *La Lumière électrique*, t. XXV, p. 547.

(2) Moteur revolver. Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 117.

(3) Hirsch. *Rapports du Jury international de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 310. — *The Engineer*, 17 janvier 1879, p. 113. — Armengaud. *Conférence sur les moteurs à gaz à l'Exposition de* 1878, p. 19.

(4) Machine à régénérateur. Richard. *Les moteurs à gaz*, p. 217.

(5) Petrolœum Motor. *Revue industrielle*, 25 février 1874, p. 36. — *Engineering*, 1873. — Propulsion des navires par l'action directe de l'explosion des vapeurs de pétrole. *Génie civil*, t. IX, p. 265.

(6) Ferd. Gauthier. De la carburation de l'air. *Bulletin de l'Association amicale des Elèves de l'École supérieure des mines*, 1888, p. 59.

l'application des moteurs à gaz ne saurait se répandre dans les villages ou au milieu des exploitations agricoles. Mais on peut, à

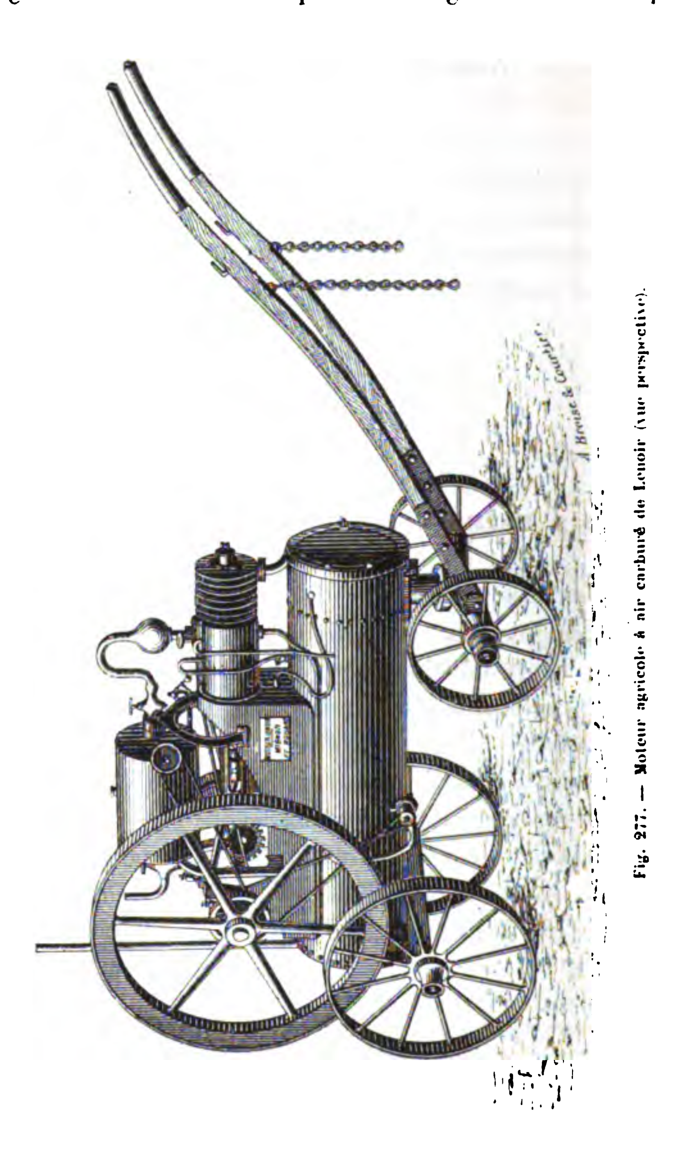


Fig. 277. — Moteur agricole à air carburé de Lenoir (vue perspective).

l'aide d'essences minérales volatiles, imprégner l'air d'hydrogènes carbonés plus ou moins complexes, de manière à réaliser des conditions toutes semblables à celles de l'emploi dynamique du gaz

d'éclairage (1). La figure 277 représente, à titre d'exemple, la machine à air carburé de M. Lenoir (2). C'est un moteur agricole, locomobile, de la force de quatre chevaux.

Les figures 279, 280, 281 se rapportent au moteur à pétrole proprement dit de Spiel (3). On y emploie l'esprit de pétrole, ou

(1) Le moteur Gardie fabrique lui-même son gaz à base d'oxyde de carbone, à l'aide d'un gazogène à récupération (*Portefeuille économique des machines*, 3e série, t. XII, p. 154). — La machine Otto à gaz carburé (fig. 278), le générateur Müller, imprègnent

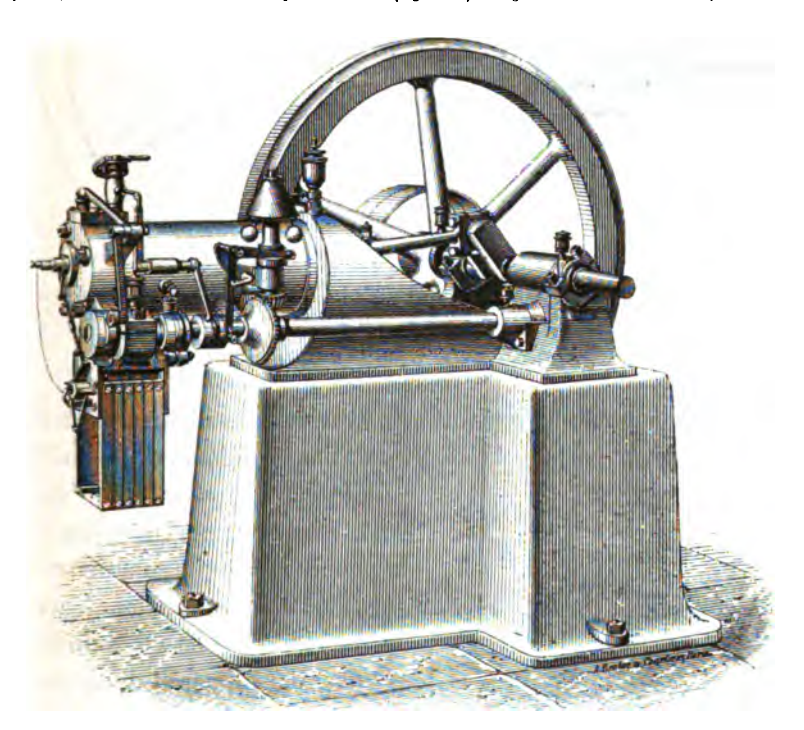


Fig. 278. — Moteur à pétrole Otto (vue perspective).

l'air d'hydrocarbures volatils (*Revue industrielle*, 12 juillet 1882). Il en est de même pour les appareils Boulton, Capitaine, Henderson, Humes, Kempster, Leigh, Redfern, Stuart, Weatherhogg, Williams, Wirth, Wright, etc.

(2) Alfred Tresca. *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, 4e série, t. I, p. 497. — *Bulletin de l'Association amicale des Élèves de l'École supérieure des mines*, 1886, p. 42.

(3) *Annales industrielles*, 14 février 1886, p. 19. — *Génie civil*, t. X, p. 48, 259. — *Revue industrielle*, 25 février 1874, 25 novembre 1886. — *Scientific American*, 3 avril 1886. — *American Machinist*, 15 janvier 1887. — *Engineering*, février 1886, p. 154.

benzoline, dont la densité est égale à 0,70. Ce liquide possède une température d'explosion peu élevée. Son emploi et son magasinage

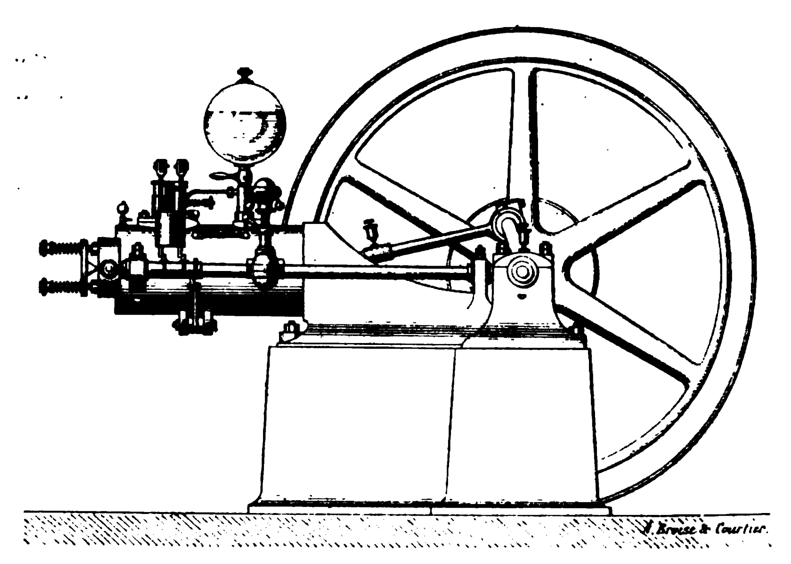


Fig. 279. — Moteur à pétrole Spiel (élévation).

exigent donc quelques précautions, et restent assujettis à certaines entraves de la part de la réglementation publique. La benzoline suffit pour le graissage de l'appareil. Elle est renfermée dans un réservoir sphérique supérieur, alimenté à l'aide d'une pompe à main. Un conduit la met en communication avec l'appareil d'injection; et un robinet, actionné par une came de distribution, ouvre ce tube en temps utile pour débiter la quantité voulue de combustible, que la pompe injectera dans le cylindre. L'air admis par une soupape de distribution chasse le pétrole devant lui, en le pulvérisant par la rencontre des jets liquides avec des plans inclinés. Il s'en imprègne ainsi d'une manière intime. Une gouttière circulaire

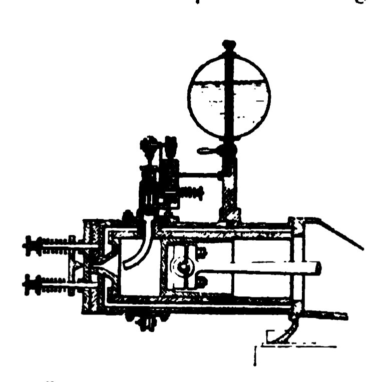


Fig. 280. — Moteur à pétrole Spiel. (Coupe verticale.)

pratiquée dans la conduite d'amenée sert à arrêter les parties liquides qui ne seraient pas suffisamment mélangées avec l'air. L'explosion est déterminée par la flamme qu'un tiroir va chercher au dehors, pour la porter à l'intérieur. L'échappement s'opère à

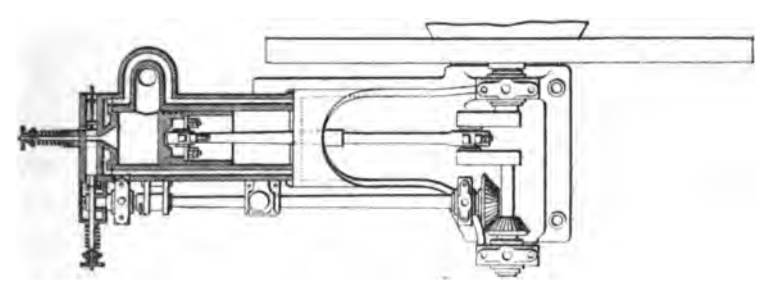


Fig. 281. — Moteur à pétrole Spiel (coupe horizontale).

l'aide d'une soupape. Les profils des cames de commande fonctionnent sous l'empire de ressorts énergiques. On annonce, pour cette machine, une consommation d'un litre de benzoline par cheval-heure.

On peut encore citer, dans cet ordre d'idées, les moteurs à pétrole (1) de Brayton (2), Dusaulx (3), Etève-Humes (4), Hock (5), Hureau de Villeneuve (6), Lambrigot, Pia (7), Priestmann (8), Rouart (9), Siegfried (10), Street.

(1) Il est très essentiel de ne pas confondre le *moteur à pétrole* (pour lequel ce produit n'est qu'un combustible admis directement dans le cylindre d'une machine à air chaud) avec la *machine à vapeur de pétrole* (où l'essence joue le même rôle que l'eau dans les machines à vapeur ordinaire, en se liquéfiant et se volatilisant alternativement). Nous étudierons plus loin (n° 522) le moteur Yarrow qui appartient à ce dernier type.

(2) E. Farcot. *L'Aéronaute*, août 1876, p. 209. — *La Nature*, 1880, p. 358. — *Engineering*, juillet 1878, p. 46. — *American Machinist*, 11 novembre 1888.

(3) Hirsch. *Rapports du jury international de l'Exposition universelle de* 1878. groupe VI, classe 54, p. 311.

(4) *Génie civil*, t. X, p. 200. — *Écho des mines et de la métallurgie*, 1886, p. 496. — *Moniteur industriel*, 1881, n° 41.

(5) André Duté Poitevin. *L'Aéronaute*, août 1877, p. 215; avril 1878, p. 112. — Musil. *Die Motoren für das Kleingewerbe*, p. 57. — Massenet. *El plata industrial*, 1878.

(6) Louis Figuier. *Année scientifique et industrielle*, 1872.

(7) Bernardi. *Notice sur la machine motrice à benzine Pia*. In-4°, 1888, Padoue.

(8) *Cosmos*, 9 juin 1888, p. 273. — *Engineering*, 1888, t. I, p. 479.

(9) Rouart. Machine à essence de pétrole appliquée à la navigation. *Publication industrielle d'Armengaud*, 1888.

(10) Siegfried Marcus. *Lumière électrique*, t. XXVII, p. 41.

429 — *Machines à poussière de charbon.* — Le moteur à poussière de charbon ([1]) consiste, en principe, en une machine à air chaud, dans laquelle chaque cylindrée se trouve chauffée distinctement à l'aide de l'injection dans le cylindre d'un combustible solide finement pulvérisé ([2]).

Les premiers essais tentés dans cette direction sont dus à Niepce, en 1806. Son *pyro-élophore* fonctionnait avec de la poudre de lycopode ([3]). Un moteur à poudre de charbon a travaillé industriellement à Laigle ([4]). Des expériences ont été faites sur ce sujet pour le compte du Gouvernement américain ([5]). Elles n'ont pas été très favorables. L'emploi de la houille grasse procurait à peu près l'égalité avec le mode ordinaire de chauffage. On perdait 8 % avec la houille sèche, et 40 % avec l'anthracite.

([1]) Renoir. *L'Aéronaute*. 5 juin 1875.

([2]) On connaît les dangers que présente, pour les mines sèches, l'explosion des poussières de houille (Haton de la Goupillière. *Cours d'exploitation des mines*, t. II, p. 565). Je rappellerai également les applications du combustible pulvérulent pour le puddlage dans les fours Crampton à Woolwich, et pour le chauffage dans les appareils américains de Whelpley et Stores.

([3]) Moteur Niepce à poudre de lycopode (Borgnis. *Traité complet de mécanique appliquée aux arts*, p. 197. — *Annales des mines*, 7e série, t. VII, p. 176).

([4]) Dumas. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXVII, p. 121.

([5]) *Journal of Franklin Institute*, 1871. — *Annual Report of the Chief of the United-States Bureau of Steam Engineers for* 1876. — *Engineering and mining Journal*, t. XXI, p. 15.

CHAPITRE XXVI

THÉORÈMES DE LA THERMODYNAMIQUE GÉNÉRALE

—

§ 1

RÉVERSIBILITÉ

430 — Ainsi que nous l'avons expliqué dès le début (nº 257), les considérations que nous avons parcourues jusqu'ici étaient, indépendamment de la grande importance qu'elles présentent en elles-mêmes, destinées à préparer la voie pour les recherches de la thermodynamique générale (¹), en exerçant d'abord l'esprit sur le

(¹) Sadi-Carnot. *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, 1824 (Voy. ci-dessus, p. 595, note 1). — Clapeyron. Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur (*Journal de l'École Polytechnique*, XIVᵉ cahier, 1834. — *Annales de Poggendorf*, t. LIX). — De Saint-Robert. *Principes de thermodynamique*, 1865. — Combes. *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*, 1867. — Briot. *Théorie mécanique de la chaleur*, 1869. — Verdet. *Théorie mécanique de la chaleur*, 1872. — Moutier (*La thermodynamique et ses applications*, 1885, in-8°. — *Éléments de thermodynamique*, 1872, in-12). — J. Bertrand. *Thermodynamique*, 1887. — Lippmann. *Cours de thermodynamique*, 1889. — Massieu. *Exposé des principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur*, in-4°, autographié, 1873. — Callon. *Cours de machines*, t. I. — Couche. *Voie, matériel roulant et exploitation technique des chemins de fer*, t. III, p. 715. — Pochet. *Nouvelle mécanique industrielle*, 1874. — Hirsch et Debize. *Leçons sur les machines à vapeur*, t. I, 1886. — Murgue. Essai d'une exposition rationnelle de la théorie mécanique de la chaleur. *Bulletin de la Société de l'industrie minérale de Saint-Étienne*, 3ᵉ série, t. I, p. 865. — Viry (*Leçons de thermodynamique pure*, 1885. — La thermodynamique résumée. *Annales de l'Académie de Mâcon*, 2ᵉ série, t. IV, 1882). — Courtin. *Éléments de la théorie mécanique de la chaleur*, Mons, 1882. — E. Jacquier. *Exposition élémentaire de la théorie mécanique de la chaleur appliquée aux machines*, in-8°, 1867. — Athanase Dupré (*Théorie mécanique de la chaleur*, in-8°. — Sept mémoires sur la théorie mécanique de la chaleur. *Annales de chimie et de physique*, 4ᵉ série, t. I, p. 168, 175; II, 185; III, 76; IV, 200, 426; V, 488; VII;

cas le plus simple de tous, celui des gaz parfaits, avant d'aborder

IX, 328; XI, 194; XIV, 64. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXI, p. 582; LXIII, 268, 952; LXIV, 593). — Cazin (La théorie mécanique de la chaleur. *Les Mondes*, t. XII, XIII. — Exposé de la théorie mécanique de la chaleur. *Mémoires de la Société des sciences naturelles de Seine-et-Oise*, 1863. — Mémoire sur le travail intérieur dans les gaz. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXVI, p. 483). — G. A. Hirn (*Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur*, 1865. — *Confirmation expérimentale de la seconde proposition de la théorie mécanique de la chaleur*. Paris, 1861). — Blondlot. *Introduction à l'étude de la thermodynamique*. 1888. — P. de Robert. *Principes de thermodynamique*, Turin. — Phillips. Notes sur divers points de la thermodynamique. *Annales de l'École normale supérieure*, t. II. 1873. — Ledieu. Démonstration directe des principes fondamentaux de la thermodynamique. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXVII. — Hirn et Seguin. Transformation du calorique en force mécanique. *Cosmos*, t. VI, p. 679; VII, 455). — Seguin (*Études sur l'influence des chemins de fer*, Paris, 1839. — *Origine et propagation de la force*, 1857). — Reech (Théorie générale des effets dynamiques de la chaleur. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1853, p. 357. — Note sur les effets dynamiques de la chaleur. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXIII, p. 602; XXXIV, 21).

Mayer (*Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme*, Heilbronn, 1851. — Sur la transformation du calorique en force vive. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1851, t. XXXII, p. 652. — Réclamation de priorité contre M. Joule relativement à la loi de l'équivalence du calorique. *Ibidem*, 1848, t. XXVII, p. 385). — Clausius (*Théorie mécanique de la chaleur*, 3e édition. Traduction de MM. Folie et Ronkar, 1887, Mons. — Ueber die bewegende Kraft der Wärme, etc. *Annales de chimie et de physique*, 3e série, 1852, t. XXXV, p. 482. *Annales de Poggendorf*, t. LXXIX, p. 368, 500. — Ueber den Einfluss des Druckes auf das Gefrieren der Flüssigkeiten. *Annales de chimie et de physique*, 3e série, 1882, t. XXXV, p. 504. *Annales de Poggendorf*, t. LXXXI, p. 168. — Ueber das Verhalten des Dampfes, etc. *Annales de chimie et de physique*, 3e série, 1853, t. XXXVII, p. 368. *Annales de Poggendorf*, t. LXXXII, p. 263. — Ueber den theoretischen Zusammenhang zweier empirisch auf gestellter Gesetze, etc. *Annales de Poggendorf*, t. LXXXII, p. 274. — Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschinen. *Annales de Poggendorf*, t. XCVII, p. 441, 513. — On the discovery of the true of Carnot's function. *Philosophical Magazine*, 4e série, t. XI, p. 388). — Zeuner (*Fondements de la théorie mécanique de la chaleur*. Traduction de MM. Arnthal et Cazin, 1869. — Beiträge zur Theorie der Dämpfe. *Annales de Poggendorf*, t. CX, p. 371). — Helmholtz (*Sur la conservation de la force*, 1847, Berlin; Traduction de Gérard. — Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte, Königsberg, 1854). — Neumann. *Leçons sur la théorie mécanique de la chaleur*, 1875, Leipzig, — Kirchhof. Une proposition de la théorie de la chaleur. *Annales de Poggendorf*, t. CIII, CIV. — Kuhlmann. *Handbuch der mechanischen Wärmetheorie*, 1886, Brunswick. — Holtzmann. Ueber die bewegende Kraft der Wärme. *Annales de Poggendorf*, t. LXXXII, 1851. — Heintz. Zur Theorie der Wärme. *Zeitschrift für naturwiss. zu Halle*, t. I, p. 417. — Wilhelmy. *Essai d'une théorie physicomathématique de la chaleur*, 1875, Leipzig.

Rumfort. An inquiry concerning the source of heat excited by friction. *Philosophical Transactions abridged*, 1798, t. XVIII. — Joule (On a new theory of heat. *Mémoires de la Société de Manchester*, 2e série, t. VII. — On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power. *Philosophical Magazine*, 3e série, t. XXVII, p. 205; XXVIII, 205. — On the changer of temperature produced by

la question dans toute son étendue pour un corps quelconque.

the rarefaction and condensation of air. *Ibidem*, 3ᵉ série, t. XXV, 1844; XXVI, 369). — Joule et Thomson. On the thermal effects of fluids in motion. *Philosophical Transactions*, 1853, p. 357. — W. Thomson (An account of Carnot's theory of the motrice power of heat, with numerical results deduced from Regnault's experiments on steam. *Annales de chimie et de physique*, 3ᵉ série, 1852, t. XXXV, p. 376. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XVI, p. 5, 541. — On the quantities of mechanical energy contained in a fluid in different states as to temperature and density, *ibidem*, t. XX, p. 475. — Note on the effect of fluid friction. *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. I, p. 474; II, 273. — On a universal tendency in nature to the dissipation of mechanical energy. *Ibidem*, 4ᵉ série, t. IV, p. 304). — Rankine (*Manuel de la machine à vapeur et des autres moteurs*. Traduction et notes de M. Gustave Richard, 1878. — Fundamental principles of the mechanical theory of heat. *Edinburgh Transactions*, 1853, t. XX, p. 565. — On the mechanical theory of heat. *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. II, p. 61. — On the general law of the transformation of energy, *ibidem*, 1853, 4ᵉ série, t. V, p. 106. — On the mechanical action of heat, especially in gases and vapours. *Edinburgh Transactions*, t. XX, p. 147. *Philosophical Magazine*, 1854, 4ᵉ série, t. VII, p. 1 et 111. — Note as to dynamical equivalent of temperature in liquid water and the specific heat of atmospheric air and steam. *Edinburgh Transactions*, t. XX, p. 291). — Grove. Corrélation des forces physiques. *Institution de Londres*, 1843. Traduction de Longet, 1848. — Reynolds. The general theory of thermodynamics. *Institution of civil Engineers*, 15 novembre 1883. — Hopkins. Dynamical theory of heat. *Rep. of Brit. Association*, 1853, p. XLV. — Shann. *Treatise on heat*, 1877, Londres. — Reeder. *Caloric, a Review of the dynamic theory of heat*, 1887. — Barnard. Mechanical action of heat. *Silliman's Journal*, 2ᵉ série, t. XVIII, p. 300. — Smyth. On the mechanical action of heat, especially in gases and vapours. *Edinburgh Transactions*, 1851, t. XX, p. 147. — Gill. Sur la théorie dynamique de la chaleur. *Philosophical Magazine*, t, XXXV, p. 439; t. XXXVI, p. 1. — Gibbs. A method of geometrical representation of the thermodynamics properties. *Transactions of the Connecticut Academy*, t. II, part. II, p. 382. — Freeman. Six relations thermodynamiques. *The Messenger of mathematics*, t. II, p. 131.

Turazza. Teoria dinamica del calorico. *Cimento*, t. XI, XII. — Zannotti. Leçons sur la thermodynamique. *Giornale di matematiche* de Battaglini, t. VII. — Sacchetti. Considérations sur l'origine de la thermodynamique. *Memoriæ dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna*, t. VII. — Colding. Recherches sur les rapports des forces de la nature. *Vidensk, Selsk, Skrift, Kjöbenhavn*, t. II, p. 121, 167. — *An examination of steam engines and the power of steam*, 1851, Copenhagen. — Dahlander. Théorèmes généraux concernant la signification géométrique des équations de la thermodynamique. *Ofeversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar*, t. XXXI. — Szily Kalman. Sur la forme générale des équations de la thermodynamique. *Mémoires publiés par l'Académie hongroise*, t. I, 1867. — Subic. Théorie mécanique de la chaleur. *Actes de l'Académie Iougoslave des sciences et des arts*, Agram, t. XIX, p. 12.

Tait. *Essai historique de la théorie dynamique de la chaleur*. Traduction de Moigno et Cyre, 1870. — Joule. Note on the history of the dynamical theory of heat. *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série. t. XXIV, p. 173. — Radwell. On the history of the dynamic theory of heat. *Ibidem*. 4ᵉ série, t. XXIV, p. 327. — Colding. On the history of the principle of the conservation of energy. *Annales de chimie et de physique*, 4ᵉ série, t. I, p. 466. — Bertin. *Rapport sur les progrès de la thermodynamique en France*, 1867. — Gilbert. Compte rendu des traités de Clausius, Zeuner, Moutier, Bertrand. *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 20 janvier 1888, p. 225.

Le principal obstacle qui se présentait dès le début consistait, comme nous l'avons vu, à séparer, dans l'énergie interne U, les deux parties distinctes qui portent les noms de chaleur sensible et de travail interne. Cette difficulté est telle, en effet, que l'on ne saurait encore la résoudre d'une manière générale, et que, jusqu'à nouvel ordre, cette fonction U doit continuer à représenter en bloc l'ensemble de ces deux quantités. On comprend dès lors quel intérêt s'attachait au cas dans lequel, en raison de l'extrême atténuation des actions mutuelles des éléments moléculaires, le travail interne tend à disparaître complètement. Ce cas-limite, qui est celui des gaz parfaits, comporte d'après cela un degré de simplicité qui lui appartient exclusivement. Il fournit tout à la fois un premier cheminement à travers ces considérations difficiles, en même temps que certains résultats spéciaux qui nous seront indispensables pour y asseoir les considérations générales.

C'est ainsi par exemple que, lorsque nous viendrons à reconnaître que quelque fonction, ou quelque valeur numérique, restent nécessairement les mêmes pour l'universalité des corps de la nature, il deviendra suffisant, pour achever leur détermination complète, de les connaître en particulier pour l'un d'eux. Les investigations directes déjà effectuées sur les gaz parfaits acquerront par là une valeur générale [1].

431 — Il nous est nécessaire de commencer par fixer d'une manière précise une notion fondamentale : celle de la *réversibilité* des transformations.

Imaginons qu'une évolution arbitraire subie par un corps quelconque à partir d'un état initial (p_1, v_1, t_1) jusqu'à un état final

— de Volson Wood. Rankine's thermodynamics. *Van Nostrand's engineering Magazine*, mai 1886. — Violle. Bibliographie des publications relatives à la chaleur, de 1738 à 1870. *Œuvres de Verdet*, t. VIII, p. 267 à 358. — Mohr. Sur l'histoire de la théorie mécanique de la chaleur. *Journal de mathématiques et de physique de Schlömilch*, t. XVI, XVIII. — Cherbuliez. Communication concernant l'histoire de la théorie mécanique de la chaleur. *Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern*, 1871, p. 291.

Il y a lieu, pour compléter cette liste bibliographique de la rapprocher de celles qui ont été données ci-dessus, en ce qui concerne particulièrement l'équivalent mécanique de la chaleur (p. 404, note 1), et la théorie cinétique (p. 388, note).

[1]) Voy. par exemple n° 436.

(p_2, v_2, t_2) soit représentée par une sorte de tableau numérique, sur lequel se trouvent enregistrés les divers états intermédiaires (p, v, t) qui se sont succédé dans l'intervalle. Rien n'empêche évidemment de reprendre la lecture de cette liste dans un ordre précisément contraire, en revenant de l'état (p_2, v_2, t_2) vers l'état (p_1, v_1, t_1). On pourra donc toujours *concevoir* une semblable évolution, conjuguée de la manière, et que l'on appellera *inverse* ou *intervertie*. Mais autre chose sera de la *réaliser* effectivement; et si toute évolution reste réversible par la pensée, il n'en est pas toujours ainsi dans le domaine des faits. Les unes le sont en réalité, et on les appelle essentiellement *réversibles*. Les autres ne sauraient être interverties, et on les dit *irréversibles* (1).

Pour qu'une évolution soit effectivement réversible, deux conditions sont nécessaires et suffisantes, en ce qui concerne directement les variables fondamentales (2). L'une d'elles se rapporte à la pression; la seconde, à la température (3). Toutes les deux sont susceptibles d'un même énoncé, qui consiste en ce que *la température, ainsi que la pression, doivent rester constamment égales, d'une part pour le corps qui subit la transformation en question, et de*

(1) Nous n'envisageons ici cette distinction que dans l'ordre de la mécanique; mais elle existe de même dans le domaine des faits chimiques. Par exemple, si l'on dissocie en vase clos un excès de carbonate de chaux, de manière à le séparer en acide carbonique et en chaux caustique, la combinaison se rétablit d'elle-même par le refroidissement. Si, au contraire, on chasse de la houille par la distillation ses produits volatils, le coke et le gaz ne se réunissent plus de nouveau en se refroidissant. Le premier phénomène est réversible, le second est irréversible, du moins par voie directe et immédiate, seule signification qu'il faille du reste attribuer à ce terme, car il n'y a pas de raisons pour se refuser à croire, avec Sainte-Claire Deville (Lechatelier. *Annales des mines*, 8e série, t. XIII, p. 160, 176) que la possibilité du renversement des résultats, d'après quelque voie appropriée, n'appartienne pas à la généralité des phénomènes.

(2) On conçoit du reste qu'il puisse en exister également dans le mécanisme même, encore si peu connu, des actions moléculaires mises en jeu. C'est ainsi par exemple que le dégagement de chaleur dû au frottement ne constitue pas un phénomène réversible. Mais la thermodynamique ne peut encore considérer les phénomènes qu'à un point de vue trop simplifié pour que, en dehors de cas tout spéciaux (n° 535), nous soyons en état de tenir compte ici des effets dus au frottement.

(3) Aucune condition semblable ne saurait évidemment concerner *a priori* notre troisième variable, c'est-à-dire le volume spécifique, ou la densité. N'oublions pas d'ailleurs, que, lorsque p et t sont fixés pour la substance considérée, tout comme pour le milieu extérieur, v se déduit incessamment, pour chacun de ces deux corps, de l'équation-typique qui lui est propre.

l'autre pour ceux qui se trouvent en rapport avec lui aux points de vue mécanique et thermique. Développons cette double proposition.

432 — Si la pression p du corps considéré, que nous avons appelée sa tension intérieure ou sa force expansive, reste constamment égale à celle P du milieu environnant, pendant toute la variation que subissent ces deux quantités, on peut par la pensée ajouter à p un accroissement infiniment petit dp, car ce dernier sera, au point de vue de la méthode infinitésimale, négligeable vis-à-vis des éléments finis de la question. Le corps sera mis ainsi en mesure de surmonter l'obstacle que l'atmosphère ambiante [1] oppose à son expansion ; et cette dilatation s'accomplira en constituant une première évolution.

En même temps, l'on pourrait tout aussi bien attribuer par la pensée au milieu extérieur un supplément de tension dP, lequel, non seulement s'opposera à l'augmentation de volume du corps proposé, mais aura pour effet de le refouler sur lui-même, en réalisant une compression inverse du phénomène précédent. Celui-ci sera ainsi physiquement réversible; et, par conséquent, la condition énoncée est suffisante en ce qui concerne les pressions.

Pour montrer qu'elle est en même temps nécessaire, faisons voir que s'il existe, à un instant quelconque, une différence finie entre p et P [2], ces deux opérations ne sauraient être l'une et l'autre réalisables. On comprend fort bien en effet, que si par exemple le corps proposé possède la plus grande des deux tensions, le piston qui se trouve pressé par lui sera précipité dans le sens de la dilatation, en surmontant pour cela l'effort moindre qu'il subit sur la face opposée. Mais s'il s'agit réciproquement de le ramener en sens inverse, on ne verra jamais cet organe obéir à la moindre des deux tensions, en refoulant sur elle-même une substance qui possède déjà, pour son propre compte, une force élastique supérieure. Il faudrait de toute nécessité, pour exécuter un tel mouvement, commencer par dépouiller le corps de son excédent de pression.

[1] Ou des obstacles solides, comme un piston dans un cylindre.

[2] L'expérience de Joule (nº 257) en est un exemple remarquable.

ou en restituer un équivalent au milieu antagoniste. Mais, par là, l'on modifierait les conditions antérieures, et le nouveau phénomène ne constituerait en aucune façon la reproduction identique du précédent, sauf le sens. Concluons dès lors que le phénomène proposé n'est pas alors réversible, et que, par conséquent, la condition proposée est nécessaire.

Il importe de remarquer en passant le rapport étroit qui existe entre la condition que nous venons d'établir pour la réversibilité, et la distinction qui a été présentée ci-dessus (n° 255) entre le travail complet et le travail incomplet. Nous avons vu alors que s'il y a constamment égalité entre les pressions intérieure et extérieure, le corps dépense alors le maximum de travail externe pendant la dilatation; ou bien, inversement, qu'on se voit obligé de fournir le maximum de travail pour le comprimer. Au contraire, si ce corps possède un excédent fini de force élastique sur le milieu environnant, il arrive à refouler ce dernier avec une moindre dépense de travail; et de même, en ce qui concerne la compression. Nous pourrons donc conclure que *les évolutions réversibles sont celles qui correspondent au plus grand développement de travail externe, c'est-à-dire au travail complet; tandis que les phénomènes non réversibles sont accompagnés d'un travail externe incomplet.*

433 — Envisageons de la même manière la condition relative à la température.

Nous imaginerons en premier lieu qu'un changement d'état s'opère dans de telles conditions que la température t du corps considéré, et celle T des substances avec lesquelles il se trouve en rapport thermique, ne cessent pas de rester égales pendant toute leur variation mutuelle. Nous pouvons encore attribuer par la pensée, à la température du corps qui subit l'évolution, un supplément infiniment petit dt, qui le mettra en état de fournir de la chaleur aux objets environnants [1]. Dans ces conditions, il s'opérera une

[1] Dans la réalité, deux corps qui se trouvent mis directement et sans intermédiaire en relation thermique l'un avec l'autre, se fournissent réciproquement de la chaleur par voie de rayonnement ou de conductibilité. Mais on peut, dans ce cas, se borner à tenir compte seulement de la résultante effective de cet échange. On dit alors que le

transformation dans laquelle le corps se dépouillera de son calorique au profit de l'enceinte. On peut également attribuer un supplément dT à la température de cette dernière, pour la mettre au contraire en mesure de céder de la chaleur au corps proposé, de manière à réaliser l'évolution inverse. La condition est donc suffisante.

Si l'on veut maintenant supposer qu'il existe à certains instants un écart fini entre les températures des deux corps qui agissent et réagissent l'un sur l'autre au point de vue calorifique, rien ne s'oppose assurément à la réalisation de celui des deux phénomènes dans lequel le corps qui possède la température la plus élevée se trouve appelé à céder directement de la chaleur à l'autre. Mais si l'on entreprend ensuite d'effectuer l'évolution inverse, il restera impossible au corps le plus froid de transmettre directement de la chaleur à l'autre, ce qui serait contradictoire avec la notion même de température (¹). Il faudrait, pour y parvenir, commencer par combler la différence en abaissant l'état thermométrique de ce dernier, ou en élevant l'autre. Mais alors la nouvelle expérience n'aurait plus rien de commun avec les données de la précédente, et n'en représenterait plus l'inversion. La condition est donc également nécessaire.

Dans les chapitres qui précèdent, nous avons supposé tacitement qu'il s'agissait de transformations réversibles, car nous avons toujours, sauf dans les cas où le contraire était directement spécifié, admis la valeur pdv pour le travail externe effectivement dépensé par le gaz. La même hypothèse restera encore sous-entendue à l'avenir, toutes les fois que le contraire ne sera pas spécialement énoncé.

corps qui a cédé en définitive de la chaleur à l'autre possède une température supérieure à celle de ce dernier. La classification des températures dans un ordre croissant résulte immédiatement de cette considération, et ne souffre aucune difficulté. Quant à leur appréciation numérique précise, elle constitue une question plus délicate, mais qui ne se trouve pas en cause en ce moment.

(¹) Voy. page 701, note 1.

§ 2

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

484 — *Théorème de Mayer.* — *Par quelque mécanisme expérimental que l'on applique dans un cycle réversible la disparition de la chaleur à produire du travail mécanique, le rapport du travail créé à la chaleur dépensée reste invariable.*

Admettons qu'à l'aide d'un cycle fermé, que je désignerai par le symbole C, un corps véhicule de chaleur V ait produit un travail T, en dépensant une quantité de chaleur Q. En même temps, dans un cycle C′, un véhicule V′ sert à développer un travail T′, au prix d'une dépense de chaleur Q′. Nous pouvons toujours admettre que le rapport de ces deux quantités soit représenté par le quotient de deux nombres entiers n et n' suffisamment grands (1), en posant :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{n}{n'}.$$

Constituons par la pensée une opération complexe dans laquelle on ferait travailler n' fois le véhicule V dans son cycle C, et n fois le véhicule V′ suivant le cycle C′ *interverti,* que je désignerai par le symbole C'_1. Nous pouvons alors raisonner de la manière suivante.

Un cycle C exigeant la quantité de chaleur Q, les n' cycles C emploieront $n'Q$. Un cycle C′, si on le réalisait, consommerait la quantité Q′. Le cycle C'_1, qui en est l'inverse, aura donc pour résultat de produire Q′; ce qu'on peut exprimer d'une manière équivalente au point de vue du langage algébrique, en disant qu'il consomme la quantité $-Q'$. Dès lors les n cycles C'_1 consommeront $-nQ'$; et l'ensemble de toute l'opé-

(1) Le cas des rapports incommensurables se rattacherait à ce dernier (si l'on jugeait nécessaire ce complément de démonstration), à l'aide du procédé de généralisation qui est classique dans l'enseignement de la géométrie élémentaire.

ration complexe aura exigé en définitive la quantité de chaleur :

$$n'Q - nQ'.$$

Or cette expression est nulle en raison de l'équation précédente. Nous sommes forcés d'après cela d'accorder qu'aucun travail n'a pu être produit [1]; assertion qui n'implique ici aucun cercle vicieux, car elle continue à laisser indécise la question de savoir si la valeur du rapport qui nous occupe est constante ou variable. Évaluons donc l'expression du travail effectué.

Un cycle C produit T kilogrammètres. Les n' cycles C développeront par conséquent le travail $n'T$. Un cycle C' produirait T'. Le cycle interverti C'_1 consommera donc le travail T', ou, en d'autres termes, produira — T'. Dès lors n cycles C'_1 développeront $-nT'$, et le total de la production de travail aura pour expression :

$$n'T - nT'.$$

Si, d'après ce qui précède, nous l'égalons à zéro, cette relation nous donnera :

$$\frac{T}{T'} = \frac{n}{n'},$$

d'où :

$$\frac{T}{T'} = \frac{Q}{Q'},$$

c'est-à-dire (en rapportant numériquement par la pensée chacune de ces quantités à son unité propre : kilogrammètre ou calorie) :

$$\frac{T}{Q} = \frac{T'}{Q'} = \text{const.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Une seule expérience suffit, d'après cela, théoriquement pour

(1) *Nihil ex nihilo fit.*

assigner la valeur de cette constante E. Il suffit donc de se reporter à celle qui a été développée ci-dessus (n° 263).

435 — *Postulatum de Clausius.* — Au moment où la démonstration précédente nous permet de faire disparaître de la théorie des machines, pour l'y faire passer au rang des théorèmes, le postulatum qui nous a servi de point de départ, et que nous étions obligés de fonder provisoirement sur le sentiment qui se dégage avec une grande force de l'accord constant entre de très nombreuses expériences, nous nous trouvons précisément obligés d'en introduire immédiatement un nouveau, en énonçant ici une proposition qui ne comporte, dans l'état actuel de la science, aucune démonstration directe, et qui résulte uniquement, d'une manière intuitive, de la généralité des faits observés. Elle consiste dans l'énoncé suivant :

Quels que soient les opérations accomplies et les corps mis en présence, si aucun travail n'a été dépensé, il est impossible d'obtenir pour résultat final un transport de chaleur d'un corps plus froid sur un corps plus chaud que lui, les autres corps du système ayant repris chacun leur température, leur volume et leur pression (¹).

(¹) Dans l'échange direct et sans intermédiaire, un tel transport de chaleur ne saurait en aucune façon se produire, d'après la notion même de température (n° 433, note 1). Il devient au contraire réalisable avec le concours de corps auxiliaires, mais sous la réserve qui vient d'être formulée.

Le texte primitif du postulatum de Clausius consistait en ce que « la chaleur ne peut passer d'elle-même d'un corps plus froid sur un corps plus chaud sans une dépense de travail ». Il a soulevé certaines critiques. M. Hirn (*Exposition de la Théorie mécanique de la chaleur*, p. 507) a imaginé certains dispositifs d'expérience qui tendraient à le mettre en défaut. Rankine, de son côté (*Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. IV, p. 358), le bat en brèche d'après certaines vues d'un caractère un peu hypothétique. M. Tait a présenté lui-même des objections empruntées aux phénomènes thermo-électriques (*Annales de Poggendorf*, t. CXLV, p. 496. *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. XLIII. — Clausius. *Théorie mécanique de la chaleur*. Traduction de MM. Folie et Ronkar, p. 476. — Kohlrausch. *Göttinge Nachrichten*, février 1874). Verdet s'est attaché à serrer de près ces objections (*Œuvres de Verdet*, t. VII, p. 155). Il a cru réussir à mettre le postulatum à l'abri de toute difficulté en le formulant de la manière suivante : « Dans une série circulaire de transformations où l'état final du corps est identique à l'état initial, il est impossible que la chaleur passe d'un corps plus froid dans un corps plus chaud, à moins qu'il ne se produise en même temps quelque autre phénomène accessoire. » On ne peut s'empêcher de trouver un tel énoncé un peu vague pour servir de base fondamentale à une science nouvelle. M. Clausius, revenant lui-même sur les critiques dont sa propo-

On ne peut qu'accepter cette proposition à titre provisoire, comme conforme à un sentiment juste, en suspendant la certitude définitive jusqu'au moment où le corps de doctrine qu'elle aura servi à édifier nous mettra en état d'obtenir des relations assez précises pour permettre une vérification expérimentale directe. Nous pouvons seulement ajouter que, sous le bénéfice de certaines réserves que la prudence scientifique a inspirées à juste titre à d'éminents auteurs (¹), l'accord des résultats de cette théorie avec l'observation est, dès à présent, assez frappant pour donner une très grande valeur doctrinale à ces considérations.

Je ferai d'ailleurs remarquer qu'une telle marche est loin d'être inusitée, et qu'on l'emploie pour l'enseignement de la mécanique générale, dont les postulatum ne comportent en eux-mêmes ni l'évidence immédiate, ni aucune démonstration directe. Ils n'acquièrent eux-mêmes leurs droits à la certitude que par l'accord ultérieur des théories auxquelles ils donnent naissance avec l'observation. Il faut toutefois reconnaître que cet accord s'établit alors avec une universalité et un degré de délicate précision, singulièrement plus nets et plus décisifs que ne saurait le comporter le nouveau postulatum de la thermodynamique.

En l'absence de démonstration proprement dite, il ne sera sans doute pas inutile de présenter à l'esprit une simple analogie, destinée à faire mieux saisir la véritable portée de cette proposition. Je la puiserai dans le domaine des phénomènes hydrauliques. Nous voyons toujours, lorsqu'elle est abandonnée à elle-même, l'eau descendre du niveau supérieur au niveau inférieur, sans que jamais la marche inverse vienne à se produire spontanément (²). Si le

sition avait été l'objet (*Théorie mécanique de la chaleur*, 2ᵉ édit., traduction de MM. Folie et Ronkar, 1888, p. 101), l'a transformée de la manière suivante : « Une transmission de chaleur d'un corps plus froid à un corps plus chaud ne peut avoir lieu sans compensation ». Cette addition, qui n'est pas beaucoup plus claire que celle de Verdet, est du moins accompagnée par l'auteur de commentaires destinés à la préciser. M. J. Bertrand, qui s'est attaché avec un soin particulier à élucider les points obscurs de cette doctrine (*Thermodynamique*, p. 53), aboutit à donner du postulatum de Clausius la formule que nous avons énoncée plus haut.

(¹) Bertrand (*Thermodynamique*).

(²) C'est d'ailleurs le phénomène lui-même de la chute spontanée des corps pesants qui détermine la valeur des expressions *haut* et *bas*, de même que nous l'avons vu (nº 433, note 1) en ce qui concerne l'ordre des températures.

liquide arrive à effectuer son changement de niveau par l'intermédiaire d'un mécanisme, le plus naturel sera encore de le voir descendre. Dans ce cas, on recueillera une certaine quantité de travail à l'aide de cet appareil, qui prendra le nom de *récepteur hydraulique*. Il n'est cependant nullement impossible de voir l'eau remonter du niveau inférieur au niveau supérieur; et le mécanisme, dans ces conditions, est appelé *machine élévatoire*. Mais alors, une dépense spéciale de travail est pour cela absolument indispensable, et doit être fournie par un moteur étranger, qui sera le plus ordinairement une machine à vapeur.

436 — *Théorème de Carnot.* — Le théorème de Carnot est le plus important de toute la thermodynamique. Nous l'énoncerons de la manière suivante :

Dans toute évolution réversible, pendant laquelle le corps-véhicule de chaleur n'emprunte de calorique qu'à une source de température fixe, et n'en cède qu'à une autre de température également fixe, le rapport des quantités de chaleur ainsi empruntée et cédée reste indépendant de la nature du véhicule, ainsi que de toutes les circonstances de l'opération (1) *autres que les températures des deux sources. Il est égal au quotient de ces températures* ABSOLUES.

On pourrait formuler la première partie de l'énoncé d'une manière plus condensée, quoique moins explicite, en disant simplement que *le corps suit son propre cycle de Carnot*. En effet, si le véhicule de chaleur n'emprunte de calorique ou n'en cède qu'à des corps de température fixes, ces deux phases de son évolution seront figurées sur le diagramme représentatif par des isothermes (2).

(1) Cette indépendance de l'utilisation théorique de la chaleur avec la nature du corps mis en jeu et avec les moyens employés à cet effet, constitue l'un des résultats à la fois les plus importants et les plus inattendus qu'ait fournis la thermodynamique. Combes l'a comparée, à très juste titre, à l'indépendance qui existe entre l'utilisation du travail de la gravité et la nature du corps pesant employé pour le recueillir, ainsi qu'avec la forme de la trajectoire suivant laquelle on dirige sa descente.

(2) Bien entendu ces courbes ne seront plus, lorsqu'il s'agit d'un corps quelconque, des hyperboles équilatères, comme cela avait lieu pour les gaz parfaits. Elles varieront d'une substance à l'autre. Pour les connaître dans chaque cas, il suffirait de résoudre par rapport à la température l'équation-typique du corps proposé. Si l'on considère alors

Comme, du reste, ces courbes, qui correspondent à des températures distinctes, ne sauraient offrir aucun point commun, on se trouve obligé d'adjoindre à ces deux phases deux autres périodes pour relier ensemble les lignes en question ; et comme en même temps tout échange de chaleur reste interdit par l'énoncé en dehors des deux intervalles précédents, ces derniers profils ne peuvent être que des adiabatiques (¹). L'ensemble constitue par conséquent (nº 377) le cycle de Carnot du corps proposé.

Supposons donc que, dans un cycle de Carnot, que nous désignerons par le symbole C, un corps véhicule de chaleur V emprunte une quantité de chaleur Q_1 à une *source chaude* (²), de température absolue t_1, et en cède la quantité Q_2 à une source froide (³), de température t_2. Nous indiquerons à l'aide d'un accent les éléments correspondants C', V', Q'_1, Q'_2 d'une expérience analogue, pour laquelle les températures t_1 et t_2 conserveront les mêmes valeurs. Il s'agit de faire voir que l'on a, dans ces conditions :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2}.$$

C'est ce que nous entreprendrons de démontrer *par l'absurde*, en commençant par supposer au contraire que les deux rapports soient inégaux (⁴) :

$$\frac{Q_1}{Q_2} > \frac{Q'_1}{Q'_2},$$

et déduisant de ce point de départ gratuit, à l'aide de raisonnements

cette dernière comme un paramètre constant, bien qu'arbitraire, la relation ainsi obtenue entre v et p fournira l'équation de la famille des courbes isothermes.

Nous verrons, par exemple, que, pour les vapeurs saturées, l'isotherme est une droite horizontale.

(¹) Lesquelles n'auront elles-mêmes rien de commun en général avec les courbes représentées par l'équation (50), qui restent exclusives de l'emploi des gaz parfaits.

On obtiendra leur équation différentielle en égalant à zéro l'expression de dQ, lorsqu'elle aura été établie pour le corps considéré. Nous verrons plus loin (nº 442) quel sera dans tous les cas le facteur d'intégrabilité de cette équation.

(²) Source chaude, générateur, calorifère.

(³) Source froide, réfrigérant, frigorifère.

(⁴) Nous restons évidemment maîtres de désigner au moyen d'un accent le plus petit des deux rapports, pour fixer les idées, sans qu'il y ait lieu à cet égard d'envisager successivement deux cas distincts.

rigoureux, quelque conséquence inadmissible par elle-même. Il demeurera dès lors établi que l'hypothèse opposée reste seule possible.

On déduit en effet de cette inégalité, en multipliant ses deux membres par $Q_2Q'_2$, ce qui est permis, puisqu'il ne s'agit que de valeurs absolues :

$$Q_1Q'_2 > Q'_1Q_2,$$

ou, en retranchant chacun des deux membres d'une même quantité $Q_1Q'_1$, et renversant pour cela le sens de l'inégalité :

$$Q_1Q'_1 - Q_1Q'_2 < Q_1Q'_1 - Q'_1Q_2,$$
$$Q_1(Q'_1 - Q'_2) < Q'_1(Q_1 - Q_2).$$

Comme le véhicule V′ doit, dans la machine où il se trouve engagé, produire un certain travail au prix d'une dépense correspondante de chaleur, il faudra pour cela qu'il emprunte à la source chaude une quantité Q'_1 supérieure à celle Q'_2 qu'il cède à la source froide. On peut donc diviser les deux membres de l'inégalité par la quantité positive $Q'_1 - Q'_2$, en même temps que par Q'_1, et écrire :

$$\frac{Q_1}{Q'_1} < \frac{Q_1 - Q_2}{Q'_1 - Q'_2}.$$

Représentons ce dernier rapport par celui de deux nombres entiers convenablement choisis n et n' [1] :

$$(59) \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{Q'_1 - Q'_2} = \frac{n}{n'}.$$

Il viendra par là :

$$\frac{Q_1}{Q'_1} < \frac{n}{n'},$$

c'est-à-dire :

$$n'Q_1 - nQ'_1 < 0.$$

[1] Voy. ci-dessus, n° 434, note 1.

J'imagine actuellement une évolution complexe constituée de n' cycles directs de Carnot C, et de n cycles C' intervertis que je désignerai par C'_1. Un cycle C emprunte à la source chaude la quantité de chaleur Q_1, et porte Q_2 au réfrigérant. D'après cela, n' cycles C prendront au calorifère $n'Q_1$, et abandonneront $n'Q_2$ à la source froide. D'autre part, un cycle direct C' prendrait au générateur Q'_1, en portant Q'_2 au réfrigérant. Un cycle interverti C'_1 prendra donc, au contraire, Q'_2 à la source froide, en cédant Q'_1 à la chaudière. On peut dire également, en empruntant le langage algébrique, qu'il enlève à cette dernière la quantité négative $-Q'_1$, en portant $-Q'_2$ à la source froide. Les n cycles C'_1 puiseront donc à la source chaude $-nQ'_1$, en transmettant $-nQ'_2$ au réfrigérant.

On voit en résumé que l'ensemble de l'évolution complexe auxiliaire prend à la source chaude :

$$n'Q_1 - nQ'_1,$$

et porte à la source froide :

$$n'Q_2 - nQ'_2.$$

Or la précédente inégalité montre que la source chaude a ainsi abandonné une quantité négative, ou, en d'autres termes, qu'elle a reçu effectivement de la chaleur. Dans ces conditions, le postulatum de Clausius, qui a provisoirement pris place dans la théorie avec la même autorité que les propositions démontrées (n° 455), nous conduit à affirmer qu'il a dû y avoir dépense d'une certaine quantité de travail. Évaluons donc le travail mis en jeu.

Nous avons vu que la source froide a gagné la quantité de chaleur $n'Q_2 - nQ'_2$, ou, en d'autres termes, qu'elle a perdu $nQ'_2 - n'Q_2$. En ajoutant ce terme positif à la perte algébrique qu'a subie de son côté la source chaude, on aura, pour l'ensemble de la disparition de chaleur :

$$(n'Q_1 - nQ'_1) + (nQ'_2 - n'Q_2),$$

c'est-à-dire :

$$n' (Q_1 - Q_2) - n (Q'_1 - Q'_2).$$

Mais cette quantité est identiquement nulle d'après la relation (59). Il en est donc de même du travail correspondant; conclusion qui se trouve en opposition directe avec la conséquence que nous venons de déduire du postulatum. Telle est la contradiction annoncée, qui nous autorise à affirmer la première partie du théorème, à savoir que le rapport des deux quantités de chaleur empruntée et cédée reste immuable pour les cycles de Carnot de tous les corps possibles entre deux températures déterminées.

Il ne reste plus dès lors qu'à découvrir, d'après un seul cas arbitrairement choisi, la valeur permanente de ce rapport. Or cette recherche a précisément été effectuée pour les gaz parfaits (éq. 52). Nous avons reconnu que le rapport en question est, pour eux, égal au quotient des températures absolues des deux sources :

$$\text{(60)} \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

ce qui achève de démontrer la seconde partie du théorème.

437 — *Théorème du coefficient économique.* — En reproduisant textuellement les raisonnements qui ont été fondés ci-dessus (n° 382) sur le théorème de Carnot, lorsqu'il n'avait encore été établi que pour les gaz parfaits, nous arriverons à l'énoncé suivant :

En faisant fonctionner un corps quelconque dans le cycle de Carnot qui lui est propre, on utilise seulement une partie de la chaleur dépensée qui est marquée par le rapport de la chute de température à la température ABSOLUE *la plus élevée.*

438 — *Théorème de Clausius.* — La formule (60) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{Q_1}{t_1} - \frac{Q_2}{t_2} = 0.$$

Ces deux termes, pris avec leurs signes respectifs, représentent les entropies $\int \frac{dQ}{t}$ de chacune des deux isothermes; puisque, le long de ces contours, le dénominateur conserve les valeurs constantes t_1 ou t_2. Comme d'ailleurs l'entropie est identiquement nulle le long des deux adiabatiques, on voit par cette équation que *l'entropie totale est nulle pour un* CYCLE DE CARNOT *d'un* CORPS QUELCONQUE.

Nous avons déjà vu, d'autre part (n° 280), que *l'entropie totale est nulle pour un* CYCLE RÉVERSIBLE QUELCONQUE *suivi par un* GAZ PARFAIT. Ces deux propositions constituent manifestement des cas particuliers d'un théorème plus général qui s'énoncerait de la manière suivante : *L'entropie totale est nulle pour un* CYCLE RÉVERSIBLE QUELCONQUE *et un* CORPS QUELCONQUE. Il suffirait, pour en voir découler les deux énoncés précédents, de particulariser par une hypothèse spéciale, soit le cycle en laissant le corps arbitraire, soit la nature de ce dernier en laissant le cycle indéterminé.

P

O V

Fig. 282.

Pour parvenir à la démonstration de ce théorème général [1], nous envisagerons, avec un corps quelconque, un cycle arbitraire représenté par la figure 282, et parcouru suivant le sens qui est marqué par les flèches. Nous pouvons, par la pensée, sillonner toute l'étendue du plan au moyen d'une famille d'isothermes séparées par des intervalles uniformes de température dt. La figure 283 indique ce tracé, que l'on a limité à la partie comprise dans l'intérieur du cycle proposé. Imaginons que chaque arc d'isotherme serve de ligne représentative pour une double évolution, successivement directe et inverse, et adjoignons tout cet ensemble à la transformation proposée. Nous aurons alors à parcourir la partie gauche du profil par tronçons alternatifs entre

[1] Cette proposition, d'une importance absolument capitale, a été établie pour la première fois par Clausius en 1854 (*Annales de Poggendorf*, t. XCIII, p. 500).

lesquels nous intercalerons, *aller et retour*, l'isotherme qui les sépare consécutivement; après quoi nous suivrons tout d'une traite la partie droite du tracé proposé, pour revenir au point de départ. Une telle adjonction ne change pas la valeur, provisoirement inconnue, de l'entropie totale du cycle proposé. En effet, chaque entropie recueillie le long d'un arc d'isotherme figure deux fois dans l'addition générale avec des signes contraires, et disparaît par suite identiquement.

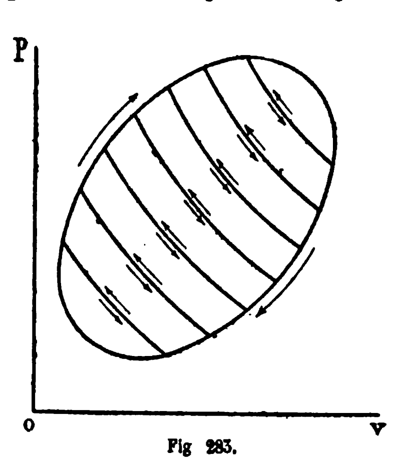


Fig 283.

Cela posé, traçons encore, par chacun des points de division du contour proposé, des arcs d'adiabatique que nous limiterons à l'isotherme la plus voisine (fig. 284), en imaginant de même que l'évolution thermique du corps suive ces courbes, aller et retour, après avoir parcouru de cette double manière l'isotherme adjacente, et avant de passer au tronçon suivant du périmètre général. Cette nouvelle addition ne troublera pas plus que la précédente la valeur, toujours inconnue, de l'entropie totale du cycle proposé.

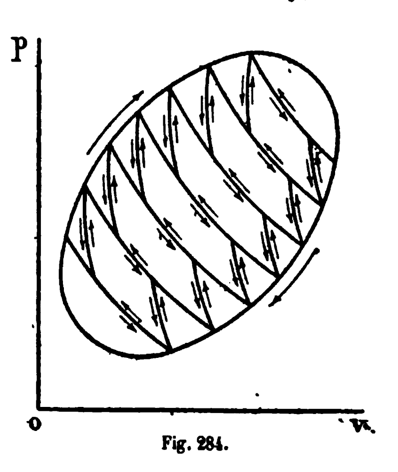


Fig. 284.

Actuellement, nous restons maîtres de modifier l'ordre des opérations partielles qui constituent l'évolution complexe ainsi définie; car la transposition correspondante, dans l'addition totale, des entropies respectives de ces divers arcs reste sans influence sur le résultat cherché. Nous grouperons à cet effet par la pensée deux isothermes consécutives, en les envisageant avec des flèches respectivement opposées, et nous leur associerons les adiabatiques

intermédiaires prises dans le sens convenable pour compléter avec les précédentes un cycle de Carnot. L'ensemble de tous ces cycles aura pour résultat d'épuiser la série des isothermes avec leur double sens, sauf des tronçons infinitésimaux, situés aux extrémités, et parcourus dans un seul sens. Les adiabatiques, de leur côté, n'ont été employées qu'une seule fois chacune, car elles n'appartiennent chacune qu'à un seul cycle de Carnot, tandis que chaque isotherme sert à en constituer deux consécutifs.

Si maintenant nous envisageons les deux cycles *triangulaires* qui occupent les extrémités de chaque cycle de Carnot [1], nous aurons à employer pour cela, tout à la fois, le second sens de l'adiabatique, le tronçon non encore employé de l'isotherme, et enfin celui du périmètre proposé. Nous aurons donc ainsi décomposé l'évolution complexe en deux séries d'opérations distinctes, à savoir : celles qui sont représentées par les cycles de Carnot, et l'ensemble des cycles triangulaires échelonnés sur toute la périphérie du contour proposé.

En ce qui concerne le premier de ces groupes, l'entropie est identiquement nulle d'après ce qui précède, puisqu'il ne comprend que des cycles de Carnot du corps proposé. Quant aux cycles triangulaires, l'aire de chacun d'eux est une quantité infiniment petite du second ordre, car elle est infinitésimale suivant toutes ses dimensions. Il en est donc de même du travail correspondant, et par suite (sauf le coefficient A) de la quantité équivalente de chaleur dQ, ou enfin de l'entropie $\frac{dQ}{t}$; attendu que le facteur fini $\frac{1}{t}$ ne saurait modifier l'ordre infinitésimal de la quantité dQ. L'intégrale $\int \frac{dQ}{t}$ étendue à l'en-

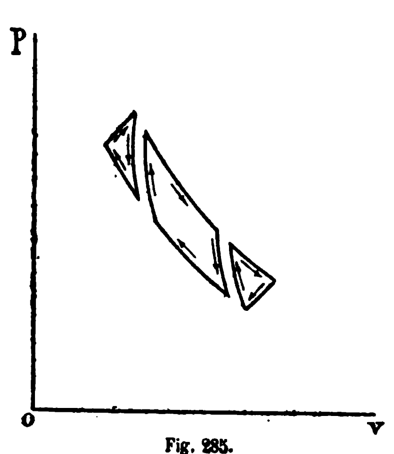


Fig. 285.

[1] Et qu'on en a disjoint sur la fig. 285, afin de montrer d'une manière plus claire l'agencement mutuel de ces cycles.

semble de ces éléments du second ordre ne peut être par conséquent qu'un infiniment petit du premier ordre, si l'on veut se refuser à la supposer rigoureusement nulle. Mais une telle conclusion serait évidemment inadmissible, car un infiniment petit est une quantité *arbitraire*, que l'on peut par la pensée rapprocher de zéro autant qu'on le voudra. Or l'entropie d'un cycle déterminé ne saurait être variable à notre volonté. Elle constitue nécessairement une quantité fixe; et pour qu'elle reste en même temps inférieure à toute valeur assignable, elle ne peut être que rigoureusement égale à zéro. Il en est donc ainsi définitivement de la double série équivalente à l'entropie du cycle proposé, ce qui achève de démontrer le théorème ([1]).

439 — *Théorème de l'entropie des cycles irréversibles.* — En même temps qu'il établissait que l'entropie d'un cycle réversible est nécessairement nulle, Clausius a montré que *l'entropie totale d'un cycle irréversible quelconque est toujours négative;* théorème qui fournit (pour le dire en passant) un criterium précis en ce qui concerne la distinction de ces deux sortes de cycles, en même temps qu'une propriété remarquable de l'entropie, qui ne saurait, comme on le voit, être positive pour aucune sorte de transformation capable de ramener finalement un corps quelconque à son état initial.

Pour démontrer cette proposition, nous envisagerons successivement les deux conditions de réversibilité qui ont été formulées ci-dessus (n° 431) relativement à la température et à la pression.

([1]) Cette proposition est souvent désignée dans l'usage sous le nom de *second principe de la théorie mécanique de la chaleur*. On considère alors le théorème de Mayer comme le *premier principe*.

Clausius la rapportait, avec une rare modestie, à Carnot, en raison de la facilité avec laquelle on peut la faire découler du théorème de ce dernier auteur. On a proposé également de l'appeler *théorème de Carnot-Clausius*.

(Belpaire. Note sur le second principe de la thermodynamique. *Bulletin de l'Académie des sciences, lettres et beaux-arts de Belgique*, t. XXXIV, p. 448. — Hirn. *Confirmation expérimentale de la seconde proposition de la théorie mécanique de la chaleur*. Paris, 1861. — Szily. Le principe de Hamilton et le second principe de la thermodynamique. *Il nuovo Cimento*, 3e série, t. II, p. 259. *Mémoires de l'Académie hongroise*, t. I, 1871. — Maurice Lévy. Application d'un théorème comprenant les deux principes de la thermodynamique. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXIV, p. 491.)

Un cycle est irréversible s'il existe une différence finie entre la température propre t du corps, et celle T des objets qui se trouvent mis en rapport thermique avec lui. Lorsqu'on a soin, comme nous venons de le faire, de préciser nettement les notations, il ne peut y avoir aucune ambiguïté sur le résultat. On a encore, comme pour les cycles réversibles :

$$\int \frac{dQ}{t} = 0,$$

en faisant figurer dans cette formule *la température du corps*. Cette relation constitue en effet une identité qui a été démontrée pour le cas où $T = t$, et qui a lieu entre les températures successives du corps et les quantités de chaleur qu'il reçoit ou qu'il cède, sans que les voies et moyens destinés à provoquer effectivement ces échanges de chaleur aient à influencer aucunement le résultat numérique de l'addition.

Mais la température du corps est, le plus souvent, difficile à déterminer, et l'on ne connaît en général *a priori* que celle T des agents que l'on emploie pour l'influencer. C'est par suite cette dernière température que l'on emploie d'ordinaire dans les énoncés et les formules, à moins que le contraire ne soit spécifié. Or, pour celle-ci, l'on a au contraire :

$$\int \frac{dQ}{T} < 0,$$

ainsi que nous allons le reconnaître.

En effet, dans les termes positifs de l'intégrale, le corps recevant de la chaleur, la source extérieure possède une température supérieure à la sienne :

$$T > t, \qquad \frac{dQ}{T} < \frac{dQ}{t}.$$

Pour les termes négatifs, le corps cède du calorique, ce qui exige que les objets environnants se trouvent à une température inférieure :

$$T < t,$$

d'où les inégalités :

$$\frac{1}{T} > \frac{1}{t}, \qquad \frac{dQ}{T} < \frac{dQ}{t},$$

puisque dQ désigne alors une quantité essentiellement négative. On a donc, en ajoutant ensemble ces deux sortes de termes sur toute la périphérie du cycle :

$$\int \frac{dQ}{T} < \int \frac{dQ}{t},$$

c'est-à-dire, d'après la première équation :

$$\int \frac{dQ}{T} < 0;$$

ainsi qu'il fallait le démontrer.

440 — Considérons maintenant la condition de réversibilité qui dérive de la pression.

Si le gaz se détend en effectuant du travail, il doit pour cela se trouver à une pression p supérieure à celle P de l'atmosphère ambiante :

$$p > P.$$

Pour refouler ce milieu, malgré la pression P que ce dernier oppose, le corps a donc à subvenir à un travail externe réel Pdv, moindre que le travail fictif pdv qui figurerait dans les calculs capables de conduire à l'équation de Clausius relativement à un cycle idéal réversible, dans lequel la tension variable p du corps serait incessamment équilibrée par une pression ambiante $p - dp$ infiniment peu différente. La chaleur qu'il emploiera pour cette opération sera moindre par conséquent que celle qu'il lui faudrait dépenser, dans le cycle idéal. On voit ainsi que la partie positive de l'entropie aura diminué.

Dans les intervalles où le corps est comprimé, il faut de toute

nécessité que la pression de l'enceinte prenne la prépondérance :

$$P > p.$$

On a par conséquent *en valeur absolue :*

$$Pdv > pdv.$$

Mais, si l'on tient compte de ce que dv désigne alors une quantité essentiellement négative, on aura au contraire *algébriquement :*

$$Pdv < pdv.$$

L'inégalité a donc lieu dans le même sens pour les quantités de chaleur correspondantes et les entropies élémentaires. On voit par suite que l'entropie totale est moindre qu'avec le cycle réversible, dans lequel elle est nulle d'après la formule de Clausius. En d'autres termes, elle est négative pour le cycle irréversible.

441 — *Théorème du coefficient économique maximum.* — L'équation de Clausius (27) ayant acquis maintenant une entière généralité, si nous reproduisons identiquement les raisonnements dont elle a déjà été l'occasion (n° 383), nous obtiendrons, avec la même extension, l'énoncé auquel ils nous avaient déjà conduits :

De tous les cycles suivant lesquels on puisse faire fonctionner un corps quelconque entre deux températures extrêmes assignées, le plus avantageux est le cycle de Carnot.

442 — *Théorème du facteur d'intégrabilité.* — *L'expression différentielle de la chaleur communiquée à un corps quelconque a toujours pour facteur d'intégrabilité l'inverse de la température absolue* [1].

En d'autres termes, tandis que dQ n'est jamais une différentielle exacte en fonction de p, v, dp, dv, considérées comme varia-

[1] Ce facteur si important $\frac{1}{t}$ a reçu le nom de *fonction de Carnot*.

bles indépendantes, $\frac{dQ}{t}$ au contraire présente toujours ce caractère, lorsque l'on y remplace t par son expression en fonction de p, v, déduite de l'équation-typique du corps considéré. Le symbole $\int \frac{dQ}{t}$ désigne d'après cela une fonction déterminée de p, v, dont la valeur est complètement définie par les seules *limites de l'intégration*, sans qu'il soit besoin d'y joindre la notion de la *voie suivie* par l'évolution thermique, pour aller d'un des points-limites à l'autre. C'est précisément le contraire de ce qui a lieu pour l'intégration $\int dQ$ de la quantité de chaleur, laquelle ne saurait être effectuée en l'absence de ce renseignement, et d'une manière générale; le résultat étant susceptible d'autant de formes distinctes que l'on voudra imaginer de voies différentes. Nous conservons à cette fonction, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure (n° 438), le nom d'*entropie*, qui lui a déjà été attribué dans le cas spécial des gaz parfaits [1].

[1] Le théorème du facteur d'intégrabilité a permis à M. Bertrand de résoudre la question suivante (*Thermodynamique*, p. 151) : *Trouver la forme la plus générale de l'équation-typique des corps qui admettent pour condition d'adiabaticité la loi de Mariotte.*

On sait déjà que les gaz parfaits ne font pas partie de cette classe, puisque, pour eux, la loi d'adiabaticité est celle de Laplace (n° 271).

L'entropie devant, dans le cas actuel, être constante ou variable en même temps que l'est, de son côté, le produit pv d'après la loi de Mariotte, sera de la forme $f(pv)$. Sa différentielle $\frac{dQ}{t}$ aura donc pour expression :

$$\frac{dQ}{t} = (pdv + vdp).f'(pv).$$

Celle de l'énergie interne dU prendra par conséquent pour valeur (éq. 2) :

$$\begin{aligned} dU &= dQ - Apdv \\ &= tf'(pv)\,vdp + [tf'(pv) - A]\,vdp. \end{aligned}$$

Or elle représente toujours, comme nous l'avons vu (n° 256), une différentielle exacte. Nous pouvons donc poser la condition d'intégrabilité sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big[tvf'(pv)\Big] = \frac{\partial}{\partial p}\Big[tpf'(pv) - Ap\Big],$$

ou, en effectuant :

Pour démontrer ce beau théorème, il suffit de faire voir que si l'on joint deux points M_1, M_2 (fig. 286) par deux tracés absolument quelconques M_1AM_2 et M_1BM_2, le résultat de l'intégration $\int \frac{dQ}{t}$ restera le même, lorsque l'on suivra l'un ou l'autre trajet.

Si, en effet, nous renversons le sens de l'un des deux parcours suivant M_2BM_1, pour l'adjoindre au premier, nous constituerons par là un cycle fermé $M_1AM_2BM_1$. Or nous venons de voir (n° 438) que l'intégrale est identiquement nulle quand on l'étend à la totalité de ce contour. En d'autres termes, les deux portions de ce

$$\left(v \frac{\partial t}{\partial v} - p \frac{\partial t}{\partial p} \right) f'(pv) = - A.$$

Cette équation différentielle partielle linéaire et du premier ordre donne, en l'intégrant par la méthode de Jacobi, et désignant par φ une fonction arbitraire :

$$Lv = \varphi(pv) - \frac{t}{A} f'(pv),$$

ou, plus simplement, puisque la caractéristique f représente elle-même une fonction arbitraire :

$$Lv = \varphi(pv) + t\psi(pv).$$

On peut, plus généralement, demander que la loi d'adiabaticité soit de la forme :

$$p^m v^n = \text{const.},$$

laquelle renferme en particulier le cas des gaz parfaits pour l'hypothèse :

$$\frac{n}{m} = 1{,}41.$$

On trouve alors, en suivant une marche toute semblable, la forme la plus générale d'équation-typique qui correspond à cette condition :

$$tp^m v^n = \varphi(p^m v^n) + pv\psi(p^m v^n),$$

avec deux fonctions arbitraires φ et ψ.

Elle reproduit, comme cela doit être, la formule des gaz parfaits, si l'on fixe de la manière suivante le choix des arbitraires :

$$\varphi(p^m v^n) = 0; \qquad \psi(p^m v^n) = \frac{p^m v^n}{R}.$$

Mais on ne doit pas lui demander, comme cas particulier, la solution que nous venons d'obtenir directement pour le cas de la loi de Mariotte, car l'hypothèse $m = n$, qui serait à cet effet nécessaire, rendrait infini le dénominateur $m - n$ que l'on rencontre pendant les opérations de l'intégration.

total qui sont relatives respectivement à M_1AM_1 et M_2BM_1, sont égales entre elles et de signes contraires. Mais d'ailleurs cette der-

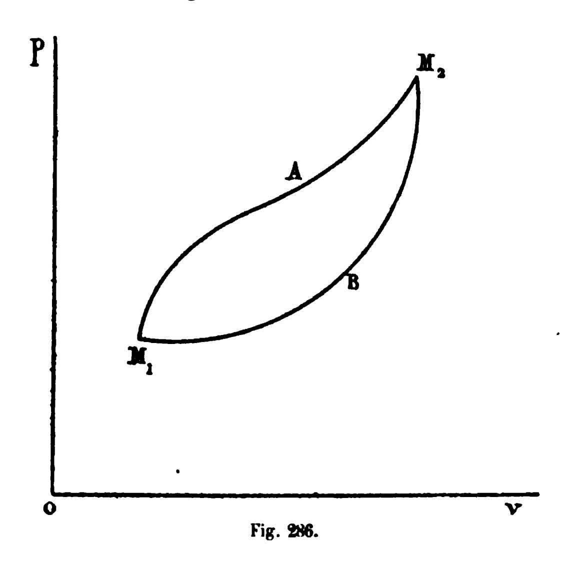


Fig. 286.

nière est elle-même égale et de signe contraire à l'intégrale relative à l'évolution inverse M_1BM_2. Il s'ensuit donc l'égalité des deux intégrales effectuées le long des courbes M_1AM_2 et M_1BM_2.

443 — Si nous continuons à représenter par s la fonction de deux variables indépendantes qui a pour différentielle totale $\frac{dQ}{t}$, il viendra pour l'entropie de tous les parcours qui réunissent deux points déterminés M_1 et M_2 :

$$\int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{dQ}{t} = s_2 - s_1.$$

Supposons en particulier que ces deux points soient choisis sur une même isotherme, de paramètre constant t; celui-ci sortira du signe d'intégration, et l'équation donnera simplement :

$$Q = t\,(s_2 - s_1).$$

Si maintenant on l'applique aux diverses isothermes qui se trou-

vent limitées par deux adiabatiques déterminées, le facteur $s_2 - s_1$ restera le même pour toutes, et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

Les quantités de chaleur échangées le long de tous les arcs d'isothermes qui se trouvent compris entre les mêmes adiabatiques, sont proportionnelles à la température absolue relative à chacune d'elles.

CHAPITRE XXVII

ÉQUATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE GÉNÉRALE

§ 1

EQUATIONS DE CLAUSIUS

444 — Nous avons établi dès l'origine, pour un corps quelconque, l'équation fondamentale (2) :

$$dQ = dU + Apdv,$$

et montré (n° 256) que U est une fonction déterminée de deux variables indépendantes. On peut donc mettre cette égalité sous la forme suivante, en introduisant pour plus de clarté la notation ∂ des différentielles *partielles* :

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial p}\, dp + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + Ap\right) dv,$$

ce que l'on représente plus simplement par :

$$(64) \qquad dQ = Xdv + Ydp,$$

au moyen des abréviations (¹) :

(¹) Ces notations, conformes à celles de Briot (*Théorie mécanique de la chaleur*, p. 40), sont précisément inverses de celles qui ont été employées par M. Zeuner (*Théorie mécanique de la chaleur*, traduction de MM. Arnthal et Cazin, p. 38). La concordance

$$
(62) \qquad
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial U}{\partial v} + Ap, \\
Y &= \frac{\partial U}{\partial p}.
\end{aligned}
$$

Ces symboles ont entre eux une relation nécessaire. Il vient en effet identiquement :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial p} &= \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial p} + A, \\
\frac{\partial Y}{\partial v} &= \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial v},
\end{aligned}
$$

et par suite [1] :

$$
(63) \qquad \frac{\partial X}{\partial p} - \frac{\partial Y}{\partial v} = A.
$$

445 — Au lieu de p et v, prenons en second lieu v et t comme variables indépendantes. L'équation (2) revêt alors la forme :

$$
dQ = \frac{\partial U}{\partial t}\, dt + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + Ap\right) dv,
$$

c'est-à-dire :

$$
(64) \qquad dQ = c\,dt + l\,dv,
$$

si l'on introduit les abréviations :

$$
(65) \qquad
\begin{aligned}
c &= \frac{\partial U}{\partial t}, \\
l &= \frac{\partial U}{\partial v} + Ap.
\end{aligned}
$$

des résultats exigerait donc le changement réciproque de X en Y, et de Y en X. Ajoutons également que M. Zeuner exprime l'énergie interne en kilogrammètres, tandis que nous continuons à la rapporter à la calorie prise comme unité.

[1] Cette condition met une fois de plus en évidence ce fait si essentiel que Q n'est pas une fonction de deux variables indépendantes, car le second membre de cette dernière relation devrait pour cela se réduire à zéro.

Ces symboles ont une signification facile à interpréter. C'est quand v reste invariable que la quantité de chaleur se réduit à cdt. Le coefficient c désigne donc la *chaleur spécifique à volume constant*. C'est de même lorsque la température reste la même que dQ se réduit à ldv. Cette fixité de la température conduit à appeler *latente* [1] la chaleur qui *se dissimule* en quelque sorte, pour produire certains effets sans influencer le thermomètre. Le résultat en question étant, dans le cas actuel, une variation de volume, on désigne l sous le nom de *chaleur latente de dilatation* [2].

Il existe encore une relation nécessaire entre ces deux paramètres. On peut en effet écrire identiquement :

$$\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial v},$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial t} + A\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{dv} = A\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{66}$$

446 — Prenons enfin t et p comme variables indépendantes. Nous transformerons à cet effet l'équation (2) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial p}dp\right) + Ap\left(\frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial p}dp\right) \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial t} + Ap\frac{\partial v}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial U}{\partial p} + Ap\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp, \end{aligned}$$

[1] Uniquement au point de vue du langage, et indépendamment de toute idée métaphysique sur ce sujet.

[2] Pour un gaz parfait, U ne dépendant que de la température (18), l'équation (65) se réduit à :

$$l = Ap.$$

La chaleur latente de dilatation d'un gaz parfait est donc proportionnelle à sa pression.

ou simplement :

$$dQ = Cdt + Ldp \,, \tag{67}$$

en posant pour abréger :

$$(68) \qquad \begin{aligned} C &= \frac{\partial U}{\partial t} + Ap\frac{\partial v}{\partial t}, \\ L &= \frac{\partial U}{\partial p} + Ap\frac{\partial v}{\partial p}. \end{aligned}$$

On voit que c'est quand p reste invariable que la quantité de chaleur se réduit à Cdt. D'après cela, C désigne la chaleur spécifique à pression constante.

Il existe, comme dans les deux cas précédents, une relation nécessaire entre les symboles C et L. On a en effet identiquement :

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial p} + Ap\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial p} + A\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial t} + Ap\frac{\partial^2 v}{\partial p \partial t},$$

et par suite :

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} = - A\frac{\partial v}{dt}. \tag{69}$$

Le choix de ces divers systèmes de variables indépendantes reste en général arbitraire, et se recommande tout au plus par le degré de simplicité qui en découle suivant les cas. Il est cependant des circonstances où certains de ces systèmes deviennent impraticables. Il suffira de citer comme exemple l'étude des vapeurs saturées. La chaleur spécifique à pression constante C cesse alors d'exister, car on peut communiquer au corps une quantité indéterminée de chaleur sans modifier sa pression. Il s'ensuit seulement une variation mutuelle des deux parties respectivement complémentaires du kilogramme envisagé qui prennent la forme liquide ou gazeuze, en n'influençant que le volume total. La relation-typique ne renferme donc plus alors v, mais uniquement p et t.

§ 2

ÉQUATIONS DE THOMSON

447 — Les trois formes (61, 64, 67) que nous venons de donner à la quantité de chaleur dQ ne sont pas des différentielles exactes [1]. Mais nous savons (n° 442) qu'elles acquièrent ce caractère quand on les divise par t. Elles représentent alors la différentielle ds de l'entropie. De là, entre les divers coefficients différentiels de cette fonction, de nouvelles relations nécessaires qu'il est intéressant de faire ressortir.

On aura pour la première de ces trois expressions (61) :

$$ds = \frac{dQ}{t} = \frac{X}{t} dv + \frac{Y}{t} dp,$$

d'où la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{X}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Y}{t}\right),$$

ou, en effectuant :

$$\frac{1}{t}\frac{\partial X}{\partial p} - \frac{X}{t^2}\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{1}{t}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{Y}{t^2}\frac{\partial t}{\partial v},$$

et en multipliant par t^2 :

$$t\left(\frac{\partial X}{\partial p} - \frac{\partial Y}{\partial v}\right) = X\frac{\partial t}{\partial p} - Y\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Si l'on a égard à la relation (63), l'on écrira définitivement :

$$X\frac{\partial t}{\partial p} - Y\frac{\partial t}{\partial v} = At. \qquad (70)$$

[1] Comme nous venons encore de le reconnaître une fois de plus (n° 444, note 2).

Nous pouvons, de cette équation, tirer successivement les valeurs de X et de Y sous la forme :

$$X = \frac{Y\frac{\partial t}{\partial v} + At}{\frac{\partial t}{\partial p}},$$

$$Y = \frac{X\frac{\partial t}{\partial p} - At}{\frac{\partial t}{\partial v}}.$$

Si on les substitue alternativement dans l'expression (61), celle-ci donne avec la première :

$$dQ = \frac{Y\left(\frac{\partial t}{\partial p}dp + \frac{\partial t}{\partial v}dv\right) + Atdv}{\frac{\partial t}{\partial p}},$$

c'est-à-dire :

(71) $$dQ = \frac{Ydt + Atdv}{\frac{\partial t}{\partial p}};$$

et, en second lieu, par une réduction analogue :

(72) $$dQ = \frac{Xdt - Atdp}{\frac{\partial t}{\partial v}}.$$

Ces formules sont nécessairement équivalentes, au fond, aux précédentes (64, 67), qui sont destinées à rattacher dQ aux mêmes systèmes de variables indépendantes (t, v) et (t, p). Mais, au lieu des coefficients (c, l), (C, L) spéciaux à ces systèmes, elles renferment ceux $\left(X, Y; \frac{\partial t}{\partial v}, \frac{\partial t}{\partial p}\right)$ qui sont relatifs au troisième groupe de variables indépendantes (v, p), lorsqu'on y rattache t au moyen de l'équation-typique du corps.

448 — Si nous prenons maintenant t et v pour variables indépendantes, nous aurons (64) :

$$ds = \frac{c}{t}\,dt + \frac{l}{t}\,dv,$$

d'où la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{l}{t}\right),$$

ou, en développant, et multipliant par t^2 :

$$t\frac{\partial c}{\partial v} = t\frac{\partial l}{\partial t} - l,$$

et finalement :

$$l = t\left(\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial v}\right). \tag{73}$$

En ayant égard à la relation (66), on obtient définitivement [1] :

$$l = At\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{74}$$

[1] L'équation (74) a permis à M. Bertrand de résoudre une question intéressante au point de vue analytique (*Thermodynamique*, p. 148).

Proposons-nous de trouver la *forme la plus générale de l'équation-typique des corps dans lesquels le travail interne puisse être nul.* L'équation différentielle de la chaleur doit alors reproduire celle qui convient aux gaz parfaits (16), et qui a été établie précisément d'après cette même condition :

$$dQ = cdt + Apdv.$$

La seule différence consiste en ce que c cessera ici de désigner une constante, et que ce symbole recouvre actuellement une entière généralité. Si l'on rapproche cette formule de l'équation générale (64) :

$$dQ = cdt + ldv,$$

il s'ensuit :

$$l = Ap,$$

Si l'on reporte maintenant cette valeur de l dans l'équation (73), elle donne en effectuant la différenciation :

$$(75) \qquad \frac{\partial c}{\partial v} = At\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

449 — Prenons enfin pour variables indépendantes t et p. Il viendra (67) :

$$ds = \frac{C}{t}dt + \frac{L}{t}dp,$$

d'où la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L}{t}\right),$$

ou, en développant et chassant le dénominateur t^2 :

$$t\frac{\partial C}{\partial p} = t\frac{\partial L}{\partial t} - L,$$

et finalement :

$$(76) \qquad L = t\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial C}{\partial p}\right).$$

ou, d'après (74) :

$$p = t\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Telle est l'équation différentielle partielle qui exprime la condition du problème.

On peut la mettre sous la forme :

$$\frac{\partial (Lp)}{\partial t} = \frac{1}{t}.$$

Elle donne par son intégration, en désignant par $L\varphi(v)$ une fonction arbitraire de la seconde variable indépendante v :

$$Lp = Lt + L\varphi(v),$$

c'est-à-dire :

$$p = t\varphi(v).$$

Telle est l'équation-typique la plus générale. Le cas des gaz parfaits s'y trouve renfermé pour l'hypothèse spéciale :

$$\varphi(v) = \frac{R}{v}.$$

En ayant égard à la relation (69), on obtient définitivement :

$$(77) \qquad L = - At \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Si l'on reporte maintenant cette valeur de L dans l'équation (76), elle donne en effectuant la différenciation [1] :

$$(78) \qquad \frac{\partial C}{\partial p} = - At \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

§ 5

ÉQUATIONS DES CHALEURS SPECIFIQUES

450 — Quand on prend pour variables indépendantes v et p, l'expression différentielle dQ est la somme de deux termes en dv et dp, qui marquent évidemment les doses spéciales de chaleur à fournir pour procurer à la température l'accroissement :

$$dt = \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial p} dp,$$

suivant que l'on imagine alternativement un échauffement à pres-

[1] Les formules (75) et (78) ont permis à M. Bertrand de résoudre la question suivante (*Thermodynamique*, p. 147) : *Trouver la forme la plus générale de l'équation-typique des corps dont les deux chaleurs spécifiques à pression ou à volume constant soient des fonctions de la température seulement.* Ces relations exigent en effet que l'on ait dans ce cas :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Mais il importe de ne pas oublier que la première est écrite par rapport au système de variables indépendantes (t, v), et la seconde pour les variables (t, p). Elles prouvent donc, chacune en son particulier, que p doit être une fonction linéaire de t, et qu'il en doit être de même pour v. Dès lors t ne peut s'exprimer réciproquement en fonction de p et v que par un polynôme entier qui ne renferme chacune de ces deux variables qu'au premier degré :

$$t = \alpha + \beta v + \gamma p + \delta pv.$$

Telle est la forme la plus générale de l'équation-typique cherchée.

sion constante, ou à volume constant. Ils ont, d'après cela, pour mesure Cdt_1 et cdt_2; les valeurs particulières dt_1 et dt_2, qui correspondent respectivement à ces deux hypothèses, n'étant autres que chacun des deux termes de l'équation précédente, suivant que l'on y annule dv ou dp. Les deux produits Cdt_1 et cdt_2 prennent donc individuellement la forme des deux termes que nous réunissons ci-après l'un avec l'autre, pour constituer par leur ensemble dQ, ainsi qu'il vient d'être expliqué :

$$(79) \qquad dQ = c\frac{\partial t}{\partial p}dp + C\frac{\partial t}{\partial v}dv.$$

Il vient par conséquent, pour l'énergie interne (2) :

$$(80) \qquad dU = c\frac{\partial t}{\partial p}dp + \left(C\frac{\partial t}{\partial v} - Ap\right)dv;$$

et pour l'entropie :

$$(81) \qquad ds = \frac{c}{t}\frac{\partial t}{\partial p}dp + \frac{C}{t}\frac{\partial t}{\partial v}dv.$$

Nous savons que U et s sont des fonctions déterminées des variables indépendantes v, p; à l'inverse de ce qui a lieu pour la formule (79). Ces deux dernières (80, 81) sont donc des différentielles exactes, ce qui entraîne les conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\partial t}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(C\frac{\partial t}{\partial v} - Ap\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c}{t}\frac{\partial t}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\right).$$

En effectuant les différenciations, on obtient ces importantes relations :

$$(82) \qquad (C - c)\frac{\partial^2 t}{\partial v \partial p} + \frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p} = A,$$

$$(83) \qquad (C - c)\frac{\partial^2 t}{\partial v \partial p} + \frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial t}{dv} - \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{C - c}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p},$$

d'où l'on déduit encore la suivante :

$$(C - c)\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p} = At.$$

Ces trois équations conviennent à un corps quelconque. La première (82) se simplifie notablement, quand on se maintient dans la catégorie spéciale des substances pour lesquelles les deux chaleurs spécifiques C et c conservent des valeurs constantes. Elle devient alors :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial v \partial p} = \frac{A}{C - c}.$$

Nous savons, par exemple, que les gaz parfaits remplissent cette condition (nº 262). Leur équation-typique (10) donne d'ailleurs :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial v \partial p} = \frac{1}{R}.$$

On retrouve ainsi la relation paramétrique (14) :

$$C - c = RA.$$

§ 4

ÉQUATIONS DE KIRCHHOF

451 — Les travaux de Kirchhof et de Thomson ont encore élargi la question en ce qui concerne le choix du système de variables indépendantes. En vue de faciliter l'étude de divers problèmes, on peut imaginer que l'on adopte à cet égard, d'une part la température t, et de l'autre une quantité quelconque z, qui désignera le plus ordinairement dans les applications v ou p comme ci-dessus, mais qui pourra tout aussi bien représenter, par exemple, le coefficient de conductibilité, l'indice de réfraction, ou tout autre élément qui se trouverait plus naturellement indiqué dans un cas donné, en vue de simplifier la recherche que l'on s'y propose. Nous

pouvons entreprendre avec ce degré de généralité, et sans particu lariser la signification de z, la recherche de l'expression de l'énergie interne U, question qui présente une très grande importance.

Dans ces conditions, la quantité de chaleur prendra la forme :

$$dQ = Mdz + Ndt,$$

et comme elle doit s'identifier avec l'équation (2) :

$$dQ = dU + Apdv,$$

il s'ensuivra l'égalité :

$$Mdz + Ndt = \left(\frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt\right) + Ap\left(\frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt\right).$$

laquelle se décompose en deux autres :

$$M = \frac{\partial U}{\partial z} + Ap\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$N = \frac{\partial U}{\partial t} + Ap\frac{\partial v}{\partial t}.$$

On en déduit les dérivées partielles de U :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = M - Ap\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = N - Ap\frac{\partial v}{\partial t},$$

et, par suite, la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(M - Ap\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(N - Ap\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

qui donne en effectuant :

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial z} = A\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

On sait, d'autre part, que l'entropie est une fonction déterminée des variables indépendantes p et v, dont t constitue la fonction-typique (n° 412). Il en est par conséquent de même avec n'importe quel système de variables, si l'on substitue par la pensée, dans cette fonction, les expressions qui les rattachent aux précédentes. En d'autres termes, le binôme :

$$\frac{M}{t}dz + \frac{N}{t}dt$$

est une différentielle exacte, ce qui donne lieu à l'identité :

$$\frac{\partial\left(\frac{M}{t}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{N}{t}\right)}{\partial z},$$

ou, en effectuant :

$$\frac{1}{t}\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{M}{t^2} = \frac{1}{t}\frac{\partial N}{\partial z},$$

ce qu'on peut écrire :

$$M = t\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Mais nous avons trouvé ci-dessus tout à la fois la valeur de M et celle de la différence qui figure dans le second membre. Il vient par leur substitution :

$$\frac{\partial U}{\partial z} + Ap\frac{\partial v}{\partial z} = At\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = At^2\left[\frac{t\frac{\partial p}{\partial t} - p}{t^2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{t}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial t}\right]$$

$$= At^2\left[\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\left(\frac{p}{t}\right)}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\left(\frac{p}{t}\right)}{\partial z}\right].$$

On déduit de là, en intégrant par rapport à z entre deux limites quelconques z_0 et z, et désignant par φ une fonction arbitraire de la température :

$$U = \varphi(t) + At^2 \int_{z_0}^{z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{p}{t}\right)}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{p}{t}\right)}{\partial z} \right] dz.$$

Pour déterminer cette fonction φ, nous envisagerons la seconde dérivée partielle de U, dont nous possédons également la valeur. et qui nous donnera, pour l'hypothèse spéciale $z = z_0$, cette équation différentielle entre U et t :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{(z=z_0)} = N_{(z=z_0)} - A\left(p \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{(z=z_0)}$$

Si l'on intègre par rapport à t avec deux limites quelconques t_0 et t, le premier membre fournira la valeur de U en fonction de t qui correspond à l'hypothèse particulière $z = z_0$ (c'est-à-dire précisément $\varphi(t)$, si l'on se reporte à l'équation précédente). Il vient donc par là :

(84)
$$U = U_0 + \int_{t_0}^{t} \left[N_{(z=z_0)} - A\left(p \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{(z=z_0)} \right] dt$$
$$+ At^2 \int_{z_0}^{z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{p}{t}\right)}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{p}{t}\right)}{\partial z} \right] dz,$$

en désignant par U_0 la valeur de U qui correspond à la double hypothèse $z = z_0$, $t = t_0$; quantité qui reste, bien entendu, comme dans toutes les recherches précédentes, inconnue quant à sa valeur numérique absolue.

On peut baser, sur l'emploi de cette formule générale, une méthode pour les recherches de thermodynamique. Les variations de l'énergie interne ne dépendent en effet pour un corps donné, que des deux manières d'être extrêmes, initiale et finale, et nullement de la série des modifications intermédiaires. D'après cela, quand on veut déterminer la loi d'un changement d'état, l'on n'aura qu'à

imaginer successivement deux séries distinctes de transformations permettant de passer du premier au second; l'on formera, en leur appliquant les calculs précédents, deux expressions différentes de la variation de l'énergie interne, et, en égalant ces dernières, on obtiendra une relation entre les divers éléments du phénomène.

452 — Vérifions, sur le cas des gaz parfaits, le résultat fourni par la formule générale (84), en prenant pour variables v et t. Nous ferons pour cela :

$$z = v; \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

L'équation-typique donne d'ailleurs :

$$\frac{p}{t} = \frac{R}{v}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{p}{t}\right)}{\partial v} = -\frac{R}{v^2}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{p}{t}\right)}{\partial t} = 0.$$

On voit d'après cela s'évanouir spontanément la seconde des intégrales qui figurent dans l'équation (84). Il en est de même pour le terme négatif de la première. Quant à N, qui subsiste seul dans cette expression, nous devons, pour rester en conformité avec nos précédentes notations, identifier $Mdv + Ndt$ avec $ldv + cdt$ (64). Nous remplacerons donc le symbole N par la constante c, ce qui donnera :

$$U = U_0 + \int_{t_0}^{t} c\,dt,$$

d'où, en effectuant :

$$U - U_0 = c\,(t - t_0).$$

Nous retrouvons ainsi la formule connue (18).

CHAPITRE XXVIII

FONCTIONS CARACTERISTIQUES

—

§ 1

VARIABLES INDÉPENDANTES T ET V.

453 — Nous sommes revenus déjà bien des fois sur la distinction fondamentale à observer parmi les divers éléments qui figurent dans l'étude de la thermodynamique. Les uns (et la quantité de chaleur Q est de ce nombre) dépendent, pour une évolution donnée, non seulement de ses deux états-limites, mais en outre de la voie qui permet de passer de l'un à l'autre.

Les autres constituent au contraire, sur l'épure représentative, des *fonctions-de-point*. Elles sont susceptibles d'une expression définie une fois pour toutes à l'aide des deux variables indépendantes. Le changement qu'elles subissent pour passer d'un état à un autre ne dépend plus que de ces deux états-limites, et nullement de la succession quelconque qui a servi à les relier l'un à l'autre. On comprend facilement l'intérêt majeur qui s'attache à des fonctions de ce genre. Comme exemples, nous avons déjà rencontré, en premier lieu, la troisième des quantités p, v, t, lorsque deux quelconques d'entre elles auront été prises comme variables indépendantes dans l'équation-typique du corps considéré. Il y faut joindre également l'énergie interne U (n° 256), et l'entropie s (n° 442).

M. Massieu a réussi d'une manière élégante [1] à faire, pour chaque substance, dépendre d'une seule fonction, qu'il appelle la *caractéristique* de ce corps, toutes ces diverses quantités, à savoir la troisième variable, ainsi que U, *s*, leurs dérivées partielles, et les divers coefficients différentiels qui se sont introduits jusqu'ici dans ces études, tels que les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants, etc.

L'auteur signale une application de cette fonction qui présente un grand intérêt philosophique. Elle constitue pour lui une sorte de crible, qui permettra de discerner directement, parmi des énoncés quelconques que l'on viendrait à mettre en avant, ceux qui se trouvent correspondre à des vérités effectives, et ceux qui constituent au contraire des propositions fausses.

Veut-on, par exemple, contrôler une assertion que certaines analogies, ou une intuition plus ou moins fondée, amènent à soupçonner. On la traduira pour cela en formule analytique, en rendant à chacun des éléments qui figurent dans cet énoncé sa valeur analytique, constituée une fois pour toutes par la théorie qui va suivre, à l'aide de la fonction caractéristique et de ses dérivées partielles. Si cette égalité se réduit à une identité, le théorème est vrai pour tous les corps de la nature, puisqu'il a lieu quelle que soit la fonction qui sert à les distinguer les uns des autres. Si, au contraire, l'égalité n'est pas identique, l'énoncé cesse de constituer un théorème général. Il n'est plus qu'une vérité particulière, ordinairement de peu d'intérêt, et réservée à une catégorie spéciale de corps définie par l'intégration de l'équation différentielle partielle ainsi obtenue, qui fournira, sous la forme la plus générale dont elle est susceptible, leur fonction caractéristique.

Cet appareil de formules est évidemment susceptible de revêtir des aspects différents, suivant le choix que l'on fera tout d'abord pour les variables indépendantes. Nous l'exposerons successivement sous les deux états distincts qui correspondent à l'emploi de la température combinée soit avec le volume, soit avec la

[1] F. Massieu. Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, t. XXII).

pression. Nous commencerons par le système de variables (t, v).

454 — Les équations :

$$dQ = dU + Apdv,$$
$$dQ = tds,$$

donnent par leur rapprochement :

$$tds = dU + Apdv,$$

ou, en ajoutant aux deux membres le terme sdt :

$$d(st) = dU + sdt + Apdv,$$
$$d(st - U) = sdt + Apdv.$$

La fonction caractéristique, que M. Massieu désigne par H, est précisément [1] :

$$(85) \qquad H = st - U.$$

[1] S'il s'agit, par exemple, des gaz parfaits, on a, en désignant par U_0 l'énergie interne, évaluée à la température de la glace fondante (18) :

$$U = U_0 + c(t - 273),$$

et, en comptant l'entropie à partir du même point (26) :

$$s = cL\left(\frac{pv^k}{p_0v_0^k}\right) = cL\left(\frac{tv^{k-1}}{273\, v_0^{k-1}}\right).$$

Il vient ainsi :

$$H = ctL\left(\frac{tv^{k-1}}{273\, v_0^{k-1}}\right) - c(t - 273) - U_0.$$

On peut également employer cette forme plus condensée :

$$H = ctL\left(\frac{tv^{k-1}}{273\, cv_0^{k-1}}\right),$$

si l'on convient expressément de supprimer la constante $273\,c - U_0$, dont la valeur numérique nous est inconnue, et qui, sauf dans l'équation (89), disparaît de toutes les formules, car H n'y figure que par ses dérivées.

On trouvera plus loin (n° 481) un second exemple de la détermination de la fonction caractéristique, relatif aux vapeurs saturées.

L'identité précédente :

$$dH = sdt + Apdv,$$

entraine immédiatement les suivantes :

$$(86) \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = s,$$

$$(87) \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = Ap.$$

Déjà, par conséquent, l'entropie s et la fonction-typique p des variables indépendantes t, v se trouvent exprimées au moyen des dérivées de la fonction caractéristique.

455 — On déduit encore de (85) :

$$(88) \qquad U = st - H,$$

c'est-à-dire (86) :

$$(89) \qquad U = t\frac{\partial H}{\partial t} - H.$$

L'énergie interne se trouve ainsi évaluée dans les mêmes conditions.

On peut également obtenir des expressions très simples de ses deux dérivées partielles. On a en effet, d'après les relations (86) et (85) :

$$s = \frac{\partial H}{\partial t} = s + t\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t},$$

et par conséquent :

$$(90) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = t\frac{\partial s}{\partial t}.$$

D'autre part, la même équation (86) donne encore, en la combinant avec (87) :

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(Ap),$$

c'est-à-dire :

$$(91) \qquad \frac{\partial s}{\partial v} = A\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Dès lors nous déduisons des égalités (88), (91), (87) :

$$\frac{\partial U}{\partial v} = t\frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v}$$

$$= At\frac{\partial p}{\partial t} - Ap,$$

par conséquent :

$$(92) \qquad \frac{\partial U}{\partial v} = At^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{t}\right).$$

On obtient d'après cela, en intégrant entre deux limites, l'équation :

$$U = U_0 + At^2\frac{\partial}{\partial t}\int_{v_0}^{v}\frac{p}{t}\,dv,$$

dans laquelle il est aisé de reconnaître la formule (84) de Kirchhoff.

456 — La chaleur communiquée sous pression constante a pour valeur Cdt. Nous pouvons l'égaler à dQ, ou tds, en ayant soin de traiter p comme une constante quand nous développerons les différenciations. Nous aurons, dans ces conditions (86) :

$$Cdt = td\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

$$= t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial v}\partial v\right),$$

dt, dv cessant, bien entendu, de désigner des symboles quelconques, pour rester liés ici par la condition en question. Or si,

pour l'exprimer, nous différencions l'équation (87) en y supposant la pression constante, elle donne :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial t} dt + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} dv = 0.$$

En reportant cette valeur de *dv* dans la formule précédente, on voit *dt* disparaître de part et d'autre, et il reste :

$$(93) \qquad C = \frac{t}{\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial v} \right)^2 \right].$$

On peut également écrire, en vertu des relations (86) et (87)

$$C = t \left[\frac{\partial s}{\partial t} - A \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2}{\frac{\partial p}{\partial v}} \right],$$

ou enfin, d'après (90) :

$$C = \frac{\partial U}{\partial t} - At \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2}{\frac{\partial p}{\partial v}}.$$

457 — Envisageons de même la chaleur spécifique à volume constant *c*. Nous obtiendrons, comme tout à l'heure pour C :

$$c dt = t \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} dt + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial v} dv \right).$$

Seulement *dt* et *dv* désignent maintenant des symboles tout à fait différents, reliés entre eux par la condition que le volume reste constant, ce qui réduit immédiatement cette équation à la forme :

$$(94) \qquad c = t \frac{\partial^2 H}{\partial t^2},$$

ou encore (86) :

$$(95) \qquad c = t\frac{\partial s}{\partial t},$$

et enfin (90) :

$$c = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Ces relations permettent d'établir une formule importante. Il vient en effet, en retranchant membre à membre (93) et (94) :

$$C - c = -t\frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial v}\right)^2}{\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}},$$

ou encore, d'après (87) :

$$(96) \qquad C - c = -At\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial p}{\partial v}}.$$

458 — Si, par exemple, on envisage en particulier un gaz parfait, on aura :

$$p = \frac{Rt}{v}.$$

$$(97) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{R}{v}, \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{Rt}{v^2},$$

et par suite (94) :

$$(98) \qquad C - c = -At\frac{\left(\frac{R}{v}\right)^2}{-\frac{Rt}{v^2}} = AR.$$

On retrouve ainsi l'équation paramétrique (14).

On déduit d'ailleurs de la relation (95) :

$$\frac{\partial c}{\partial v} = t\frac{\partial^2 s}{\partial t \partial v},$$

c'est-à-dire (91) :

$$\frac{\partial c}{\partial v} = At\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Il viendra donc en particulier pour un gaz parfait :

$$\frac{\partial c}{\partial v} = 0.$$

Dès lors la relation (98) différenciée par rapport à v nous donne :

$$\frac{\partial C}{\partial v} = 0.$$

Si on la différencie au contraire par rapport à t, l'on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t};$$

mais la théorie, en nous montrant l'égalité mutuelle de ces dérivées relatives à t, ne nous enseigne pas si elles sont nulles comme les dérivées prises par rapport à v. C'est à l'expérience qu'il appartient de répondre à cet égard.

459 — On appelle *coefficient de compression isotherme* le rapport de la diminution *proportionnelle* de volume $\frac{dv}{v}$ à l'augmentation élémentaire de pression dp, lorsque la température reste essentiellement constante. Si nous désignons par χ ce paramètre, nous aurons, en employant la notation des différentielles partielles :

$$\chi\partial p = -\frac{\partial v}{v}. \qquad (99)$$

Mais l'équation (87) différenciée par rapport à v, en laissant t constant, nous donne :

$$A\partial p = \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\partial v,$$

d'où, en divisant membre à membre :

$$\chi = -\frac{A}{v\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}}.$$

Pour les gaz parfaits, on obtient, en différenciant l'équation-typique sans y faire varier t :

$$p\partial v + v\partial p = 0,$$

et par suite (99) :

$$\chi = \frac{1}{p}.$$

Le coefficient de compression isotherme varie donc, dans les gaz parfaits, en raison inverse de la pression.

§ 2

VARIABLES INDÉPENDANTES T ET P

460 — On peut entreprendre des calculs analogues en adoptant pour variables indépendantes t et p.

L'équation fondamentale (2) devient, si l'on ajoute aux deux membres la quantité $sdt + Avdp$:

$$d(st) + Avdp = dU + d(Apv) + sdt,$$

c'est-à-dire :

$$d(st - U - Apv) = sdt - Avdp.$$

Posons :

(100) $$V = U + Apv,$$

et prenons en même temps pour nouvelle fonction caractéristique [1] :

$$(101) \qquad K = st - V;$$

l'égalité précédente deviendra :

$$dK = sdt - Avdp.$$

On en déduit :

$$(102) \qquad \frac{\partial K}{\partial t} = s,$$

$$(103) \qquad \frac{\partial K}{\partial p} = - Av,$$

formules qui relient immédiatement, à la fonction caractéristique K, l'entropie s et la fonction-typique v de t et p.

Nous avons d'ailleurs (101) :

$$V = st - K,$$

et par suite (102) :

$$(104) \qquad V = t\frac{\partial K}{\partial t} - K.$$

Il vient en outre (100) :

$$U = V - Apv,$$

[1] On aura par exemple pour les gaz parfaits :

$$\begin{aligned} K &= H - Apv \\ &= H - ARt \\ &= H - (k - 1)\,ct, \end{aligned}$$

ou, en substituant la valeur de H qui a été obtenue ci-dessus (n° 454, note 1) :

$$K = ctL\left(\frac{tv^{k-1}}{273\,e^{k}v_0^{\,k-1}}\right),$$

expression qui pourra servir pour toutes les formules dans lesquelles K ne figure que par ses dérivées, puisque nous avons, à dessein, fait abstraction de la constante qui s'ajoute à l'expression de H.

d'où cette valeur de l'énergie interne (104, 103) :

$$U = t\frac{\partial K}{\partial t} + p\frac{\partial K}{\partial p} - K. \tag{105}$$

On peut de même obtenir les expressions des dérivées partielles des deux fonctions U et V. Nous aurons d'abord, en différenciant cette dernière relation par rapport à t :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = t\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t},$$

ou, d'après (102) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = t\frac{\partial s}{\partial t} + p\frac{\partial s}{\partial p}. \tag{106}$$

Nous obtiendrons de même, en différenciant l'équation (101) par rapport à t :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = s + t\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t},$$

c'est-à-dire (102) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = t\frac{\partial s}{\partial t}. \tag{107}$$

Si l'on exécute la même différenciation relativement à p, elle donne :

$$\frac{\partial K}{\partial p} = t\frac{\partial s}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p},$$

ou d'après (103) :

$$\frac{\partial V}{\partial p} = t\frac{\partial s}{\partial p} + Av.$$

On a du reste, en différenciant par rapport à p la formule (102) :

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p},$$

et en différenciant (103) relativement à t :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p} = - A \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Il vient donc définitivement :

$$\frac{\partial V}{\partial p} = - At \frac{\partial v}{\partial t} + Av, \tag{108}$$

ce que l'on peut également mettre sous cette forme :

$$\frac{\partial V}{\partial p} = - At^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{t}\right). \tag{109}$$

Nous tirons enfin de l'équation (100) :

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} + Av,$$

et par suite (108) :

$$\frac{\partial U}{\partial p} = - At \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{110}$$

461 — Pour obtenir la chaleur spécifique à pression constante C, nous n'avons qu'à supprimer dans l'expression générale de dQ le terme en dp, en ne laissant varier que t, ce qui donne :

$$C = \frac{t \partial s}{\partial t}, \tag{111}$$

c'est-à-dire (107) :

$$C = \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{112}$$

ou encore (102) :

$$C = t \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}. \tag{113}$$

La chaleur spécifique à volume constant c s'obtiendra au contraire à l'aide de la différentielle complète dQ, ou tds, dans laquelle on établira entre dt et dp une relation telle que v reste constant. Nous aurons donc (102) :

$$\begin{aligned} cdt &= tds \\ &= td\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right) \\ &= t\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}dt + \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}dp\right). \end{aligned}$$

Il vient d'un autre côté, en annulant la différentielle totale de v d'après l'équation (103) :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t}dt + \frac{\partial^2 K}{\partial p^2}dp = 0.$$

Si nous éliminons dp à l'aide de cette relation, dt disparaît de lui-même, et il reste :

$$(114) \qquad c = \frac{t}{\frac{\partial^2 K}{\partial p^2}}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\frac{\partial^2 K}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}\right)^2\right],$$

ou encore (102) :

$$(115) \qquad c = t\left[\frac{\partial s}{\partial t} - A\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}\right],$$

et enfin (107) :

$$(116) \qquad c = \frac{\partial V}{\partial t} - At\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}.$$

Les relations (113) et (114) donnent par leur soustraction :

$$(117) \qquad C - c = t\frac{\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}\right)^2}{\frac{\partial^2 K}{\partial p^2}},$$

ou sous une autre forme :

$$(118) \qquad C - c = -At \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}.$$

462 — Le coefficient de compressibilité isotherme (99) se déduit directement de l'équation (103), qui donne par sa différenciation relative à p :

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{1}{A}\frac{d^2K}{\partial p^2}.$$

Il vient donc :

$$\chi = -\frac{\frac{\partial^2 K}{\partial p^2}}{\frac{\partial K}{\partial p}},$$

ou encore :

$$\chi = -\frac{\partial}{\partial p}\left(L\frac{\partial K}{\partial p}\right).$$

§ 3

DÉTENTES ISOTHERME, ADIABATIQUE ET A PRESSION CONSTANTE

463 — *Détente à pression constante.* — Reprenons, avec un corps quelconque, les exemples simples de détente que nous avons déjà envisagés pour les gaz parfaits (nos 267, 269, 270). Nous considérerons en premier lieu celle qui s'opère à pression constante.

Si nous désignons par γdt la quantité élémentaire dont s'accroît alors l'énergie interne, elle aura pour expression l'excès de la valeur totale Cdt sur celle $Apdv$ qui est employée en travail externe :

$$\gamma = C - Ap\frac{\partial v}{\partial t},$$

en employant la notation des dérivées partielles, puisque la seconde variable indépendante p ne doit pas changer de valeur dans le cas actuel.

Or l'équation (103) nous donne à cet effet :

$$A\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t}. \tag{119}$$

vient donc (113) :

$$\gamma = t\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t}. \tag{120}$$

464 — *Détente adiabatique.* — Dans la détente adiabatique, le corps n'ayant de communication thermique avec aucun autre, ne saurait développer de travail externe qu'au moyen de sa propre énergie interne dU, laquelle a pour valeur (105) :

$$\begin{aligned} dU = {} & t\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}dt + \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}dp\right) + \frac{\partial K}{\partial t}dt \\ & + p\left(\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t}dt + \frac{\partial^2 K}{\partial p^2}dp\right) + \frac{\partial K}{\partial p}dp \\ & - \left(\frac{\partial K}{\partial t}dt + \frac{\partial K}{\partial p}dp\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en réduisant :

$$dU = \left(t\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t}\right)dt + \left(t\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p} + p\frac{\partial^2 K}{\partial p^2}\right)dp.$$

Mais d'ailleurs l'entropie s reste alors constante, puisque $dQ=0$. Il en est donc de même (102) de $\frac{\partial K}{\partial t}$, dont nous pouvons par conséquent égaler à zéro la différentielle totale :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}dt + \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}dp = 0; \tag{121}$$

elation qui nous fera connaître la valeur de dp propre au cas que

nous traitons. Si on la reporte dans l'expression précédente, celle-ci prend la forme :

$$\frac{dU}{dt} = t\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t} - \left(t\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p} + p\frac{\partial^2 K}{\partial p^2}\right)\frac{\frac{\partial^2 K}{dt^2}}{\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}}.$$

Représentons par Γdt la diminution adiabatique dU de l'énergie interne ; il viendra en réduisant :

$$\Gamma = \frac{p}{\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}}\left[\left(\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\frac{\partial^2 K}{\partial p^2}\right].$$

Cette expression peut d'ailleurs se rattacher aux précédentes d'une manière très simple. Nous avons en effet (117) :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p^2} = \frac{t}{C - c}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}\right)^2.$$

Il vient donc :

$$\Gamma = p\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}\left[1 - \frac{t}{C - c}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right].$$

On a d'ailleurs (120 et 115) :

$$p\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial t} = \gamma - t\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$$
$$= \gamma - C,$$

et par suite :

$$\Gamma = (\gamma - C)\left(1 - \frac{C}{C - c}\right),$$

ou, finalement :

$$\Gamma = c\frac{C - \gamma}{C - c}.$$

Nous pouvons encore évaluer la variation de température qui accompagnera une évolution adiabatiqne élémentaire.

La relation (121) donne en effet pour cela :

$$dt = -\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial t \partial p}}{\dfrac{\partial^2 K}{\partial t^2}} dp.$$

On a du reste (113 et 119) :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{C}{t}, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial p} = -A \frac{\partial v}{dt}.$$

De là cette équation de Thomson :

$$dt = \frac{At}{C} \frac{\partial v}{\partial t} dp.$$

465 — *Détente isotherme.* — Désignons par q la quantité de chaleur qui correspond à la détente isotherme. C'est une fonction

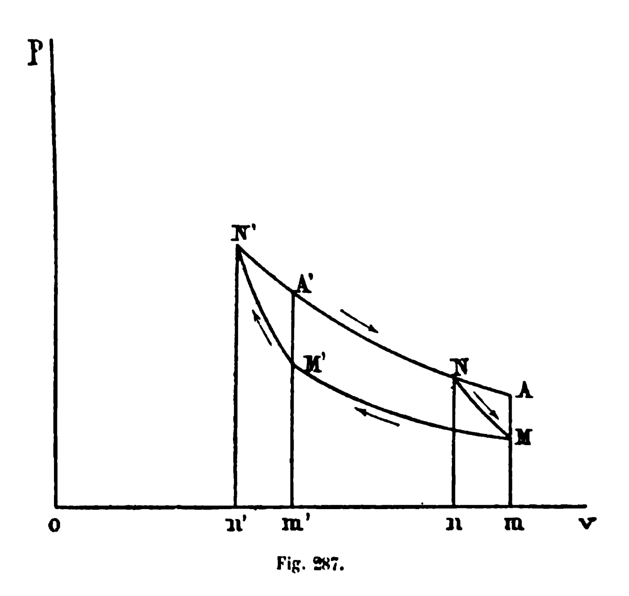


Fig. 287.

bien déterminée de la température fixe t et des deux états-limites. que nous représenterons par (p, v) et (p', v'). Ces dernières données se réduisent d'ailleurs aux arbitraires v et v', puisque p et p' s'en

déduiront d'après l'équation-typique du corps, que l'on doit supposer connue.

Traçons (fig. 287) dans le voisinage de l'isotherme en question MM′, une isotherme infiniment rapprochée NN′, relative à la température $t + dt$. Menons encore, par les extrémités M et M′ de la première, les adiabatiques MN, M′N′. Nous constituons ainsi un cycle de Carnot MNM′N′, qui est infiniment étroit dans le sens des ordonnées, tout en gardant une dimension finie suivant la courbe isotherme. La quantité de chaleur qu'il est nécessaire de fournir au corps pour accomplir l'évolution représentée par NN′, aura pour valeur $q + dq$, en tenant compte, pour former la différentielle dq, des variations subies par les coordonnées des extrémités de l'arc MM′, auquel correspond la fonction q. Ce dernier, dans le cycle de Carnot, se trouve parcouru suivant le sens interverti MM′. Il représente donc l'évolution inverse, dans laquelle on retirera au corps, par l'action d'un réfrigérant, la quantité de chaleur q. Les adiabatiques ne correspondant d'ailleurs à aucun échange thermique, le total de la chaleur qui se trouve transmise au corps sera dq, et le travail effectué Edq.

Appliquons à ce cycle de Carnot l'équation (60). Elle prendra la forme :

$$\frac{q + dq}{q} = \frac{t + dt}{t},$$

$$dq = \frac{q}{t}\, dt.$$

On obtient ainsi cette première expression du travail produit :

$$\mathrm{E}\,\frac{q}{t}\, dt.$$

Pour nous en procurer une seconde, prolongeons jusqu'en A et A′ les ordonnées des extrémités M et M′ de l'arc proposé. Nous aurons identiquement :

$$\mathrm{MM'NN'} = \mathrm{MM'AA'} + \mathrm{M'N'A'} - \mathrm{MNA},$$

et, en négligeant les infiniment petits de second ordre :

$$\mathrm{MM'NN'} = \mathrm{MM'AA'} = mm'\mathrm{AA'} - mm'\mathrm{MM'}.$$

Représentons par ∂p, avec la caractéristique des différentielles partielles, l'accroissement MA de l'ordonnée p du point M, obtenu en laissant le volume constant, c'est-à-dire en passant suivant la verticale d'une isotherme à l'autre. On aura alors identiquement :

$$mm'\mathrm{MM'} = \int_{v'}^{v} p dv,$$

$$mm'\mathrm{AA'} = \int_{v'}^{v} \left(p + \frac{\partial p}{\partial t} dt\right) dv,$$

et, par suite, en retranchant :

$$\mathrm{MM'NN'} = \int_{v'}^{v} \frac{\partial p}{\partial t} dt dv.$$

Il vient donc, en égalant ces deux expressions du travail :

$$\mathrm{E}\frac{q}{t} dt = dt \int_{v'}^{v} \frac{\partial p}{\partial t} dv,$$

et enfin :

$$q = \frac{t}{\mathrm{E}} \int_{v'}^{v} \frac{\partial p}{\partial t} dv. \tag{122}$$

Telle est l'équation de Rankine, qui est destinée à fournir l'expression de la chaleur nécessaire pour la réalisation du travail isotherme.

466 — Pour présenter un exemple de l'application de cette importante relation, envisageons le cas des gaz parfaits.

Leur équation-typique :

$$pv = \mathrm{R}t,$$

donne, quand on la différencie en laissant v constant :

$$v \frac{\partial p}{\partial t} = \mathrm{R}.$$

On aura donc :

$$q = \frac{t}{\mathrm{E}} \int_{v'}^{v} \frac{\mathrm{R}}{v}\, dv,$$

et, par suite, avec un logarithme népérien :

$$\mathrm{E}q = \mathrm{R}t\, L\, \frac{v}{v'},$$

ce qui reproduit l'expression connue (20) du travail de la détente isotherme dans les gaz parfaits.

467 — On peut également rattacher analytiquement la démonstration de l'équation de Rankine aux formules générales de la thermodynamique.

Reprenons à cet effet l'égalité (79) :

$$d\mathrm{Q} = c\, \frac{\partial t}{\partial p}\, dp + \mathrm{C}\, \frac{\partial t}{\partial v}\, dv.$$

Pour exprimer qu'il s'agit de la détente isotherme, nous ferons $dt = 0$, ce qui donne, en développant :

$$\frac{\partial t}{\partial v}\, dv + \frac{\partial t}{\partial p}\, dp = 0.$$

Il viendra en conséquence :

$$dq = (\mathrm{C} - c)\, \frac{\partial t}{\partial v}\, dv,$$

ou, d'après la relation (84) :

$$dq = \frac{\mathrm{A}t}{\frac{\partial t}{\partial p}}\, dv.$$

Remarquons d'ailleurs que, dans la différenciation qui fournit $\frac{\partial t}{\partial p}$, ainsi que pour le coefficient différentiel $\frac{\partial p}{\partial t}$ qui figure dans l'équation (122), v reste constant. Il ne s'agit donc ici que d'une fonction d'une seule variable, et, dès lors, d'après le théorème de la dérivée inverse, ces deux dérivées sont l'inverse l'une de l'autre. On peut écrire par conséquent [1] :

$$dq = \mathrm{A}t\,\frac{\partial p}{\partial t}\,dv;$$

ce qui reproduit la formule (122).

[1] Cette équation a permis à M. Bertrand de résoudre la question suivante (*Thermodynamique*, p. 150) : *Déterminer l'équation-typique la plus générale des corps pour lesquels la compression dégage une quantité de chaleur proportionnelle au travail dépensé pour l'effectuer.*

La quantité de chaleur développée dans la compression est précisément celle qu'il faudrait enlever au corps, pour que sa température restât constante pendant la variation de la pression; c'est donc celle qui correspond à la détente isotherme :

$$\mathrm{A}t\,\frac{\partial p}{dt}\,dv.$$

Si nous voulons qu'elle soit égale à n fois la chaleur correspondante au travail dépensé :

$$\mathrm{A}p\,dv,$$

nous devrons poser

$$t\,\frac{\partial p}{\partial t} = np,$$

$$\frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{n}{t},$$

$$Lp = n\,Lt + L\varphi(v),$$

en désignant par $L\varphi(v)$ une fonction arbitraire de v seulement. L'équation-typique cherchée est par conséquent :

$$p = t^n\varphi(v).$$

Pour le cas spécial dans lequel, au lieu de la proportionnalité, l'on réclame l'égalité, il vient, en faisant $n = 1$:

$$p = t\varphi(v).$$

On retrouve ainsi l'équation-typique des corps dans lesquels le travail interne est nul (n° **448**, note 1). Il était d'ailleurs facile de prévoir cette coïncidence, attendu que si l'on exige l'égalité entre la chaleur qui correspond au travail externe et la chaleur sensible développée, il ne reste plus rien pour le travail interne.

On peut, d'une manière plus générale, demander que *le rapport entre le travail*

468 — Cette dernière expression $\frac{dq}{dv}$, si l'on prend pour variables indépendantes t et v, formera évidemment le coefficient de dv dans l'expression générale de dQ; la quantité indéfinie Q se réduisant à q pour $t = \text{const.}$, ou $dt = 0$. D'autre part, le coefficient de dt sera précisément la chaleur spécifique à volume constant c. On peut donc écrire d'une manière générale :

$$dQ = cdt + At \frac{\partial p}{\partial t} dv.$$

Il s'ensuit pour l'expression de l'énergie interne (2) :

$$dU = cdt + A\left(t \frac{\partial p}{\partial t} - p\right) dv,$$

et pour l'entropie :

$$ds = \frac{c}{t} dt + A \frac{\partial p}{\partial t} dv.$$

U et s étant des fonctions effectives des variables indépendantes t et v, les coefficients de dt et de dv en sont respectivement les dérivées partielles (ce que nous ne saurions invoquer pour dQ). On peut donc écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c}{t},$$

dépensé pour comprimer un corps et la chaleur développée par la compression soit une fonction linéaire de la température. Il suffit alors de remplacer, dans l'équation différentielle partielle du problème précédent, $\frac{1}{n}$ par $\alpha t + \beta$. Elle devient dans ces nouvelles conditions :

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{t(\alpha t + \beta)} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + \frac{\beta}{\alpha}}\right),$$

et donne par son intégration :

$$p = \left(\frac{t}{t + \frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \psi(v).$$

et, par conséquent [1] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = t\,\frac{\partial s}{\partial t}.$$

De là cette remarque importante, que l'énergie interne et l'entropie ne sont pas des fonctions indépendantes l'une de l'autre, et ne sauraient dès lors être choisies par la pensée tout à fait arbitrairement.

469 — *Abaissement du point de fusion de la glace par la pression.* — La formule (122) permet de mettre en évidence d'une manière très simple l'une des vérifications expérimentales les plus remarquables que l'expérience ait fournies pour les théories de la thermodynamique [2], à savoir la constatation directe de l'assertion, hardiment mise en avant au nom du calcul par M. James Thomson en 1851 [3], de la possibilité d'abaisser la température de fusion de la glace par une augmentation de pression, avec l'évaluation *a priori* de l'importance numérique de cette influence.

Le phénomène de la fusion de la glace est, en effet, caractérisé par la constance absolue de la température pendant toute sa durée. La relation (122) lui est donc applicable. Nous pouvons la prendre sous la forme :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{E}{t}\,\frac{\partial q}{\partial v},$$

en affectant à p, dans la circonstance actuelle, la notation des dérivées absolues, puisque cette quantité est, pour le phénomène en question, une fonction de la seule variable t.

(1) Il faut bien se garder de considérer cette formule comme contradictoire avec l'équation (106), comme on pourrait être tenté de le penser, si l'on oubliait dans quelles conditions sont écrites chacune de ces égalités. Elles se rapportent en effet à des systèmes différents de variables indépendantes, et les symboles de dérivées partielles, bien que figurés par une notation identique, y représentent en réalité des expressions complètement distinctes.

(2) William Thomson (*Philosophical Magazine*, 1850, 3e série, t. XXXVII, p. 123 4e, XIX, 391. — *Annales de chimie et de physique*, 1852, t. XXXV, p. 381).

(3) James Thomson (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XVI, p. 575 — *Annales de chimie et de physique*, 1852, t. XXXV, p. 376). — Clausius. *Annales de Poggendorf*, t. LXXXI, p. 168.

On voit par là que $\frac{dp}{dt}$ est de même signe que $\frac{\partial q}{\partial v}$. Or l'eau est plus dense que la glace, qui surnage à sa surface (¹). L'accroissement ∂v est par suite négatif, pour une addition positive de chaleur ∂q qui détermine la fusion d'un poids correspondant. La dérivée $\frac{dp}{dt}$ est elle-même négative, ce qui montre que p diminue quand t augmente. Si donc on accroît au contraire la pression, la température s'abaissera de son côté.

470 — Pour apprécier l'importance numérique de l'effet produit, remarquons qu'un kilogramme d'eau liquide occupe le volume $0^{m3},001$; et le même poids de glace : 0,001087. La diminution de volume due à la fusion est donc, pour l'unité de poids : 0,000087; et pour un poids élémentaire α :

$$\partial v = -\ 0,000087\,\alpha.$$

D'un autre côté, la fusion d'un kilogramme de glace exige 79 calories. Il faudra dès lors pour le poids en question :

$$\partial q = 79\,\alpha;$$

d'où :

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\frac{79}{0,000087},$$

et, d'après la formule ci-dessus :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{424}{273}\cdot\frac{79}{0,000087}.$$

(¹) Des conclusions inverses devront donc être formulées à l'égard de la très grande majorité des corps. Pour eux, en augmentant la pression, on élève la température de fusion. Des expériences ont été faites dans ce sens par Bunsen sur le blanc de baleine et la paraffine (*Annales de Poggendorf*, t. LXXXI, p. 562. — *Annales de chimie et de physique*, 3ᵉ série, t. XXXV, p. 383). Hopkins en a exécuté de son côté sur le blanc de baleine, la cire, le soufre et la stéarine, en portant la pression jusqu'à 800 atmosphères (*Report of the British Association*, 1854, t. II, p. 57). — *Silliman's Journal*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 140.

La dérivée inverse, qui est l'inverse de la dérivée, aura par conséquent pour valeur :

$$\frac{dt}{dp} = -\ 0{,}000\,000\,7.$$

On aura proportionnellement pour l'accroissement fini de température Δt qui correspond à une augmentation de tension d'une atmosphère, à savoir : $\Delta p = 10336$:

$$\Delta t = -\ 0{,}0000007\ .\ 10336 = -\ 0{,}0072331.$$

M. Mousson, au moyen de pressions énormes, qu'il évaluait à 15 000 atmosphères [1], a réussi à abaisser jusqu'à — 18^{D} la température de fusion. On sait quel rôle essentiel cette circonstance joue dans le phénomène de la marche des glaciers. Sous les pressions considérables que supporte leur base, la glace peut fondre malgré le froid, ce qui diminue considérablement le frottement [2]. De même, dans les contournements et les étranglements, l'excès de pression détermine une fusion qui est suivie de *regel* au moment où la détente s'est opérée. De là une sorte de plasticité du glacier [3].

§ 4

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE QUELCONQUE

471 — *Vitesse.* — La formule qui a été établie ci-dessus (29) pour l'écoulement d'un gaz parfait, est complètement générale et convient à un fluide quelconque.

Si nous nous reportons en effet aux raisonnements qui ont permis

(1) Mousson (*Annales de Poggendorf*, t. CV, p. 161. — *Annales de chimie et de physique*, 3 série, t. LVI, p. 252).

(2) Haton de la Goupillière. *Revue des Cours scientifiques*, 18 mai 1867, p. 385.

(3) Bertin a montré que la glace naturelle est formée de cristaux orientés naturellement, et présentant des apparences de polarisation colorée, tandis que la glace qui a subi les effets de la compression et du regel renferme une cristallisation confuse, et se comporte, vis-à-vis de la lumière, comme un bloc de verre.

de l'établir (n° 286), on se rappellera qu'ils conduisent en définitive à écrire, *pour l'unité de poids*, l'équation des forces vives. Attachons-nous donc à le faire dans ces nouvelles conditions, en n'omettant aucune des formes de l'énergie, et rétablissant notamment le travail des forces intérieures, qui disparaissait dans le premier cas.

La différence entre ces deux modes de démonstration est du reste plus apparente que réelle, car nous ne pouvons, lorsque le travail interne n'est pas nul, que le réunir avec la chaleur sensible dans un même symbole U, sous le nom d'énergie interne; et il suffirait, pour rentrer ici dans le cas des gaz parfaits, de sous-entendre par la pensée que U est réduit à ne plus exprimer que la chaleur sensible. C'est donc simplement une manière un peu différente dans la forme, mais nécessairement équivalente au fond, de présenter l'établissement de l'équation des forces vives. Mais ce nouveau mode d'énumération est souvent utile dans les applications, où il fournit un guide très sûr pour éviter toute confusion, tout oubli, tout double emploi, au milieu des diverses sortes d'énergie, dont on dresse ainsi une sorte de comptabilité.

472 — Avant sa sortie du réservoir, l'unité de poids du fluide possède l'énergie interne U_1. Son énergie sensible, c'est-à-dire sa force vive, est d'ailleurs nulle. L'énergie totale initiale se réduit ainsi à U_1.

Une fois rejetée au dehors, cette masse possède comme énergie interne U_2, et comme énergie sensible $A\frac{u^2}{2g}$ (exprimée, ainsi que U, en calories). On a donc, à ce moment, pour l'énergie totale :

$$U_2 + A\frac{u^2}{2g}.$$

L'accroissement devient d'après cela :

$$\left(U_2 + A\frac{u^2}{2g}\right) - U_1,$$

et cette quantité devra être égale d'autre part au résultat de la

balance à établir entre les diverses acquisitions ou dépenses d'énergie par rapport aux objets extérieurs.

En fait d'énergie calorifique, nous supposerons que le résultat des échanges effectués, quel qu'en soit le mode, se résume en une quantité de chaleur Q reçue de l'extérieur. S'il s'agissait au contraire d'une perte, la même notation subsisterait encore; seulement elle représenterait alors une valeur négative.

En second lieu, le fluide reçoit à l'arrière un travail impulsif dont nous avons trouvé ci-dessus (n° 286) l'expression p_1v_1. Nous inscrirons donc, de ce chef, un nombre de calories Ap_1v_1. Il exerce d'ailleurs sur le milieu extérieur un travail de pénétration tout semblable, qui figurera avec un signe contraire. On a par suite comme total :

$$Q + Ap_1v_1 - Ap_2v_2.$$

Quant au travail développé par le frottement le long de la paroi solide, il n'est pas entièrement perdu; car, si l'on peut concevoir qu'une certaine portion de cette énergie s'exerce sous forme de travail mécanique en usant le métal, la plus grande partie se transformera en chaleur. De cette dernière, une fraction sera communiquée au fluide, et nous la considérerons (sans pouvoir à la vérité la chiffrer avec précision) comme renfermée dans le total Q; l'autre s'écoulera du métal dans les objets extérieurs, et nous nous bornerons à la négliger purement et simplement, en raison de sa faible valeur par rapport aux influences principales mises en jeu.

L'équation des forces vives se trouve ainsi posée sous la forme :

$$U_2 - U_1 + A\frac{u^2}{2g} = Q + A(p_1v_1 - p_2v_2).$$

Nous la combinerons algébriquement avec les deux identités suivantes.

En premier lieu, le calorique Q communiqué au fluide s'y décompose comme toujours en une somme de trois termes. Les deux premiers restent confondus ensemble dans l'accroissement $U_2 - U_1$

de l'énergie interne. Le troisième comprend la chaleur équivalente au travail externe, qui a pour expression générale $\int_{v_1}^{v_2} pdv$. On peut donc écrire identiquement :

$$Q = U_2 - U_1 + A\int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

On a enfin, en intégrant par parties :

$$\int_{v_1}^{v_2} pdv = p_2v_2 - p_1v_1 - \int_{p_1}^{p_2} vdp.$$

Si maintenant nous ajoutons ces trois égalités membre à membre, après avoir multiplié la dernière par A, il vient, en effectuant toutes les réductions, et changeant à la fois le signe de la dernière intégrale et l'ordre de ses limites :

$$\frac{u^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} vdp,$$

ainsi qu'il fallait le démontrer.

Pour appliquer cette formule, il suffira de connaître dans chaque cas l'expression du travail $\int_{v_1}^{v_2} pdv$ de la détente du corps. On pourra se reporter à cet égard aux divers cas que nous avons abordés dans le paragraphe précédent.

473 — *Refroidissement.* — L'écoulement sera ordinairement accompagné d'une variation de température, même après que le fluide sera rentré dans le repos, en convertissant de nouveau en chaleur la force vive momentanément acquise par lui.

Pour l'évaluer, je ferai observer que le corps ayant reçu le travail externe p_1v_1, et dépensé d'autre part p_2v_2, la variation correspondante de chaleur A $(p_1v_1 - p_2v_2)$ a déterminé un accroissement correspondant d'énergie interne $U_2 - U_1$, si nous supposons, pour fixer les idées sur ce cas spécial, que rien n'a été cédé aux objets extérieurs. Il suit de l'égalité de ces deux quantités :

$$U_1 + Ap_1v_1 = U_2 + Ap_2v_2$$

En d'autres termes, la fonction $U + Apv$, c'est-à-dire V (100), a conservé la même valeur.

Nous écrirons d'après cela :

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial p} dp = 0,$$

ou, d'après (112) et (109) :

$$C dt - A t^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{t}\right) dp = 0;$$

c'est-à-dire enfin :

$$dt = \frac{At^2}{C} \frac{\partial\left(\frac{v}{t}\right)}{\partial t} dp.$$

474 — Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un gaz parfait. Nous commencerons par mettre cette relation sous la forme :

$$dt = \frac{At^2}{Cp} \frac{\partial\left(\frac{pv}{t}\right)}{\partial t} dp,$$

en faisant remarquer que cette transformation est permise, puisque p joue le rôle de constante dans la différenciation partielle relative à t. Mais $\frac{pv}{t}$ étant lui-même une constante absolue d'après l'équation-typique, il vient identiquement :

$$dt = 0.$$

Le transvasement s'opère donc alors sans refroidissement dans les conditions de l'hypothèse; mais il en serait tout autrement pour un cas quelconque.

CHAPITRE XXIX

VAPORISATION

—

§ 1

FORMULES DE REGNAULT

475 — *Tension.* — On appelle *vapeurs saturées* des fluides aériformes, que l'on saisit pour ainsi dire à l'état naissant, immédiatement contigu à celui de liquide, dans lequel les feraient rentrer en partie la moindre compression ou le moindre refroidissement. Cette manière d'être constitue, pour la matière, la limite opposée à celle de *gaz parfait*; et, entre ces deux états extrêmes, se développe toute une série de modes intermédiaires, dont les plus inférieurs portent le nom de *vapeurs surchauffées*, et les plus élevés celui de *gaz naturels.*

On remarquera d'ailleurs entre ces deux états-limites une différence importante. Celui de gaz parfait ne constitue en effet qu'une conception abstraite, en quelque sorte asymptotique, dont les gaz les plus incoercibles nous offrent seuls, dans la nature, une représentation satisfaisante, sinon entièrement rigoureuse. Rien n'est plus aisé, au contraire, que de réaliser physiquement une vapeur saturée. Il suffit pour cela de la maintenir au contact de son liquide.

La théorie des vapeurs saturées fournit l'exemple le plus remarquable de l'application de la thermodynamique générale, dont elle

découle comme un cas particulier. Nous avons expliqué déjà (n° 258) qu'une telle application suppose connus, d'après l'observation directe, certains résultats primordiaux qui constituent en quelque sorte la définition analytique du corps dont on entreprend l'étude: à savoir son équation-typique et les lois de sa chaleur spécifique. Il nous suffira, sous ce rapport, de puiser dans l'admirable collection des documents élaborés par Regnault (1).

476 — La force élastique d'une vapeur saturée placée en présence de son liquide est indépendante du volume. Elle est fonction de la température seule (2). Suivant que, pour une pression et une température déterminées, on offre géométriquement un plus ou moins grand espace à l'expansion d'un kilogramme de la substance considérée, on en voit des quantités variables abandonner l'état liquide ou y rentrer; le volume total restant ainsi arbitraire entre deux limites extrêmes qui sont, d'une part, celui du liquide lui-même, si le kilogramme arrive à reprendre en entier cette forme, et, de l'autre, le point précis de la disparition du liquide, à partir duquel, pour une nouvelle augmentation de volume, si faible qu'elle fût, les conditions se modifieraient progressivement en sortant de la question actuelle, et passant de l'état de vapeur saturée à une constitution plus ou moins surchauffée.

Si nous représentons avec Regnault par F la *force élastique*

(1) Regnault. Relation des expériences pour déterminer les données numériques relatives aux machines à vapeur. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1847 et 1862 — Coste. Mémoire sur la relation entre la température de la vapeur et sa tension *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLIII, p. 90. — Pouillet. Mémoire sur la théorie des fluides élastiques et sur la chaleur latente des vapeurs. *Ibidem*, t. XXIV — Cahours. Recherches sur les densités de vapeur. *Ibidem*, t. XIX, p. 761; XX, 51: XXI, 625. — J. Bertrand. *Thermodynamique*, p. 158 et suivantes. — Bruckner. Sur une formule pour calculer l'élasticité de la vapeur d'eau. *Bulletin de l'Académie des sciences de Bruxelles*, t. XVII, p. 347.

Rankine. On practical tables of the pressure of vapours. *Athenæum*, 1855, p. 1099. — Curr. On the temperature of steam and its corresponding pressure. *Proceedings of the Royal Society*, t. V, p. 941. — Fairbairn. Ueber die expansive Wirkung des Dampfes. *Dingler's Journal*, t. CXV, p. 1. — Holtzmann (*Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe*, 1845, Mannheim. — *Annales de Poggendorf*, t. LXXII).

(2) La surface représentative de cette loi (n° 261, note) est donc un cylindre dont les génératrices se disposent parallèlement à l'axe des volumes, et dont la base va être définie plus loin (éq. 123).

exprimée en millimètres de mercure, on peut la relier à la température usuelle θ au moyen de la formule suivante :

$$\operatorname{Log} F = a - b\alpha^{\theta},$$

dans laquelle a, b, α désignent des constantes spécifiques pour chaque corps. Regnault, en adoptant une forme analytique recommandée par Biot, a même adjoint à l'expression précédente une seconde exponentielle $c\beta^{\theta}$. Mais il fait lui-même remarquer, en ce qui concerne l'eau, dont l'importance pratique prime complètement celle de toutes les autres substances, que la valeur de ce terme reste toujours extrêmement faible, et n'exerce d'influence sensible que dans les températures les plus basses.

On a également mis en avant d'autres formules empiriques [1] ; mais, dans la pratique courante, on se sert à peu près exclusivement des tables numériques et des tracés graphiques qui résultent des expériences de Regnault [2].

[1] *Annales de Poggendorf*, t. XVIII. — Repertorium Dove, t. I. — Bertrand. *Thermodynamique*. — Antoine. Tensions des vapeurs. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. CVII, p. 681, 778, 836. — On possède à cet égard des tableaux d'expériences de Regnault, Faraday, Cailletet, Sojetchewski, etc.

[2] Des vues théoriques ont permis à M. Kirchhof d'établir que la courbe représentative de la loi réelle des tensions de la vapeur d'eau doit présenter un *jarret*, ou *point anguleux*, au moment de la solidification de l'eau, pour lequel on passe des tensions de vapeur du liquide à celles de la glace.

Si l'on envisage en effet par la pensée un kilogramme de ce dernier corps, on peut concevoir deux manières différentes de le convertir en vapeur saturée à la température zéro du thermomètre usuel : ou bien évaporer la glace à l'état solide, ou commencer par la fondre et ensuite volatiliser l'eau ainsi obtenue, sans quitter la température zéro. Dans les deux cas, la quantité de chaleur à fournir pour le travail externe sera la même, car la pression reste constante dans l'expression pdv, et les limites de l'intégration n'ont pas changé. Quant à la variation de chaleur interne, elle ne dépend jamais que des états extrêmes. Le total de la chaleur à fournir est donc le même dans les deux modes.

Or la fusion d'un kilogramme de glace exige 79 calories. Celle d'un poids ∂m demandera donc $79\,\partial m$; et par suite, si l'on représente par ∂q_1 la chaleur nécessaire pour volatiliser directement cette glace, et par ∂q_2 celle que l'on devrait fournir pour évaporer le même poids de liquide, on aura :

$$\partial q_1 = \partial q_2 + 79\,\partial m.$$

L'une et l'autre de ces deux quantités se calculeront par la formule (122), puisque ces deux transformations s'effectuent à température rigoureusement constante. Nous

La valeur de F est croissante avec θ, attendu que la constante *a*

mettrons, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (n° 469), cette relation sous la forme·

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_1 = \frac{E}{t}\frac{\partial q_1}{\partial v},$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_2 = \frac{E}{t}\frac{\partial q_2}{\partial v}.$$

Le volume ∂v peut, avec une très grande approximation, être considéré comme le même dans les deux équations, à cause de l'énorme disproportion qui existe entre le volume de la vapeur d'eau à zéro et celui du liquide. Il vient donc en substituant dans l'égalité précédente :

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dp}{dt}\right)_2 = \frac{70\,E}{t}\cdot\frac{\partial m}{\partial v}.$$

Le rapport $\frac{\partial m}{\partial v}$ du poids de l'eau en kilogrammes au volume de sa vapeur à zéro en mètres cubes sous la pression de saturation $0^m,0046$ a pour valeur $\frac{1}{205}$, en admettant la loi de Mariotte, ou $\frac{1}{212}$, si l'on a recours à l'interpolation de la série des tensions de vapeur de Regnault. Si nous employons la moyenne arithmétique 0,00485 de ces deux valeurs, il viendra :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dp}{dt}\right)_2 = 0{,}00485\cdot\frac{79{,}424}{273} = 0{,}5956,$$

ou environ $\frac{3}{5}$.

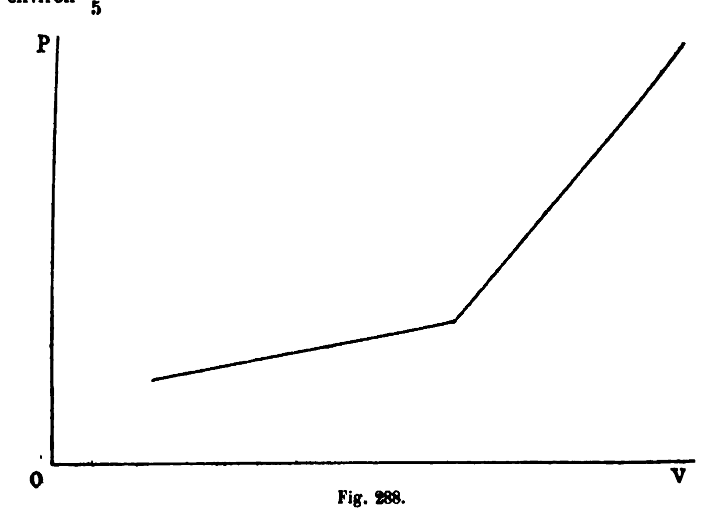


Fig. 288.

Les deux coefficients angulaires de la courbe représentative des pressions diffèrent donc notablement, comme on le voit, au point qui correspond à la solidification de l'eau.

M. Lechatelier a constaté expérimentalement une circonstance semblable sur

possède, dans le terme négatif, une valeur inférieure à l'unité. On peut même ajouter que cette fonction s'accroît avec une très grande rapidité, car la tension F, si on la dégageait de l'équation précédente, serait représentée par une exponentielle *à deux étages* (¹).

La pression p exprimée en kilogrammes par mètre carré, suivant notre usage invariable, se rattache à la valeur de F par la proportion :

$$\frac{p}{F} = \frac{10336}{760}.$$

On en déduit :

$$\text{Log}\, p = \text{Log}\, F + \text{Log}\, 10336 - \text{Log}\, 760,$$

et, en effectuant :

$$\text{Log}\, p = 1{,}1335389 + a - b\alpha^{t-273}.$$

Telle est l'équation-typique des vapeurs saturées. Il ne reste plus qu'à posséder, pour chacune d'elles, les valeurs spéciales de ses paramètres constants. Les expériences de Regnault les ont fait connaître pour vingt-huit substances, qui sont renfermées dans le tableau suivant (²).

l'hydrate de chlore (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 15 décembre 1884). On n'observe pas, au moment de la fusion, de changement brusque de pression ; ce qui indique que le changement d'état n'amène pas de modification appréciable des tensions de dissociation, pas plus que cela n'avait lieu dans le cas précédent pour les pressions de vapeur. Il altère seulement la loi de variation prochaine de ces tensions ; et l'on voit très nettement sur la courbe représentative (fig. 288) l'existence de deux arcs distincts relatifs aux deux états solide et liquide, et se coupant sous un angle vif sans raccordement.

(¹) On ne saurait trop insister dès le début sur cette différence capitale qui sépare les vapeurs saturées des gaz parfaits, pour lesquels la pression varie (à volume constant) proportionnellement à la température absolue (éq. 10).

(²) Ce tableau a été dressé par Combes (*Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*, p. 92) à l'aide de celui qui se trouve renfermé à la page 654 de la *Relation des Expériences* de Regnault, dont il a uniformisé certaines indications. Nous avons ici transposé les divers corps suivant l'ordre de leur volatilité, qui est marquée par la dernière colonne.

SUBSTANCES	CONSTANTES DE L'ÉQUATION-TYPIQUE			LIMITES DE TEMPÉRATURE des expériences		TEMPÉRATURES D'ÉBULLITION sous la pression de 760 millimètres de mercure
	a	Log b	Log α	INFÉRIEURE	SUPÉRIEURE	
Protoxyde d'azote	9,242 020 6	0,681 597 4	$\bar{1}$,999 145 1	— 26	40	— 87,00
Acide carbonique	6,173 795 6	0,241 203 3	$\bar{1}$,997 100 5	— 26	42	— 78,20
Acide sulfhydrique	5,667 229 6	0,242 854 9	$\bar{1}$,996 898 9	— 28	68	— 61,80
Ammoniaque	5,716 487 9	0,346 239 2	$\bar{1}$,996 781 2	— 22	82	— 38,50
Éther méthylchlorhydrique	5,488 460 0	0,344 739 8	$\bar{1}$,996 975 0	— 30	30	— 23,73
Éther méthylique	5,203 254 3	0,285 404 7	$\bar{1}$,996 586 1	— 20	32	— 23,65
Acide sulfureux	5,280 225 0	0,345 756 3	$\bar{1}$,996 517 2	— 28	62	— 10,08
Éther chlorhydrique	5,070 837 7	8,383 083 2	$\bar{1}$,996 711 7	— 32	92	12,50
Chlorure de cyanogène	4,672 340 7	0,315 069 2	$\bar{1}$,995 402 3	— 30	70	12,66
Chlorure de bore	4,849 944 9	0,355 465 1	$\bar{1}$,996 644 0	— 27	81	18,23
Éther sulfurique	5,178 377 7	0,464 773 1	$\bar{1}$,997 050 3	— 20	120	34,97
Éther bromhydrique	5,062 417 5	0,457 533 0	$\bar{1}$,996 952 3	— 24	136	38,37
Sulfure de carbone	5,033 015 7	0,468 020 7	$\bar{1}$,997 096 0	— 20	140	46,20
Acétone	5,151 693 6	0,519 148 9	$\bar{1}$,997 121 0	+ 22	138	56,30

SUBSTANCES	CONSTANTES DE L'ÉQUATION-TYPIQUE			LIMITES DE TEMPÉRATURE des expériences		TEMPÉRATURES D'ÉBULLITION sous la pression de 760 millimètres de mercure
	a	Log b	Log α	INFÉRIEURE	SUPÉRIEURE	
Chlorure de silicium.	4,595 942 5	0,431 959 9	$\bar{1}$,996 526 0	— 26	62	56,81
Chloroforme	5,085 895 9	0,516 750 2	$\bar{1}$,997 135 9	+ 20	164	60,16
Esprit de bois.	5,321 489 7	0,592 549 5	$\bar{1}$,996 928 8	— 14	142	66,78
Éther iodhydrique.	4,580 024 7	0,470 890 5	$\bar{1}$,996 684 6	+ 8	150	70,00
Chlorure phosphoreux	4,747 910 8	0,500 834 0	$\bar{1}$,996 889 5	0	68	73,80
Chlorure de carbone.	4,919 354 2	0,535 389 6	$\bar{1}$,997 060 2	— 20	188	76,50
Alcool	5,543 197 5	0,644 698 3	$\bar{1}$,997 202 1	— 20	150	78,26
Benzine	4,676 668 4	0,527 708 3	$\bar{1}$,996 567 6	— 24	164	80,36
Eau	5,423 317 7	0,682 154 7	$\bar{1}$,997 231 1	— 20	220	100,00
Hydrocarbure de brome	5,578 475 0	0,680 348 7	$\bar{1}$,998 134 4	— 28	224	131,60
Essence de térébenthine	6,173 636 9	0,767 724 6	$\bar{1}$,998 429 6	0	160	159,15
Éther méthyloxalique	5,079 401 9	0,756 069 3	$\bar{1}$,997 460 6	+110	250	164,20
Mercure	6,061 795 4	0,889 904 6	$\bar{1}$,998 924 9	0	512	357,25
Soufre.	5,154 503 1	0,438 474 5	$\bar{1}$,998 668 4	0	553	490,00

On peut également mettre l'équation-typique des vapeurs saturées sous cette forme plus simple, en fonction de la température absolue :

$$(123) \qquad \operatorname{Log} p = \mathrm{A} - \mathrm{B}\alpha^t,$$

en posant pour abréger :

$$\mathrm{A} = a + 1{,}1335389; \qquad \mathrm{B} = \frac{b}{\alpha^{273}}.$$

On aurait par exemple pour la vapeur d'eau, d'après les valeurs de a et b qui sont inscrites dans le tableau précédent [1] :

$$\mathrm{A} = 6{,}5568566; \qquad \operatorname{Log} \mathrm{B} = \bar{1}{,}9262450.$$

477 — *Quantités de chaleur.* — En ce qui concerne l'influence des quantités de chaleur communiquées à la substance considérée, Regnault désigne en premier lieu par λ le total nécessaire pour porter un kilogramme du liquide depuis le zéro du thermomètre usuel jusqu'à la température θ, et pour l'y convertir entièrement en vapeur saturée, en maintenant constamment la pression définie par l'équation (123). Il indique *pour l'eau* la formule suivante :

$$(124) \qquad \lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,\theta,$$

[1] Si l'on veut employer au contraire la formule à deux exponentielles dont il a été question ci-dessus :

$$\operatorname{Log} p = \mathrm{L} + \mathrm{M}\mu^\theta - \mathrm{N}\nu^\theta,$$

en fonction de la température *usuelle*, il conviendra d'adopter pour les constantes, au lieu des nombres donnés par Regnault, les valeurs plus exactes qui ont été déduites de ses expériences par Moritz (*Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XIII, p. 41) en employant, pour les calculs, des tables de logarithmes d'un plus grand nombre de décimales :

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= 4{,}7393707 \\ \operatorname{Log} \mathrm{M} &= \bar{2}{,}1319907112 \\ \operatorname{Log} \mathrm{N} &= 0{,}6117407675 \\ \operatorname{Log} \mu &= 0{,}006864937152 \\ \operatorname{Log} \nu &= \bar{1}{,}9967255536856. \end{aligned}$$

ou, en fonction de la température absolue :

$$\lambda = 523,24 + 0,305\,t.$$

Distinguant ensuite dans ce total ce qui est relatif à chacune des deux opérations précédentes, il appelle μ la quantité de chaleur nécessaire pour porter le liquide de zéro à θ, en maintenant constamment la pression égale à la tension maximum de la vapeur pour la température correspondante. On a en particulier *pour l'eau :*

$$(125) \qquad \mu = \theta + 0,00002\,\theta^2 + 0,0000003\,\theta^3,$$

ou, sous une forme mnémonique très commode :

$$\mu = \theta + 0,2\left(\frac{\theta}{100}\right)^2 + 0,3\left(\frac{\theta}{100}\right)^3.$$

On peut écrire encore, en fonction de la température absolue :

$$\mu = -277,61 + 1,0562\,t - 0,0002257\,t^2 + 0,0000003\,t^3.$$

Nous obtenons dès lors par différence la valeur r du calorique nécessaire pour l'acte proprement dit de la volatilisation :

$$r = \lambda - \mu,$$

c'est-à-dire *pour l'eau* :

$$(126) \quad r = 606,5 - 0,695\,\theta - 0,00002\,\theta^2 - 0,0000003\,\theta^3,$$

ou, en fonction de la température absolue :

$$r = 800,85 - 0,7512\,t + 0,0002257\,t^2 - 0,0000003\,t^3.$$

En comparaison de l'énorme expansion que subit le corps dans cette dernière métamorphose, la dilatation préalable du liquide

reste absolument minime (¹). On est par suite dans l'habitude de la négliger, et de faire abstraction de son influence dans l'énumération des travaux correspondants. Nous accepterons donc, dans les questions relatives aux vapeurs, la convention qui attribue une constance absolue à la densité ou au volume spécifique du liquide.

Le tableau suivant (²) présente les valeurs des trois fonctions qui précèdent, pour une série graduée de pressions et de températures. On y a joint dès à présent les volumes et les poids spécifiques déduits de formules qui seront bientôt établies à cet égard (éq. 128).

(¹) On trouve, à cet égard, des nombres gradués et très précis dans les mémoires de M. Kopp (*Annales de Poggendorf*, t. LXXII), de M. Rosetti sur le maximum de densité et la dilatation de l'eau (*Annales de chimie et de physique*, 4ᵉ série, t. X, p. 461; t. XVII, p. 370); et, pour les températures supérieures, dans le mémoire de M. G. A. Hirn (*ibidem*, 4ᵉ série, t. XI et XVII), de M. Drion (*ibidem*, 3ᵉ série, t. LVI), et M. D'Andréeff (*ibidem*, t. LVI).

Le volume d'un litre à 4°,5 devient à zéro : 1,00013. Il est de 1,01195 à 50°; 1,0431 à 100°; 1,0903 à 150°; 1,1544 à 200°.

(²) Dressé d'après les tables de MM. Hirsch et Debize (*Leçons sur les machines à vapeur*, t. I, p. 142).

PRESSION ABSOLUE	TEMPÉRATURE USUELLE	CHALEUR TOTALE	CHALEUR DU LIQUIDE	CHALEUR DE VAPORISᶜᵉ	POIDS SPÉCIFIQUE	VOLUME SPÉCIFIQUE
p	θ	λ	μ	r	ϖ	v
kilogr. par centimèt. q.	degrés centigrades	Calories	Calories	Calories	kilogr.	mèt. cubes
0,01	6,72	608,54	6,72	601,82	0,0075	134,100
0,02	17,31	611,78	17,32	594,46	0,0145	68,960
0,03	23,91	613,79	23,93	589,86	0,0213	46,770
0,04	28,79	615,28	28,81	586,47	0,0281	35,570
0,05	32,69	616,47	32,72	583,75	0,0347	28,770
0,06	35,97	617,47	36,01	581,46	0,0413	24,190
0,07	38,80	618,33	38,85	579,48	0,0478	20,880
0,08	41,30	619,09	41,36	577,73	0,0543	18,400
0,09	43,53	619,77	43,60	576,17	0,0607	16,470
0,10	45,57	620,40	45,66	574,76	0,0671	14,900
0,15	53,70	622,88	53,80	569,08	0,0985	10,150
0,20	59,75	624,72	59,89	564,83	0,1292	7,740
0,25	64,63	626,21	64,79	561,42	0,1594	6,272
0,30	68,74	627,47	68,93	558,54	0,1893	5,282
0,35	72,30	628,55	72,52	556,03	0,2188	4,569
0,40	75,46	629,52	75,72	553,80	0,2481	4,030
0,45	78,30	630,38	78,57	551,81	0,2771	3,609
0,50	80,89	631,17	81,18	549,99	0,3059	3,270
0,55	83,27	631,90	83,58	548,32	0,3347	2,988
0,60	85,48	632,57	85,81	546,76	0,3632	2,735
0,65	87,53	633,19	87,88	545,31	0,3917	2,553
0,70	89,86	633,79	89,83	543,94	0,4202	2,380
0,75	91,28	634,34	91,67	542,67	0,4484	2,230
0,80	93,00	634,87	93,41	541,46	0,4762	2,100
0,85	94,63	635,36	95,06	540,30	0,5040	1,984
0,90	96,18	635,83	96,63	539,20	0,5316	1,881
0,95	97,66	636,29	98,13	538,16	0,5593	1,788
1,00	99,08	636,72	99,56	537,16	0,5868	1,704
1,50	110,76	640,28	111,41	528,87	0,8609	1,160
2,00	119,56	642,97	120,35	522,62	1,1280	0,886

PRESSION ABSOLUE	TEMPÉRATURE USUELLE	CHALEUR TOTALE	CHALEUR DU LIQUIDE	CHALEUR DE VAPORISON	POIDS SPÉCIFIQUE	VOLUME SPÉCIFIQUE
p	θ	λ	μ	r	ϖ	v
kilogr. par centimèt. q.	degrés centigrades	Calories	Calories	Calories	kilogr.	mèt. cubes
2,50	126,72	645,15	127,64	517,51	1,3910	0,719
3,00	132,79	647,00	133,84	513,16	1,6510	0,606
3,50	138,10	648,62	139,26	509,36	1,9080	0,524
4,00	142,82	650,06	144,10	505,96	2,1630	0,462
4,50	147,09	651,36	148,47	502,89	2,4150	0,414
5,00	150,99	652,55	152,47	500,08	2,6670	0,375
5,50	154,59	653,65	156,16	497,49	2,9170	0,343
6,00	157,94	654,67	159,60	495,07	3,1650	0,316
6,50	161,08	655,63	162,85	492,78	3,4120	0,293
7,00	164,03	656,53	165,89	490,64	3,6570	0,273
7,50	166,81	657,38	168,76	488,62	3,9020	0,256
8,00	169,46	658,19	171,49	486,70	4,1450	0,241
8,50	171,97	658,95	174,08	484,87	4,3880	0,228
9,00	174,38	659,69	176,57	483,12	4,6300	0,216
9,50	176,68	660,39	178,95	481,44	4,8710	0,205
10,00	178,89	661,06	181,25	479,81	5,1110	0,196
11,00	183,05	662,33	185,56	476,77	5,5900	0,179
12,00	186,94	663,52	189,60	473,92	6,0640	0,165
13,00	190,57	664,62	193,38	471,24	6,5380	0,153
14,00	194,00	665,67	196,94	468,73	7,0080	0,143
15,00	197,25	666,66	200,33	466,33	7,4750	0,134
16,00	200,32	667,00	203,53	464,07	7,9410	0,126
17,00	203,26	668,49	206,61	461,88	8,4020	0,119
18,00	206,07	669,35	209,54	459,81	8,8640	0,113
19,00	208,76	670,17	212,36	457,81	9,3260	0,107
20,00	211,34	670,96	215,06	455,90	9,7870	0.102
21,00	213,83	671,72	217,67	454,05	10,2500	0,098
22,00	216,23	672,45	220,19	452,26	10,7000	0,093
23,00	218,55	673,16	222,63	450,53	11,1600	0,090
24,00	220,79	673,84	224,98	448,86	11,6200	0,086
25,00	222,96	674,50	227,27	447,24	12,0700	0,083

478 — Regnault a effectué des recherches analogues pour quelques substances autres que l'eau. J'en résumerai les résultats dans le tableau suivant, en le bornant aux liquides qui présentent quelque intérêt au point de vue des machines à vapeurs combinées (n° 523). Il pose, pour ces divers corps, les formules fondamentales suivantes, en mettant les signes en évidence :

$$\lambda = A + B\theta - C\theta^2,$$
$$r = a - b\theta - c\theta^2,$$

d'où l'on déduit μ en prenant la différence $\lambda - r$. Les valeurs de ces constantes sont les suivantes :

TABLEAU.

SUBSTANCES	$\lambda = A + B\theta - C\theta^2$			$r = a - b\theta - c\theta^2$			LIMITES DE TEMPÉRATURE des expériences au thermomètre usuel	
	A	B	C	a	b	c	INFÉRIEURE	SUPÉRIEURE
Éther.	94,000	0,450 000	0,000 555 560	94,000	0,079 010	0,000 851 400	0	120
Sulfure de carbone. . . .	90,000	0,146 010	0,000 412 300	90,000	0,089 220	0,000 495 800	0	140
Acétone.	140,500	0,366 440	0,000 516 000	140,500	0,139 990	0,000 912 500	0	140
Chloroforme.	67,000	0,137 500	0,000 000 000	67,000	0,094 850	0,000 050 700	0	160
Chlorure de carbone . . .	52,000	0,146 250	0,000 172 000	52,000	0,051 730	0,000 262 600	0	160

§ 2

FORMULES DE ZEUNER

479 — Le fait capital qui domine le phénomène de la vaporisation d'un liquide sous une pression déterminée, est la constance absolue de la température pendant toute la durée de l'opération. L'augmentation de volume ainsi réalisée par le kilogramme de matière que l'on considère, constitue donc essentiellement une détente isotherme. Il y a lieu par suite d'identifier la formule théorique (122) que nous a fournie pour ce phénomène la thermodynamique générale, avec la loi expérimentale (126). Nous substituerons d'après cela, dans la première de ces deux formules, au symbole q, la lettre r, qui représentera en abrégé l'expression parfaitement déterminée (126), dans laquelle θ aurait été remplacé par $t - 273$.

L'équation (122) comporte d'ailleurs, pour le cas actuel, une simplification importante. Elle convient d'une manière générale à toutes les détentes isothermes qui peuvent s'observer dans la nature, tandis que celle à laquelle nous nous bornons en ce moment présente un caractère tout spécial. Nous avons vu en effet (n° 462) que la pression p n'y dépend que de t, et nullement de v. Dès lors la dérivée partielle $\frac{\partial p}{\partial t}$ ne diffère plus d'une dérivée ordinaire $\frac{dp}{dt}$, et nous pouvons écrire, en intégrant à partir du volume liquide w_0 qui correspond à la température de la glace fondante (et qui, pour l'eau, serait égal à 0,001) :

$$r = \mathrm{A}t \int_{w_0}^{v} \frac{dp}{dt}\, dv.$$

Par cela même d'ailleurs que p, et par suite $\frac{dp}{dt}$, ne dépendent que de t, ce dernier coefficient différentiel sort du signe de l'intégration que l'on effectue par rapport à v. L'opération ne porte plus dès lors que sur dv, et donne pour résultat $v - v_0$. On est dans l'usage

de désigner par u cette quantité, qui porte le nom de *volume engendré* par la vaporisation :

$$u = v - w_0.$$

La formule devient dans ces conditions :

$$(127) \qquad r = \mathrm{A}tu\frac{dp}{dt},$$

et l'on en déduit l'équation de Clapeyron :

$$(128) \qquad u = \frac{\mathrm{E}r}{t\frac{dp}{dt}},$$

qui fait connaître le volume engendré u en fonction des expressions connues r et p (126 et 123).

Cette formule a été convertie par M. Zeuner en tables numériques extrêmement importantes ([1]), dont nous extrayons le tableau ci-contre. La neuvième colonne fournit les valeurs de u représentées par l'équation (128).

Cette relation présente un très grand intérêt, car elle permet de calculer *a priori* les densités de vapeur. Un tel résultat, très remarquable en lui-même, procure en outre un moyen de contrôle expérimental pour la théorie précédente ([2]). En effet, on connaît par là

([1]) Ce tableau est conforme à ceux qui ont été donnés par Combes (*Principes de la théorie mécanique de la chaleur*, p. 110), par M. Pochet (*Nouvelle mécanique industrielle*, p. 371), par Callon (*Cours de machines*, t. I, p. 462). Il présente quelques différences par rapport aux tables de M. Zeuner (*Théorie mécanique de la chaleur*, traduction de MM. Arnthal et Cazin, p. 583), et d'autres relativement à la table de la page 777, extraite des *Leçons sur les machines à vapeur* de MM. Hirsch et Debize, t. I, p. 142. Ces auteurs ont indiqué à la page 161 le mode de calcul employé par eux.

([2]) On a pu rapprocher ainsi ces conséquences, qui dérivent en dernière analyse du postulatum de Clausius, avec les résultats des expériences de MM. Tate et Fairbairn (*Proceedings of the Royal Society*, 1860, t. X, p. 469. — *Philosophical Magazine*, 4e série, t. XXI. — *Civil Engineer*, 1860. — *Litteratur und Notizblatt*, t. VI, p. 31. — Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*, traduction de MM. Arnthal et Cazin, p. 281). Cette comparaison a été suivie avec détail par MM. Hirsch et Debize (*Leçons sur les machines à vapeur*, t. I, p. 223) — Dupré. Densité des vapeurs saturées (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LIV, p. 972. — Waterstor. On a general law of density in saturated vapours. *Philosophical Magazine*, 4e série, t. II, p. 565. — Clausius. Sur la densité de la vapeur saturée. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LII, p. 706.

PRESSION			TEMPÉRATURE USUELLE	CHALEUR DU TRAVAIL EXTERNE	CHALEUR INTERNE PAR KILOGRAMME		CHALEUR INTERNE PAR MÈT. CUBE	VOLUME ENGENDRÉ	VOLUME SPÉCIFIQUE	POIDS SPÉCIFIQUE
atmosphères	millim. de mercure	kilogr. par mètre carré	degrés centigrades	Calories	Calories		Calories	mèt. cubes	mèt. cubes	kilogr.
»	F	p	θ	Apu	J	ρ	$\frac{\rho}{u}$	u	v	ϖ
0,1	76	1 033	46,21	35,369	584,16	538,61	37,14	14,503 4	14,504 4	0,069
0,2	152	2 067	60,45	36,679	587,50	527,38	70,09	7,524 6	7,525 6	0,133
0,3	228	3 100	69,49	37,493	589,61	520,26	101,46	5,127 8	5,128 8	0,195
0,4	304	4 133	76,25	38,089	591,20	514,93	131,80	3,906 9	3,907 9	0,256
0,5	380	5 167	81,71	38,562	592,48	510,65	161,37	3,164 4	3,165 4	0,316
0,6	456	6 200	86,32	38,954	593,56	506,99	190,33	2,663 8	2,664 8	0,375
0,7	532	7 234	90,32	39,292	594,49	503,84	218,77	2,303 0	2,304 0	0,434
0,8	608	8 267	93,88	39,589	595,33	501,03	246,77	2,030 4	2,031 4	0,492
0,9	684	9 301	97,08	39,853	596,08	498,51	274,38	1,816 8	1,817 8	0,550
1,0	760	10 334	100,00	40,092	596,76	496,21	301,65	1,645 0	1,646 0	0,607
1,5	1 140	15 501	111,74	41,036	599,51	486,96	433,82	1,122 5	1,123 5	0,890
2,0	1 520	20 668	120,60	41,730	601,58	479,97	560,67	0,856 1	0,857 1	1,167

PRESSION			TEMPÉRATURE USUELLE	CHALEUR DU TRAVAIL EXTERNE	CHALEUR INTERNE PAR KILOGRAMME		CHALEUR INTERNE PAR MÈT. CUBE	VOLUME ENGENDRÉ	VOLUME SPÉCIFIQUE	POIDS SPÉCIFIQUE
atmosphères	millim. de mercure	kilogr. par mètre carré	degrés centigrades	Calories	Calories		Calories	mèt. cubes	mèt. cubes	kilogr.
»	F	p	θ	Apu	J	ρ	$\frac{\rho}{u}$	u	v	ϖ
2,5	1 900	25 835	127,80	42,282	603,27	474,30	683,50	0,693 9	0,694 9	1,439
3,0	2 280	31 002	133,91	42,742	604,70	469,48	803,12	0,584 6	0,585 6	1,708
3,5	2 660	36 169	139,24	43,139	605,95	465,27	920,05	0,505 7	0,506 7	1,973
4,0	3 040	41 336	144,00	43,488	607,06	461,53	1034,63	0,446 1	0,447 1	2,237
4,5	3 420	46 503	148,29	43,800	608,07	458,15	1147,21	0,399 3	0,400 3	2,498
5,0	3 800	51 670	152,22	44,083	608,99	455,05	1257,94	0,361 7	0,362 7	2,757
5,5	4 180	56 837	155,85	44,342	609,84	452,19	1367,00	0,330 8	0,331 8	3,014
6,0	4 560	62 004	159,22	44,580	610,63	449,53	1474,59	0,304 8	0,305 8	3,270
6,5	4 940	67 171	162,37	44,801	611,37	447,05	1580,81	0,282 8	0,284 8	3,523
7,0	5 320	72 338	165,34	45,008	612,06	444,71	1685,70	0,263 8	0,264 8	3,776
7,5	5 700	77 505	168,15	45,203	612,72	442,49	1789,38	0,247 3	0,248 3	4,027
8,0	6 080	82 672	170,81	45,386	613,34	440,40	1891,96	0,232 8	0,233 8	4,277
8,5	6 460	87 830	173,35	45,560	613,94	438,30	1993,44	0,219 9	0,220 9	4,527

PRESSION			TEMPÉRATURE USUELLE	CHALEUR DU TRAVAIL EXTERNE	CHALEUR INTERNE PAR KILOGRAMME		CHALEUR INTERNE PAR MÈT. CUBE	VOLUME ENGENDRÉ	VOLUME SPÉCIFIQUE	POIDS SPÉCIFIQUE
atmosphères	millim. de mercure	kilogr. par mètre carré	degrés centigrades	Calories	Calories		Calories	mèt. cubes	mèt. cubes	kilogr.
»	F	p	θ	Apu	J	ρ	$\frac{\rho}{u}$	u	v	ϖ
9,0	6 840	93 006	175,77	45,725	614,50	436,49	2093,95	0,208 4	0,209 4	4,775
9,5	7 220	98 173	178,08	45,881	615,05	434,67	2193,56	0,198 1	0,199 1	5,023
10,0	7 600	103 340	180,31	46,031	615,57	432,91	2292,16	0,188 9	0,189 9	5,266
10,5	7 980	108 507	182,44	46,174	616,07	431,23	2390,03	0,180 4	0,181 4	5,513
11,0	8 360	113 674	184,50	46,311	616,55	429,61	2487,01	0,172 7	0,173 7	5,757
11,5	8 740	118 841	186,49	46,444	617,01	428,04	2583,18	0,165 7	0,166 7	5,998
12,0	9 120	124 008	188,41	46,571	617,46	426,52	2678,66	0,159 2	0,160 2	6,242
12,5	9 500	129 175	190,27	46,693	617,90	425,06	2773,38	0,153 3	0,154 3	6,481
13,0	9 880	134 342	192,08	46,812	618,32	423,63	2867,32	0,147 7	0,148 7	6,725
13,5	10 260	139 509	193,83	46,926	618,73	422,25	2960,69	0,142 6	0,143 6	6,964
14,0	10 640	144 676	195,53	47,037	619,14	420,91	3053,39	0,137 8	0,138 8	7,205

le volume $u+w$, ou v, qu'occupera le kilogramme complètement volatilisé, et l'on en conclut le poids spécifique (éq. 4) :

$$\varpi = \frac{1}{u+w}.$$

Les valeurs de cet élément composent la onzième colonne du tableau. Elles vont en croissant, tandis que celles de v, qui occupent la colonne précédente, présentent une marche décroissante. Quant au volume propre du liquide w, il augmente, quoique très lentement (n° 477). La différence u va donc en diminuant. En raison de cette marche inverse des deux éléments v et w, il vient un moment où ils arrivent à l'égalité, ce qui donne :

$$u = 0,$$

et par suite :

$$r = 0.$$

Telle est l'équation qui détermine ce que l'on a nommé le *point critique* de la substance considérée ([1]). A cet instant le corps n'est plus, à proprement parler, ni liquide ni gazeux. Toute surface de niveau a disparu ; mais le moindre refroidissement fait réapparaître le ménisque de séparation.

480 — On peut également déduire de l'équation (128) l'évaluation du travail.

On aura, en premier lieu, pour la chaleur dépensée en travail externe :

$$(129) \qquad \mathrm{A}pu = \frac{pr}{t\frac{dp}{dt}}.$$

([1]) Cagniard-Latour a signalé le premier le point critique de l'eau. Il en a estimé la température à 410 degrés du thermomètre usuel. Strauss (*Journal de Physique*, 2e série, t. II, p. 585) a trouvé de son côté 370 degrés et une tension de 195 atmosphères. L'équation $r=0$ donnerait $\theta = 880°$; mais un pareil écart n'a pas lieu de surprendre, attendu que cette résolution constituerait une véritable extrapolation des expériences de Regnault. Ce phénomène a été également l'objet des travaux de MM. Wolf et Drion (*L'Institut*, 1862). C'est Andrews qui a définitivement coordonné et développé les éléments antérieurs de la question (*Mémoire sur la continuité de l'état liquide et de l'état gazeux*, 1863).

Les valeurs de cette expression se trouvent dans la quatrième colonne du tableau.

En ce qui concerne en second lieu l'énergie interne, comprenant la somme de la chaleur sensible et de celle qui correspond au travail interne, on peut l'exprimer de deux manières bien distinctes, suivant que l'on n'y envisage que l'acte même de la volatilisation, ou qu'on y adjoint l'échauffement du liquide, évalué à partir du zéro du thermomètre usuel.

M. Zeuner représente par ρ la première de ces deux quantités. Elle a évidemment pour expression l'excès de la valeur totale r de la chaleur à fournir, sur celle Apu (129) qui est employée à déve lopper le travail externe :

$$\rho = r - Apu,$$

c'est-à-dire :

$$(130) \qquad \rho = Au\left(t\frac{dp}{dt} - p\right),$$

ou, sous une forme plus condensée :

$$\rho = Aut^2\frac{d\left(\frac{p}{t}\right)}{dt}.$$

Les valeurs de cette fonction occupent la septième colonne du tableau. On trouvera en outre dans la huitième les valeurs de cette même chaleur interne rapportées, non plus au poids, mais au volume, ce qui est commode pour certaines applications.

Le même auteur désigne par J l'accroissement total d'énergie intérieure, évalué à partir du zéro du thermomètre usuel. C'est alors, non plus de r, mais du total λ qu'il faut déduire Apu, pour obtenir la portion J afférente à l'énergie interne :

$$J = \lambda - Apu,$$

c'est-à-dire (129) :

$$(131) \qquad J = \lambda - \frac{pr}{t\frac{dp}{dt}}.$$

Les valeurs de J forment la sixième colonne du tableau.

Ces quantités J et ρ relatives à l'énergie interne restent indépendantes de la manière dont l'échauffement a été effectué, tandis que les valeurs de λ et r qui renferment, en outre des précédentes, le travail externe Apu, supposent essentiellement le régime de pression qui a été défini pour ces fonctions (n° 477).

481 — On peut encore déterminer la fonction caractéristique H des vapeurs saturées (n° 460).

Nous remarquerons d'abord que dans la formule (75) :

$$\frac{\partial c}{\partial v} = At \frac{\partial p^2}{\partial t^2},$$

p représente, pour le cas actuel, une fonction de la seule variable t, ce qui donne en intégrant par rapport à v :

$$c = Atv \frac{d^2 p}{dt^2} + \varphi(t),$$

si nous désignons par φ une fonction inconnue de la température seule.

Pour la déterminer, envisageons en particulier le cas-limite où l'importance variable de l'atmosphère gazeuse tend vers zéro, de telle sorte que le kilogramme de matière finisse par se réduire entièrement à l'état liquide, en occupant le volume w_0. Si γ désigne la chaleur spécifique du liquide, la formule deviendra dans ces conditions :

$$\gamma = Atw_0 \frac{d^2 p}{dt^2} + \varphi(t),$$

d'où, en retranchant membre à membre :

$$c = \gamma + (v - w_0) At \frac{d^2 p}{dt^2}.$$

Reprenons maintenant l'équation du n° 457 :

$$dQ = cdt + At \frac{dp}{dt} dv,$$

pour en déduire dU et ds. Nous aurons, en rendant à c sa valeur :

$$dU = \left[\gamma + (v - w_0) A t \frac{d^2p}{dt^2}\right] dt + A \left[t \frac{dp}{dt} - p\right] dv,$$

$$ds = \left[\frac{\gamma}{t} + (v - w_0) A \frac{d^2p}{dt^2}\right] dt + A \frac{dp}{dt} dv.$$

Ces expressions sont toutes les deux des différentielles exactes, comme on en était certain à l'avance. Elles donnent par leur intégration :

$$U = \left[\gamma + (v - w_0) A \frac{dp}{dt}\right] t - Ap(v - w_0),$$

$$s = \gamma Lt + A(v - w_0) \frac{dp}{dt}.$$

Il vient donc finalement pour la fonction caractéristique cherchée (85) :

$$H = \gamma t L\left(\frac{t}{e}\right) + Ap(v - w_0).$$

CHAPITRE XXX

MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE VAPEUR SATURÉE

—

§ 1

EQUATIONS FONDAMENTALES

482 — *Quantité de chaleur.* — Nous consacrerons ce chapitre à l'étude des variations que subit la proportion respective de vapeur et de liquide renfermés dans l'unité de poids, suivant les circonstances calorifiques ou mécaniques que traverse le corps. On peut, si l'on veut, concevoir ces deux parties comme nettement distinctes, et séparées l'une de l'autre par un plan horizontal. C'est l'image la plus simple. Mais il sera cependant plus conforme à la réalité, pour les applications aux machines, de se représenter un mélange plus ou moins intime de vapeur saturée et de particules liquides, entraînées mécaniquement dans une ébullition tumultueuse ([1]), ou précipitées après coup par une condensation partielle opérée dans le sein de la masse gazeuse (n° 486).

Nous désignerons par x la portion du kilogramme considéré qui se trouve réduite en vapeur. Celle qui conserve l'état liquide sera dès lors $1-x$. Lorsque $x=1$, cette dernière partie a complètement disparu, et la vapeur est dite *sèche*. Elle devient plus ou moins

([1]) Leloutre (*Recherches expérimentales et analytiques sur les machines à vapeur. Détermination de l'eau entraînée.* Nancy, 1883. — Note sur quelques méthodes pour déterminer la quantité d'eau entraînée par la vapeur. *Annales industrielles*, 1883, t. II, p. 82).

humide, lorsque x diminue progressivement. Quand cette variable atteint la valeur zéro, toute la matière a repris la forme liquide.

Si l'on communique à cet ensemble une quantité de chaleur dQ, elle va, comme à l'ordinaire, se répartir en deux portions, pour subvenir au travail externe et pour faire varier l'énergie interne.

Le kilogramme liquide occupe initialement un volume w_0. Nous négligerons, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (n° 477), les dilatations que la température détermine sous cette forme spéciale. Si le corps devait entrer tout entier en vapeur, il lui faudrait pour cela s'emparer de l'espace u. Mais comme le poids x s'est seul volatilisé, le volume ne subit que l'accroissement ux. Le kilogramme total occupe donc alors l'étendue $w_0 + ux$. La variation infiniment petite de cette fonction qui sera due à la communication de la quantité de chaleur dQ, se réduit à $d(ux)$. Le travail externe a dès lors pour valeur $pd(ux)$, et la portion de chaleur affectée à sa production :

$$Apd(ux).$$

Considérons en second lieu l'énergie interne U, en la rapportant comme origine au zéro du thermomètre usuel. Pour porter la totalité du kilogramme liquide à la température t, on a dû fournir d'abord la quantité de chaleur μ. Il y faudrait ensuite ajouter ρ (puisque c'est de l'énergie interne seule qu'il s'agit en ce moment) pour subvenir à la volatilisation complète. Mais le poids x s'étant seul gazéifié n'absorbe pour cette opération que ρx, ou, si l'on veut (130) : $x\ (r - Apu)$. Le total a donc pour expression :

$$\text{(132)} \qquad U - U_0 = \mu + rx - Apux,$$

et sa variation élémentaire :

$$dU = d\mu + d(rx) - Ad(pux).$$

Si on la réunit à la première partie, il viendra pour l'ensemble :

$$dQ = d\mu + d(rx) - A\left[d(pux) - pd(ux)\right],$$

ou, en réduisant :

$$dQ = d\mu + d(rx) - Auxdp.$$

Mais on peut transformer cette expression à l'aide de l'équation (127) :

$$Audp = r\frac{dt}{t},$$

en écrivant :

$$dQ = d\mu + d(rx) - rx\frac{dt}{t}, \tag{133}$$

ou enfin, puisque μ est une fonction de la seule variable t :

$$dQ = d(rx) + \left(\frac{d\mu}{dt} - \frac{rx}{t}\right)dt.$$

Telle est la formule fondamentale qui exprime la quantité de chaleur élémentaire, en fonction des deux variables t et rx.

483 — *Entropie.* — Il est facile de constater que cette expression n'est pas une différentielle exacte. En effet, le coefficient de $d(rx)$ ne renferme pas t. Celui de dt ne devrait donc pas contenir rx, tandis que c'est le contraire qui a lieu.

Mais nous connaissons à l'avance (n° 442) le facteur d'intégrabilité qui, pour tous les corps, communique à cette fonction le caractère d'une différentielle exacte. C'est l'inverse $\frac{1}{t}$ de la température absolue. Il vient en effet, en multipliant par ce coefficient (132) :

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dQ}{t} \\ &= \frac{d\mu}{t} + \frac{d(rx)}{t} - rx\frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{d\mu}{t} + d\left(\frac{rx}{t}\right); \end{aligned}$$

et le caractère en question se trouve mis en évidence, attendu que μ ne renferme que la variable t.

On aura, en intégrant entre deux états extrêmes (t_1, r_1, x_1) et (t_2, r_2, x_2) :

$$s = \frac{r_2 x_2}{t_2} - \frac{r_1 x_1}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t}. \tag{134}$$

Il ne reste plus, pour rendre cette formule définitive, qu'à effectuer explicitement l'intégration de $\frac{d\mu}{t}$, ce qui ne présente aucune difficulté, puisque μ est une fonction rationnelle et entière de t. On obtient par là, si l'on exprime le résultat en fonction de la température usuelle θ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t} = 0{,}00000045\,(\theta_2^2 - \theta_1^2) - 0{,}0002057\,(\theta_2 - \theta_1)$$
$$+ 0{,}458688859 \operatorname{Log}\left(\frac{\theta_2 + 273}{\theta_1 + 273}\right),$$

avec un logarithme ordinaire. Nous pourrons donc, tout en conservant dans les calculs ultérieurs, pour abréger l'écriture, ce symbole d'intégrale définie, considérer comme complètement explicite la fonction (134), qui exprime l'entropie d'un mélange de liquide et de vapeur saturée.

§ 2

DÉTENTE ADIABATIQUE DES VAPEURS SATURÉES

484 — La formule (134) permet d'étudier la détente adiabatique de l'association d'un liquide et de sa vapeur saturée. Si nous exprimons pour cela que $dQ = 0$, l'équation (133) nous donnera :

$$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d(rx)}{dt} - \frac{rx}{t} = 0.$$

Or $\frac{d\mu}{dt}$, ou $\frac{d\mu}{d\theta}$, représentent la chaleur spécifique à pression constante C (n° 463). Il vient dès lors en effectuant :

$$r\frac{dx}{dt} = \left(\frac{r}{t} - \frac{dr}{dt}\right)x - \mathrm{C}, \tag{135}$$

ou, sous une forme plus condensée :

$$\frac{r}{t}\,\frac{dx}{dt} = -\,x\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{t}\right) - \frac{\mathrm{C}}{t}. \tag{136}$$

485 — Cette formule permet de résoudre immédiatement une question qui constitue l'une des découvertes les plus remarquables et les plus inattendues de Clausius [1]. Il s'agit de savoir si, par sa détente adiabatique, une vapeur tend à être de plus en plus sèche, en raison de la volatilisation des particules liquides dont elle se trouvait primitivement imprégnée, ou au contraire, à devenir plus humide, par suite d'une condensation partielle. En d'autres termes, la valeur de x devra-t-elle augmenter ou diminuer par le fait de cette détente. Le signe de la dérivée $\frac{dx}{dt}$ résoudra évidemment cette question ; ou encore celui de $\frac{r}{t}\frac{dx}{dt}$, puisque $\frac{r}{t}$ reste positif dans les conditions ordinaires d'expérience (n° 479).

Il suffira par conséquent, pour qu'il y ait précipitation partielle, que l'on ait :

$$x\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{t}\right) + \frac{\mathrm{C}}{t} < 0;$$

car alors, $\frac{dx}{dt}$ étant positif (136), x désignera une fonction qui croît

[1] Clausius. Sur la condensation des vapeurs pendant la détente ou la compression. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LVI, p. 1115. — Dupré. Sur la condensation des vapeurs pendant la détente ou la compression. *Ibidem*, p. 960. — Cazin. Mémoire sur la détente et la compression des vapeurs. *Annales de chimie et de physique*, 4ᵉ série, t. XIV, p. 374. — Phillips. Note sur les changements d'état d'un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide suivant une ligne adiabatique. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 14 mars 1870.

avec t. La proportion x de vapeur devra donc diminuer pendant la détente adiabatique, puisque celle-ci donne lieu à un abaissement de température; la production de travail qui accompagne l'expansion ne pouvant alors s'effectuer qu'aux dépens du corps lui-même ([1]).

On peut d'après cela, en se maintenant pour un instant *au seul point de vue algébrique*, s'attendre à rencontrer tantôt un assèchement des vapeurs, tantôt une précipitation, selon la valeur du degré d'humidité initiale que l'on attribuera à x, et, bien entendu aussi, suivant la température, dont dépendent C et r. En effet, ces quantités sont, d'après les expériences de Regnault (125, 126), des polynômes dont les termes présentent, pour les différentes substances de la nature, les valeurs et les signes les plus divers.

Toutefois il importe, en sortant de ce point de vue abstrait, de décider si l'une ou l'autre de ces circonstances *peut effectivement avoir lieu, dans les conditions ordinaires des expériences et pour les liquides les plus usuels.*

486 — Nous commencerons par montrer à cet égard que c'est le phénomène de la précipitation qui se produit pour la vapeur d'eau; contrairement aux idées qui avaient cours avant Clausius ([2]).

Supposons d'abord, pour simplifier le calcul, que la vapeur soit absolument sèche, et faisons $x = 1$. Le second membre de l'équation (135) deviendra par là :

$$\frac{r}{t} - \frac{dr}{dt} - \frac{d\mu}{dt},$$

([1]) Cet argument suffit. J'ajouterai d'ailleurs que M. Phillips a montré (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXX, p. 548) que cette circonstance résulte comme conséquence des formules de Clausius (Moutier. *Éléments de thermodynamique*, in-12, 1872, p. 121).

([2]) Ce fait, d'importance capitale, est venu renverser la théorie développée par de Pambour dans son grand ouvrage, excellent du reste pour l'époque où il a été publié (*Théorie des machines à vapeur*, 1839). Cet auteur invoquait en effet, indépendamment des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, inadmissibles pour la vapeur saturée, celle de Watt, d'après laquelle la somme de la chaleur latente et de la chaleur libre reste constante. Il en déduisait cette conséquence que, si l'enveloppe ne cède ni n'enlève de la chaleur, la vapeur ne sera ni surchauffée ni condensée, mais restera toujours exactement saturée.

c'est-à-dire :

$$\frac{r}{t} = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Pour que $\frac{dx}{dt}$ soit positif, il suffit donc que l'on ait :

$$(137) \qquad r > t\frac{d\lambda}{dt},$$

ou, en développant (124, 126) :

$$606{,}5 - 0{,}695\,\theta - 0{,}00002\,\theta^2 - 0{,}0000003\,\theta^3 > 0{,}305\,(\theta + 273),$$

et, toutes réductions faites :

$$523{,}325 - \theta - 0{,}00002\,\theta^2 - 0{,}0000003\,\theta^3 > 0,$$

condition qui se trouve largement réalisée pour les températures les plus élevées auxquelles il soit possible de porter pratiquement la vapeur d'eau.

487 — Le mode inverse, dans lequel une vapeur vient à se surchauffer par sa détente adiabatique, au lieu de se condenser partiellement, se présente par exemple pour l'éther sulfurique. L'inégalité (137) devient alors en effet, d'après les valeurs des coefficients relatifs à cette substance qui se trouvent comprises dans le tableau de la page 780 :

$$94{,}00 - 0{,}079\,\theta - 0{,}0008514\,\theta^2 > 0{,}45\,(\theta + 273),$$

ce qui, en effectuant, conduit à une impossibilité dans les conditions de la pratique :

$$-28{,}85 - 0{,}529\,\theta - 0{,}0008514\,\theta^2 > 0.$$

Ces deux circonstances opposées ont été vérifiées expérimentalement par M. Hirn au moyen d'un cylindre muni de lunettes de

verre. La vitre s'est obscurcie pendant la détente de la vapeur d'eau, tandis qu'elle est restée nette avec celle de l'éther [1].

488 — Le chloroforme présente un phénomène plus curieux encore. L'inégalité (137) devient pour ce corps, d'après les nombres renfermés dans le tableau de la page 780 :

$$30{,}2485 - 0{,}23235\,\theta - 0{,}0000507\,\theta^2 > 0.$$

Or, en égalant ce trinôme à zéro, on trouve pour sa racine positive :

$$\theta = 127.$$

Il y a donc, à ce point du thermomètre usuel, une *température d'inversion* pour laquelle le trinôme change de signe. On obtiendra une condensation au-dessous de ce nombre, et une dessaturation aux températures supérieures.

Ce fait a été vérifié expérimentalement par Cazin [2], qui a trouvé $\theta = 123,48$; et par Athanase Dupré [3], qui avait obtenu la valeur $\theta = 121,00$. D'aussi légères différences, dans cette matière difficile, peuvent être attribuées à un certain degré d'humidité de la vapeur; car il ne faut pas oublier que les calculs précédents sont exclusivement relatifs au cas où elle est absolument sèche [4].

489 — Des circonstances analogues se présentent d'ailleurs avec un certain degré d'humidité; à la condition qu'il ne dépasse pas une limite déterminée, qu'il est facile d'assigner pour chaque température.

(1) Hirn. Confirmation expérimentale de la seconde proposition de la théorie mécanique de la chaleur. *Cosmos*, t. XII, p. 113. — Mascart. *Congrès de Nantes de l'Association française pour l'avancement des sciences*, p. 370.

(2) *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. XIV, p. 374.

(3) *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 124. — *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. III, p. 87.

(4) La température d'inversion de l'eau serait, d'après Rankine et A. Dupré, égale à 520 degrés *au-dessus* de la glace fondante ; celle de l'éther : 116 degrés *au-dessous* de ce point, suivant ce dernier expérimentateur.

Il a également indiqué $+118°$ pour la benzine, et $+127°$ pour le chlorure de carbone.

L'équation (135) donne à cet égard, pour que $\frac{dx}{dt}$ soit positif, la condition :

$$\left(\frac{r}{t} - \frac{dr}{dt}\right) x - C > 0,$$

d'où l'on tire :

$$x > \frac{C}{\frac{r}{t} - \frac{dr}{dt}}.$$

Il est en effet permis de diviser les deux membres par le coefficient de x, car celui-ci est essentiellement positif, puisque la dérivée $\frac{dr}{dt}$ ne renferme que des termes négatifs (126). On peut encore écrire :

$$x > \frac{t \frac{d\mu}{dt}}{r - t \frac{dr}{dt}}.$$

Les deux termes de cette fraction deviennent des polynômes entiers en θ, lorsque l'on y remplace t par $\theta + 273$, et que l'on effectue les différenciations de μ et de r par rapport à θ, au lieu de t, ce qui revient évidemment au même.

490 — On trouve en particulier pour l'eau, à l'aide des formules (125) et 126) :

$$x > \frac{273{,}000 + 1{,}01092\theta + 0{,}0002857\theta^2 + 0{,}0000009\theta^3}{796{,}235 + 0{,}01092\theta + 0{,}0002657\theta^2 + 0{,}0000006\theta^3}.$$

Avec une vapeur plus sèche que ne l'indique cette valeur, il s'opère une condensation partielle qui tend à rapprocher de ce point l'état des choses. Pour une vapeur plus humide, au contraire, la volatilisation d'une partie du liquide rapproche également du point en question. On voit ainsi qu'il jouit d'une certaine stabilité, avec tendance à se maintenir, si on le suppose préalablement atteint.

On peut remarquer, par exemple, les valeurs suivantes :

θ	x	$1 - x$
100	0,472	0,528
150	0,529	0,471
200	0,606	0,394

La première de ces températures correspond à une pression absolue d'une atmosphère, la seconde à cinq environ, et la troisième à seize atmosphères. La pratique la plus étendue des machines à vapeur peut donc être considérée, en ce qui concerne les valeurs de x, comme comprise entre les nombres extrêmes 0,50 et 0,55. Il suffit par conséquent, pour que la condensation s'opère, qu'il y ait dans le mélange plus de vapeur que de liquide, condition qui sera certainement toujours remplie.

Ce phénomène est évidemment favorable, *en principe*, à l'emploi dynamique de la vapeur saturée; car toute la chaleur de volatilisation de la partie qui se condense se trouve remise en liberté dans le cylindre même, de manière à pouvoir travailler sur le piston, au lieu d'aller se perdre purement et simplement dans l'atmosphère, ou au milieu de la pluie d'eau froide du condenseur [1].

[1] On ne devra pas perdre de vue, dans cette explication, que le phénomène est considéré ici en lui-même, et avec toute la rigueur de sa simplicité. Dans la pratique des moteurs industriels, l'expérience se complique de toute une série de circonstances étrangères; et ces perturbations viennent en modifier la portée; ordinairement même en renverser diamétralement les termes.

Le cylindre renferme alors de l'eau, formée par la condensation de la vapeur d'admission sur la paroi qui vient d'être refroidie par l'échappement, ou par la communication avec le condenseur; tandis que nous la supposions, dans les calculs précédents, complètement imperméable à la chaleur. Cette précipitation a, dans ce cas, pour effet de réchauffer la surface à une température intermédiaire entre celles de l'admission et du condenseur. La détente se développant, la température du milieu gazeux s'abaisse progressivement, et devient bientôt inférieure à celle du métal, qui détermine alors une volatilisation d'une partie de cette eau. Au lieu de précipitation dans la détente, il y aura donc vaporisation. En outre, il est possible que la condensation conforme à la loi de Clausius continue à s'opérer dans le sein de la masse, loin de l'influence des parois, tandis qu'une volatilisation se produira le long de ces dernières. On voit par là que le phénomène réel devient, dans les conditions industrielles, excessivement

491 — Il est facile d'assigner la valeur effective de la quantité de vapeur qui se condense entre deux températures extrêmes t_1 et t_2 [1].

En effet l'équation d'adiabaticité (134) :

$$(138) \qquad \frac{r_2 x_2}{t_2} - \frac{r_1 x_1}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t} = 0,$$

peut se mettre sous la forme :

$$\frac{r_2}{t_2}(x_2 - x_1) + x_1\left(\frac{r_2}{t_2} - \frac{r_1}{t_1}\right) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t} = 0,$$

et donne pour le poids condensé $x_1 - x_2$ [2] :

$$x_1 - x_2 = 1 - \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} + \frac{t_2}{r_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t}.$$

492 — Nous pouvons apprécier d'après cela l'influence qu'exerce l'humidité de la vapeur sur le degré de détente.

La formule (138) montre en effet que x_2 est une fonction linéaire de x_1 :

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta,$$

si l'on pose pour abréger :

$$\alpha = \frac{t_2 r_1}{t_1 r_2}, \qquad \beta = \frac{t_2}{r_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t}.$$

complexe, sans toutefois que ces résultats d'observation doivent infirmer en rien, bien entendu, la valeur théorique et le très grand intérêt que présentent les calculs précédents, relatifs à l'hypothèse d'une adiabaticité parfaite.

Cette question a été discutée avec beaucoup de développements par Couche (*Voie, matériel roulant et exploitation technique des chemins de fer*, t. III, p. 718, 743, 755, 757, 760). On peut consulter également sur ce sujet les ouvrages suivants : Combes et Thomas. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1843. — Charpentier. Sur le rendement maximum que peut atteindre un moteur à vapeur. *Ibidem*, 19 mars 1885. — Daniel Kinnear Clark. On the behavious of steam in the cylinders of locomotives during expansion. *Institution of civil Engineers*, t. LXXII, p. 1910.

(1) Cette eau, en s'accumulant dans un cylindre, nécessite l'emploi des purgeurs. Mais d'ailleurs nous venons de voir que ces organes ont à évacuer une bien plus grande quantité de liquide, due à la condensation partielle de la vapeur au contact des parois froides, en raison du défaut d'adiabaticité.

(2) On trouve dans la *Nouvelle mécanique industrielle* de M. Pochet, p. 382 à 390, une table détaillée du degré de condensation dû à la détente adiabatique dans des conditions graduées.

Or le volume du kilogramme moteur, qui est originairement w, augmenterait de u par une volatilisation complète. Il s'accroît donc en réalité de ux, puisque le poids x est seul converti en vapeur. Il atteint par suite, comme valeurs extrêmes, initiale et finale, les deux termes de la fraction suivante :

$$\frac{w + u_1 x_1}{w + u_2 x_2},$$

qui exprime dès lors le rapport de détente géométrique. On peut, en substituant la valeur de x_2, le mettre sous la forme :

$$(139) \qquad \frac{w + u_1 x_1}{(w + \beta u_2) + \alpha u_2 x_1}.$$

Pour juger si cette expression est, ou non, croissante avec x, nous sommes autorisés à lui substituer, en vue de cet examen, celle que l'on obtiendrait en supprimant dans le numérateur w devant $u_1 x_1$. En effet l'expansion u_1 est énorme vis-à-vis de w, et le coefficient x_1 n'est jamais inférieur à 0,5 (¹). Or la fraction ainsi obtenue peut s'écrire :

$$\frac{u_1}{\alpha u_2 + \dfrac{w + \beta u_2}{x_1}},$$

et il est clair qu'elle est croissante ou décroissante en même temps que x_1.

Le rapport de détente varie donc en sens inverse de l'humidité $1 - x_1$. Il s'affaiblit, si l'on vient à employer une vapeur plus humide. Pour continuer à dépenser le même poids pendant la course du piston, l'admission à pleine pression $w + u_1 x_1$ placée au numérateur doit donc diminuer vis-à-vis du dénominateur, qui reste toujours égal au volume de la cylindrée capable d'utiliser 1 kilogramme du fluide moteur. Il faut, en un mot, couper plus tôt la vapeur.

(¹) Il s'abaisse souvent à 0,9 et on l'a vu parfois, dans les locomotives, atteindre la valeur 0,6.

Si l'on veut, d'un autre côté, continuer à fournir le même volume de vapeur dans le même temps, il sera nécessaire d'accélérer l'allure de la machine en raison inverse de la valeur de l'admission, ou, si l'on veut, de la fraction (139) dont celle-ci forme le numérateur, tandis que le dénominateur est constant. Si, pour simplifier par une approximation bien suffisante l'expression (139), nous négligeons w à ses deux termes, nous pourrons la mettre sous la forme :

$$\frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{x_1}}.$$

Le rapport des vitesses sera par suite :

$$\frac{\alpha + \frac{\beta}{x_1'}}{\alpha + \frac{\beta}{x_1}},$$

c'est-à-dire explicitement, après avoir supprimé aux deux termes le facteur $\frac{t_2}{r_2}$:

$$\frac{\frac{r_1}{t_1} + \frac{1}{x_1'} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t}}{\frac{r_1}{t_1} + \frac{1}{x_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t}}.$$

§ 3

ÉCOULEMENT ADIABATIQUE DES VAPEURS SATURÉES

493 — Pour étudier l'écoulement adiabatique des vapeurs saturées [1], nous nous reporterons à la formule générale qui a été

[1] Macquorn Rankine. *Sur les lois de l'écoulement de la vapeur*. Traduction par Viollet et Moigno, 1870. — Carvallo. Mémoire sur les lois mathématiques de l'écoulement et de la détente de la vapeur. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LII, p. 683, 801.

établie ci-dessus (nº 471), relativement à la vitesse Υ d'un fluide quelconque :

$$U_2 - U_1 + A\frac{\Upsilon^2}{2g} = Q + A(p_1v_1 - p_2v_2).$$

Dans cette relation, Q désigne la quantité de chaleur qui a été communiquée au corps en mouvement. Nous l'annulerons ici pour nous limiter à l'écoulement adiabatique. Il viendra dans ces conditions:

$$\frac{\Upsilon^2}{2g} = p_1v_1 - p_2v_2 + E(U_1 - U_2).$$

On a du reste, pour la vapeur saturée, avec les notations qui précèdent :

$$v_1 = w_1 + u_1x_1, \qquad v_2 = w_2 + u_2x_2,$$

et, d'après l'égalité (132) :

$$U_1 - U_2 = \mu_1 - \mu_2 + r_1x_1 - r_2x_2 - Au_1p_1x_1 + Au_2p_2x_2.$$

Il vient donc après réduction :

$$\frac{\Upsilon^2}{2g} = p_1w_1 - p_2w_2 + E(\mu_1 - \mu_2 + r_1x_1 - r_2x_2).$$

Mais d'ailleurs x_2 s'élimine à l'aide de l'équation (138), ce qui donne :

$$\frac{\Upsilon^2}{2g} = p_1w_1 - p_2w_2$$
$$+ E\left[\mu_1 - \mu_2 + r_1x_1\left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) + t_2\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\mu}{t}\right].$$

494 — A cette formule exacte on peut, dans la pratique, substituer par approximation la suivante.

Tout d'abord nous confondrons ensemble w_1 et w_2, que nous remplacerons l'un et l'autre par w_0, en négligeant les faibles dilatations du liquide à partir du zéro du thermomètre usuel (nº 477).

En second lieu, nous réduirons μ à son premier terme θ (125). Comme conséquence, l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t}$ (n° 483) devient, avec un logarithme népérien : $CL\frac{t_2}{t_1}$, si C désigne la chaleur spécifique du liquide sous pression constante.

Il vient ainsi :

$$\frac{\Upsilon^2}{2g} = (p_1 - p_2)w_0 + \mathrm{E}\left[(t_1 - t_2)\left(1 + \frac{r_1 x_1}{t_1}\right) + Ct_2 L\frac{t_2}{t_1}\right].$$

S'il s'agit en particulier de l'eau, on aura :

$$w_0 = 0{,}001; \qquad C = 1;$$

et en supposant, pour fixer les idées, la vapeur parfaitement sèche :

$$x_1 = 1.$$

Avec l'écoulement à l'air libre, il viendra :

$$p_2 = 10336, \qquad t_2 = 100 + 273.$$

Si enfin l'on convertit le logarithme népérien dans le système vulgaire, on aura :

$$\frac{\Upsilon^2}{2g} = \frac{p}{1000} - 10{,}336 + 424\left[(t - 373)\left(1 + \frac{r}{t}\right) - 2{,}3.373.\mathrm{Log}\frac{t}{373}\right].$$

et, en effectuant :

$$\Upsilon^2 = 0{,}01962\,p + 8310\,(t + r) - 2300021\,\frac{r}{t}$$
$$- 2300224 - 7129480\,\mathrm{Log}\frac{t}{373}.$$

Il suffirait de rendre à p et r leurs valeurs (123) et (126) en fonction de t, pour obtenir l'expression complètement explicite de la vitesse d'écoulement adiabatique de la vapeur d'eau saturée et sèche au

sein de l'atmosphère. Nous nous bornerons à effectuer ici la substitution de r; car celle de p, à cause de la nature doublement exponentielle de cette fonction, ne ferait que compliquer sans aucune utilité l'écriture. Il suffira de restituer par la pensée à ce symbole cette signification, pour apprécier à sa juste valeur l'extrême complication analytique de l'expression de la vitesse d'écoulement en fonction de la température absolue :

$$u = \sqrt{\begin{array}{l} 6082599 - 49850\,t + 2{,}5655\,t^2 \\ - 0{,}002493\,t^3 - \dfrac{1840016800}{t} \\ - 7129480 \operatorname{Log} \dfrac{t}{373} + 0{,}01962\,p \end{array}}\,.$$

Si, par exemple, on suppose une pression de 5 atmosphères, on aura, d'après le tableau de la page 777 :

$$p = 5\,.\,10336, \qquad t = 152 + 273, \qquad r = 499,$$

et l'on trouve, tout calcul fait :

$$\Upsilon = 734.$$

La vitesse atteindrait la valeur d'un kilomètre par seconde, pour une chaudière à 8 atmosphères de pression absolue se dégorgeant dans un condenseur maintenu à $\frac{1}{8}$ d'atmosphère [1].

§ 4

RENDEMENT DES MOTEURS A VAPEUR SATURÉE

495 — *Formule de la thermodynamique.* — Si l'on réduit par la pensée à sa plus simple expression [2] le jeu d'une machine à

[1] On trouvera une table des vitesses de la vapeur pour des conditions très graduées, dans l'excellent ouvrage de M. Pochet (*Nouvelle mécanique industrielle*, p. 404).

[2] Cette question du rendement se trouve traitée ici par avance, comme application de la thermodynamique des vapeurs saturées. La quatrième partie de ce Cours sera consacrée tout entière à l'étude systématique des machines à vapeur.

vapeur saturée pour en évaluer le rendement (¹), on y peut distinguer les phases suivantes.

1° Sur un certain parcours du piston dans le cylindre, le fluide agit à pleine pression, c'est-à-dire en libre communication avec la chaudière. — 2° Après l'introduction d'une quantité déterminée de vapeur, que nous pouvons, pour plus de simplicité, supposer égale à un kilogramme, la communication se ferme, et le

(¹) Hallauer (Rendement des machines à vapeur. *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, mai et juin 1879. — *Bulletin de la Société de l'industrie minérale de Saint-Étienne*, 2ᵉ série, t. X, p. 31. — Quatre brochures publiées chez Gauthier-Villars en 1877, 1878, 1879, 1880). — Maitre. *Note sur le calcul du rendement d'une machine à vapeur*, in-8°. — Charpentier (Sur le rendement maximum à attendre d'un moteur à vapeur. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XCVI, p. 782. — Détente adiabatique de la vapeur. *Ibidem*, janvier 1884, p. 85). — Courtin. *Éléments de la thermodynamique, contenant les formules nouvelles pour le calcul des machines à vapeur*, Mons, 1882. — Ledieu. *Étude de thermodynamique expérimentale sur les machines à vapeur*, Dunod, 1881. — Lissignol. *Note sur l'application de la thermodynamique au perfectionnement des machines à vapeur*, Bruxelles, 1876. — Chaverandier. *Nouvelle théorie sur les machines à vapeur*, in-8°, 1864. — Beer. *Quelques notes sur le travail de la vapeur dans les machines à un cylindre*, Liège, in-8°. — Leloutre (*Recherches expérimentales et analytiques sur la machine à vapeur*, in-8°, 1875. — Vérification d'une série d'essais sur une machine de Woolf, Paris, in-8°, 1885). — Camille Rolland. Conditions économiques d'établissement de la machine à vapeur. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 2ᵉ série, t. XIV, p. 211. — Dwelshauvers-Dery (Exposé succinct de la théorie pratique des moteurs à vapeur. *Ibidem*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 372; XII, 186. — Les découvertes récentes concernant la machine à vapeur. *Ibidem*, 1880, 2ᵉ série, t. VII, p. 306. — Méthode nouvelle pour représenter l'échange de chaleur entre le métal et la vapeur. *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, 25 janvier 1888). — Pasquier (*Étude des machines à vapeur basée sur les expériences de Hirn et de Hallauer*. Bruxelles, 1880. — La machine à vapeur. *Revue scientifique de la Société de Bruxelles*, 1883, p. 208). — Wronski. *Nouveaux systèmes de machines à vapeur fondés sur la découverte des vraies lois des forces mécaniques*, 1834, in-4°. — Georges Marié. Les progrès uturs de la locomotive au point de vue de l'économie du combustible. *Revue générale des chemins de fer*, juillet 1881. — Henri Dyer. Théorie des machines à vapeur. *Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland*, 1885. — Arthur Rigg. A practical treatise of the steam engine. *Engineering news*, 13 septembre 1879.

Une discussion intéressante s'est élevée récemment entre les auteurs suivants: Zeuner. Recherches calorimétriques sur la machine à vapeur. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 2ᵉ série, t. XI, p. 16. — Hirn. Réfutation du travail de M. Zeuner. *Ibidem*, p. 57 et 388. — Hallauer. *Ibidem*, p. 619. — Zeuner. Deuxième mémoire. *Ibidem*, 2ᵉ série, t. XIII, p. 1. — Hirn. Réfutation de la deuxième critique de M. Zeuner. — Hallauer. *Ibidem*, 2ᵉ série, t. XIV, p. 355. — Leloutre. Réponse à M. Hirn. *Du degré d'exactitude des données d'observation d'un essai de machine à vapeur*. Paris, 1884. — Schmidt. Progrès dans les recherches calorimétriques. *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 2ᵉ série, t. XII, p. 430. — Hirn. Remarques sur un principe de physique d'où part Clausius dans sa théorie des machines à vapeur. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CV, p. 716.

corps agit dorénavant par sa détente. — 3° A un certain moment, une ouverture se démasque, et met le cylindre en communication avec le condenseur [1]. Le kilogramme moteur s'y trouve refoulé par le recul du piston, et noyé dans une quantité surabondante d'eau froide. — 4° La pompe à air extrait le tout de cette enceinte, dans laquelle règne une tension inférieure à la pression atmosphérique, et le déverse dans la bâche à eau chaude. — 5° Enfin la pompe alimentaire reprend dans ce récipient un kilogramme d'eau pour le refouler dans le générateur, afin d'entretenir ce dernier dans un état permanent en réparant ses pertes.

Analysons successivement ces diverses opérations, au point de vue du travail qui en est la conséquence.

496 — 1° *Pleine pression.* — La chaudière se trouve à une température absolue t_1, d'où l'on déduirait par la formule (123) la pression correspondante p_1. On doit introduire ici comme un second élément arbitraire la valeur x_1, qui caractérise l'état de siccité ou d'humidité plus ou moins marqué de la vapeur. Le kilogramme de liquide occupe un volume w_1 [2]. Il devient par la volatilisation partielle $w_1 + u_1 x_1$. Telle est la place que le piston doit lui céder dans le cylindre, en reculant devant sa pression constante p_1, égale à celle de la chaudière [3]. De là un travail T_1 développé par cette phase de pleine pression, qui aura pour valeur :

$$T_1 = p_1 (w_1 + u_1 x_1).$$

2° *Détente.* — Lorsque le piston a engendré le volume $w_1 + u_1 x_1$, capable de contenir le kilogramme moteur à la tension du généra-

[1] Ou avec l'atmosphère extérieure dans les machines sans condensation.

[2] Qui est sensiblement d'un litre. Bien que nous soyons convenus, d'une manière générale, de négliger les variations que subit cet élément avec la température, je distinguerai cependant ici, pour plus de clarté dans le raisonnement, ces divers états successifs par les notations w_1, w_2, w', sauf à confondre ensemble finalement toutes ces valeurs dans le résultat.

[3] En négligeant les effets de l'étranglement, et des diverses pertes de charge, et en supposant qu'une *compression parfaite* a régénéré, en fin de course, dans l'*espace libre* de la distribution, la pression du générateur, afin que l'on puisse fonctionner toujours à travail complet.

teur, la lumière d'admission se ferme, et le fluide commence à agir par sa détente. On caractérise géométriquement celle-ci par le rapport $\frac{1}{k}$, choisi *a priori*, du volume de pleine pression au volume final $w_2 + u_2 x_2$ (¹); ce qui fournit entre les inconnues u_2 et x_2 cette première relation :

$$\frac{w_1 + u_1 x_1}{w_2 + u_2 x_2} = \frac{1}{k}.$$

Pour en obtenir une seconde, nous devrons invoquer la loi de détente que nous supposons s'exercer dans le cylindre, et de laquelle dépendra naturellement le résultat. Nous avons vu (²) qu'elle est en réalité fort compliquée et mal connue. Cependant, ainsi que nous l'avons déjà fait pour les théories similaires, nous la supposerons adiabatique. De là l'équation (138) :

$$\frac{r_2 x_2}{t_2} - \frac{r_1 x_1}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mu}{t} = 0.$$

Cette intégrale définie est complètement déterminée en fonction de t_2 (n° 483), et nous pouvons de même ramener à cette inconnue les quantités u_2 et r_2 au moyen des relations (128) et (126). Nous possédons ainsi deux conditions entre les inconnues t_2 et x_2. On en déduira leur valeur; non pas à la vérité à l'aide d'une élimination analytique régulière, qui serait impossible en raison de la nature transcendante des équations, mais en effectuant l'interpolation numérique de la table de Zeuner (p. 783). On arrivera de cette manière à connaître la température finale t_2 de la détente, ainsi que le nouveau degré d'humidité $1 - x_2$ auquel se trouve alors amenée la vapeur.

Le travail de la détente pourra s'évaluer alors de la manière suivante. Il résulte uniquement de la variation $U_1 - U_2$ de l'éner-

(¹) On peut supposer ici que ce dernier soit le volume de la cylindrée complète. S'il y avait avance à l'échappement, le point où se produira ce phénomène serait connu dans tous les cas, d'après les éléments de la distribution.

(²) Voy. ci-dessus (page 799, note 1).

gie interne, puisque le fluide n'a pu emprunter ni céder de chaleur à aucun corps étranger. On a pour déterminer cette quantité (132) :

$$U_1 - U_0 = \mu_1 + r_1 x_1 - Ap_1 u_1 x_1,$$
$$U_2 - U_0 = \mu_2 + r_2 x_2 - Ap_2 u_2 x_2,$$

et par suite, comme expression du travail T_2 de la détente :

$$T_2 = E(U_1 - U_2),$$

c'est-à-dire :

$$T_2 = E(\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1 - r_2 x_2) - p_1 u_1 x_1 + p_2 u_2 x_2.$$

3° *Condensation.* — La pression p' du condenseur n'a qu'une relation éloignée avec les éléments précédents, car elle subit l'influence de l'air que l'eau froide tient en dissolution, lequel se dégage en raison du degré de vide qui règne dans cette enceinte. Il convient donc de considérer p' comme un élément arbitraire ([1]).

Pour refouler, malgré cette pression antagoniste, le volume $w_2 + u_2 x_2$ pendant le retour du piston, il faut surmonter le travail négatif :

$$T_3 = - p'(w_2 + u_2 x_2).$$

4° *Extraction.* — La pompe à air doit alors extraire du condenseur le kilogramme moteur ramené presque complètement à la forme liquide, sous le volume w' correspondant aux conditions dans lesquelles se trouve cette capacité ([2]). Cet engin se trouve, pour cette opération, aidé par la tension p', et il doit vaincre la pression atmosphérique p_a. Le travail négatif développé par la

([1]) On peut admettre en général pour sa valeur un cinquième de la pression atmosphérique.

([2]) Elle extrait également l'eau d'injection, ainsi que l'air qui s'en est dégagé. Mais ces matériaux, étrangers au corps que nous suivons par la pensée dans ses transformations, donnent lieu à une consommation accessoire d'effet utile que nous comprendrons dans le total des *résistances passives* de l'appareil, et que nous écartons en ce moment de l'évaluation de $\varepsilon\varepsilon_1$ (n° 385). Leur influence s'exercera sur la valeur du coefficient économique dynamique ε_3.

pression effective $p_a - p'$ qui reste constante, a pour expression :

$$T_4 = - (p_a - p') w'.$$

5° *Alimentation.* — Enfin un appareil d'alimentation doit, avec le concours de la pression atmosphérique p_a, refouler le kilogramme w' dans la chaudière où règne la force élastique p_1. De là un travail négatif, dont l'expression est semblable à la précédente :

$$T_5 = - (p_1 - p_a) w'.$$

Si l'on réunit maintenant en un total T les cinq travaux précédents, en confondant ensemble les volumes successifs du kilogramme liquide w_1, w_2, w' (n° 463), on voit disparaître algébriquement tous les termes qui renferment ce facteur w. Il en est de même de $p_1 u_1 x_1$, et il reste simplement, pour le travail par unité de poids :

$$(140) \qquad T = E(\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1 - r_2 x_2) + u_2 x_2 (p_2 - p').$$

Avec toute autre consommation, le résultat serait évidemment proportionnel au poids de vapeur dépensé.

497 — Puisque nous considérons comme déterminées les conditions du condenseur, il est évident que nous tirerons du kilogramme de vapeur le parti le plus utile possible, en poussant la détente jusqu'à ce que sa tension p_2 s'abaisse exactement à celle p' de cette enceinte. C'est ce que l'on appelle la *détente complète.* S'arrêter plus tôt serait en effet perdre gratuitement la chute de pression $p_2 - p'$ qui, au moment de l'échappement, s'opérerait subitement à travail incomplet, sans s'utiliser à pousser encore le piston. Aller au delà serait obliger cet organe à se mouvoir à contre-pression, en vertu des liaisons et de la force vive acquise.

Le travail maximum T_m par unité de poids a donc pour valeur théorique :

$$T_m = E(\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1 - r_2 x_2).$$

Pour l'évaluer dans chaque cas, on commencera par chercher t_2 d'après la condition bien déterminée :

$$p_2 = p',$$

en y remplaçant p_2 par sa valeur (123). On obtiendra ensuite μ_2 et r_2 à l'aide des formules (125, 126), et x_2 d'après la relation (138).

Nous pouvons même effectuer une fois pour toutes l'élimination de ce dernier élément, et écrire explicitement, en divisant les deux membres par E :

$$(141) \qquad \mathrm{AT}_m = \mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1 \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) - t_2 \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t},$$

en mettant en évidence, au moyen d'un renversement de limites, le signe de l'intégrale définie, dont l'expression nous est explicitement connue (n° 483) [1].

498 — *Coefficient économique.* — Nous possédons, dans la formule (141), l'expression théorique du calorique industriellement utilisé par le cycle qui vient d'être défini. Il est facile d'évaluer, d'autre part, la chaleur qui a dû être artificiellement développée pour accomplir cette opération.

Il a fallu d'abord porter le kilogramme, de la température t' du condenseur à celle t_1 qui règne dans le générateur. Si nous confondons, par une approximation bien permise [2], t' avec t_2, puisque $p' = p_2$, cette première quantité de chaleur aura pour valeur $\mu_1 - \mu_2$. En second lieu, on a dû volatiliser le poids x_1, ce qui a exigé le nombre de calories $r_1 x_1$. Le total à fournir est donc :

$$\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1.$$

[1] On trouvera dans la *Nouvelle mécanique industrielle* de M. Pochet, p. 303 à 308, une table très détaillée des valeurs du travail que l'on peut retirer d'un kilogramme de vapeur dans des conditions graduées.

[2] Il ne faut en effet voir là qu'une approximation, car t_2 est lié à p_2 par la formule (123), tandis que t' n'offre pas de relation nécessaire avec p', en raison de l'influence étrangère de l'air. Dans la réalité, θ' varie entre 30 et 60 degrés. Nous admettrons ordinairement $\theta' = 40^{\text{D}}$, et par suite $t' = 313^{\text{D}}$.

D'après cela, le coefficient économique effectif, que nous pouvons exprimer par $\varepsilon\varepsilon_1$, en reprenant les notations du n° 385, aura pour valeur :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1 \frac{t_1 - t_2}{t_1} - t_2 \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t}}{\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1}.$$

499 — Cette formule permet de mettre de suite en évidence l'influence qu'exerce sur le rendement la présence de l'eau dans la vapeur.

On peut en effet la transformer de la manière suivante :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = 1 - \frac{t_2}{t_1} \left[\frac{r_1 x_1 + t_1 \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t}}{r_1 x_1 + \mu_1 - \mu_2} \right].$$

Concevons une valeur τ intermédiaire entre t_2 et t_1, et d'ailleurs inconnue, mais telle que si on l'attribue par la pensée d'une manière constante au dénominateur t qui figure sous le signe de l'intégrale définie, la valeur de cette dernière ne soit pas changée. On pourra alors écrire, en effectuant l'intégration :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = 1 - \frac{t_2}{t_1} \left[\frac{r_1 x_1 + \frac{t_1}{\tau} (\mu_1 - \mu_2)}{r_1 x_1 + (\mu_1 - \mu_2)} \right].$$

Puisque $\tau < t_1$, il devient évident que la fraction placée entre les crochets est supérieure à l'unité. Elle diminue donc quand x_1 augmente, et le rendement s'accroît par suite. On voit ainsi que l'humidité entraînée par la vapeur est nuisible à l'économie de la marche [1].

500 — Il est facile d'obtenir une évaluation du coefficient économique spécifique ε_1.

[1] En revanche, elle peut présenter certains avantages accessoires, tels, par exemple, qu'une meilleure conservation des garnitures. Dans les locomotives, particulièrement, où le piston est animé d'un mouvement très rapide, on emploie une vapeur assez humide.

Nous savons en effet que l'on a d'une manière générale (n° 437) :

$$\varepsilon = \frac{t_1 - t_2}{t_1}.$$

Si donc nous divisons membre à membre avec l'équation qui fournit la valeur de $\varepsilon\varepsilon_1$ (n° 498), il viendra :

$$(142) \quad \varepsilon_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\dfrac{t_1}{t_1 - t_2} + r_1 x_1 - \dfrac{t_1 t_2}{t_1 - t_2}\displaystyle\int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t}}{\mu_1 - \mu_2 + r_1 x_1}.$$

Cette formule rigoureuse peut très convenablement être remplacée, dans les applications courantes, par une approximation plus simple. On a vu en effet que, pour l'eau, μ ne diffère de θ que par des termes d'une bien faible importance (125). Si donc nous confondons cette fonction avec θ, il viendra, en employant un logarithme népérien :

$$\varepsilon_1 = \frac{t_1 + r_1 x_1 - \dfrac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} L \dfrac{t_1}{t_2}}{t_1 - t_2 + r_1 x_1}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que la vapeur soit absolument sèche, en faisant $x_1 = 1$. Nous pourrons alors écrire :

$$\varepsilon_1 = \frac{t_1 + r_1 + \dfrac{Lt_1 - Lt_2}{\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2}}}{t_1 + r_1 - t_2}.$$

Si, pour rester dans le même ordre d'approximation, nous réduisons r à la valeur $\lambda - \theta$, il reviendra au même de remplacer $t + r$ par $\lambda + 273$, d'où, en exprimant λ en fonction de la température absolue :

$$\varepsilon_1 = \frac{796{,}235 + 0{,}305\, t_1 + \dfrac{Lt_1 - Lt_2}{\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2}}}{796{,}235 + 0{,}305\, t_1 - t_2}.$$

formule qui ne renferme plus que les deux températures extrêmes entre lesquelles s'effectue le fonctionnement de la vapeur.

501 — Si nous représentons sur la figure 289 le cycle parcouru

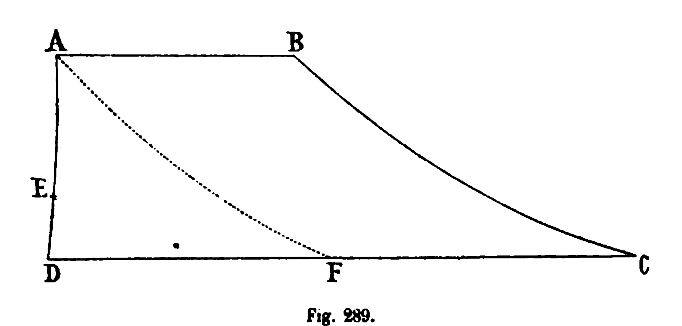


Fig. 289.

par le kilogramme moteur, l'horizontale AB y marquera la pleine pression [1], la courbe BC la détente adiabatique [2], l'horizontale

[1] Il est bien essentiel de ne pas confondre cette figure (qui est une représentation théorique du cycle fermé accompli par le kilogramme moteur depuis son départ du générateur jusqu'à son retour dans cette enceinte, en traversant successivement le cylindre, le condenseur, l'atmosphère, et l'injecteur) avec le *diagramme* usuel, que fournit l'indicateur de Watt. Ce dernier ne relate au contraire que les diverses circonstances qui s'accomplissent dans le cylindre, et non au delà; et, d'un autre côté, il fournit sur le fonctionnement dans l'intérieur de cette enceinte des renseignements qui concernent, non plus le kilogramme moteur, mais des corps étrangers à la question. C'est ainsi que la courbe de compression indique le refoulement que subit, non plus le kilogramme en question, déjà parvenu dans le condenseur, et dorénavant séparé du cylindre par la fermeture de l'échappement, mais un poids constant de vapeur destiné à remplir l'espace libre de la distribution pour y régénérer la pression du générateur, et qui, par hypothèse, s'y trouvait déjà renfermé au moment de l'admission, afin d'éviter une chute brusque de pression et un fonctionnement à travail incomplet.

[2] La nature de ces courbes n'est pas théoriquement connue pour la vapeur saturée proprement dite. On a cherché à les représenter empiriquement par la forme fonctionnelle générale qui renferme déjà, comme cas particulier, l'adiabatique des gaz parfaits:

$$pv^m = \text{const.},$$

en disposant convenablement de l'exposant m. Divers auteurs ont indiqué à cet égard les valeurs suivantes :

$m =$ 1,410 Schmidt, *Théorie des machines à vapeur*, 1861;
1,140 Grashof, *Société des ingénieurs allemands*, t. VIII, p. 151;
1,135 Zeuner, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 332:
1,111 Rankine, *Manual of steam engine*, p. 385;

CD le refoulement dans le condenseur. Quant aux deux dernières phases, leurs tracés représentatifs DE, EA se confondront sensiblement avec une droite verticale; l'extraction du condenseur et le refoulement dans la chaudière s'opérant suivant une loi, mal connue à la vérité, mais à coup sûr sans variation importante de volume.

Traçons par la pensée l'adiabatique AF qui passe au point A, et imaginons que le point figuratif la décrive alternativement dans les deux sens opposés qui sont marqués par les flèches. Le cycle proposé ABCDA pourra être considéré comme le résultat de la succession des deux opérations ABCFA et AFDEA. Le premier de ces diagrammes est un cycle de Carnot. Le second peut donc servir à caractériser la perturbation qui écarte de ce type idéal le cycle réel ABCDA.

Si l'on imagine que les horizontales AB et CD viennent à se rapprocher de plus en plus, le cycle AFDEA deviendra un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au second ABCD, et dès lors négligeable devant ce dernier. On voit ainsi que l'influence perturbatrice tend à s'atténuer par le rapprochement des deux horizontales, et à s'accentuer au contraire par leur écartement. C'est donc avec les plus grandes différences de température que la détérioration du cycle de Carnot sera le plus accusée dans la pratique. Cherchons d'après cela, pour mettre les choses au pis, à apprécier la valeur de ε_1 sur un exemple numérique relatif à des pressions très notables.

502 — Nous imaginerons dans ce but un générateur qui pré-

M. Zeuner emploie en outre, pour la vapeur humide, l'expression :

$$m = 1{,}035 + \frac{x}{10},$$

qu'il a vérifiée pour les valeurs de x comprises entre 1,00 et 0,70. Le nombre indiqué par Rankine rentrerait dans cette loi, pour la valeur $x = 0{,}76$. Quant à celui de Schmidt, qui résulte simplement d'une identification idéale de la vapeur saturée avec les gaz parfaits, il est absolument inacceptable, et son auteur paraît y avoir renoncé lui-même ultérieurement (*Société des ingénieurs autrichiens*, xv[e] année), pour adopter alors l'exposant de M. Grashof, qui diffère très peu du nombre de M. Zeuner. Ce dernier auteur a discuté la question avec de grands développements. La formule qu'il a donnée montre qu'au fur et à mesure que x diminue et que l'humidité augmente, la valeur de m se rapproche de l'unité, *et la loi de détente de la formule de Mariotte.*

sente une pression de 10 atmosphères [1]. On trouve dans les tables, comme température correspondante :

$$\theta_1 = 179, \qquad t_1 = 452.$$

Nous avons admis pour celle du condenseur dans les circonstances ordinaires :

$$\theta_2 = 40, \qquad t_2 = 313.$$

Dans ces conditions on trouve, en effectuant les calculs :

$$\varepsilon_1 = 0,9009.$$

La machine à vapeur saturée, à détente complète et à condenseur, constitue donc un très bon moteur, puisqu'elle fournit théoriquement 90 % du rendement maximum que l'on puisse attendre de l'appareil idéal le plus parfait.

Un aussi grand rapprochement entre son fonctionnement et celui d'une machine abstraite de Carnot permet de lui étendre les conclusions qui ont été déjà formulées pour ce cycle spécial (n° 384). On voit par là que l'on aura tout intérêt à élever autant que possible t_1, température de la chaudière, et à abaisser t_2 par la substitution d'un condenseur artificiel au simple échappement dans l'atmosphère. Rappelons également que ce maximum s'obtient en approchant le plus possible de la détente complète. On peut énoncer par conséquent cette formule succincte qui résume les conditions théoriques du bon fonctionnement de la vapeur dans les machines : *pression élevée, assèchement de la vapeur, détente prolongée, condensation artificielle.*

503 — Poussons plus loin l'appréciation effective du rendement des moteurs à vapeur.

[1] Ce chiffre, très élevé pour les machines fixes, est souvent dépassé dans les locomotives, sans être cependant bien éloigné de la limite pratique. Il constitue donc, entre les deux cas, un intermédiaire très convenable pour le point de vue auquel nous voulons nous placer.

Si nous reprenons l'exemple précédent, il donne :

$$\varepsilon = \frac{179 - 40}{179 + 273} = 0,31 ;$$

et d'après la valeur trouvée pour ε_1 :

$$\varepsilon\varepsilon_1 = 0,9 \times 0,31 = 0,28.$$

Quant à l'importance des pertes de chaleur occasionnées par la conductibilité, par le rayonnement, et surtout par le grand excès d'air qu'il est nécessaire d'envoyer dans le foyer, pour y adoucir la température de combustion et ménager la boîte à feu, l'on restera plutôt en dessous qu'au dessus de la vérité en l'évaluant à la moitié. On aura donc au maximum :

$$\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0,5 \times 0,28 = 0,14.$$

Si enfin l'on admet encore une perte d'un quart environ par le fait des résistances d'ordre dynamique, ainsi qu'on l'observe dans un grand nombre de machines bien construites, il restera finalement :

$$\eta = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0,75 \times 0,14 = 0,10 ;$$

résultat sensiblement égal à celui que nous ont déjà présenté (n° 385) les moteurs à air chaud.

Cet énorme déficit a été pendant un certain temps exploité par l'opinion à l'encontre des machines à vapeur, que l'on présentait comme des récepteurs détestables. Il est très essentiel de ramener cette manière de voir à une appréciation plus judicieuse, en se reportant aux explications qui ont été déjà développées à cet égard pour les machines à air chaud (n° 386).

504 — *Avant-projet de l'établissement d'un moteur à vapeur.* — Pour asseoir sur les bases solides que nous fournit la thermodynamique l'avant-projet d'une machine à vapeur dont on a fait connaître directement la force réelle en chevaux, on procédera de la manière suivante.

La chaudière étant supposée définie à l'avance, on connaîtra, d'après son timbre [1], la température correspondante t_1, et l'on fera l'hypothèse qui paraîtra la plus probable sur la dose $1-x_1$ d'humidité de la marche normale. On se donnera également le degré $\frac{1}{k}$ de détente que l'on se propose d'employer, et l'on en déduira, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (n° 496, 2°), la température finale t_2, et le degré d'humidité $1-x_2$ en fin de course.

En appliquant la formule (140), on déterminera le travail T que l'on peut théoriquement attendre d'un kilogramme de vapeur. Il conviendra essentiellement de le réduire d'après le coefficient de rendement [2] λ, consacré par l'usage pour le type de machines que l'on a en vue de construire.

On connaît du reste, d'après le nombre de chevaux réels, dont chacun représente 75 kilogrammètres par seconde, le travail effectif à fournir dans cet espace de temps. On en déduira le poids de vapeur à dépenser par seconde.

Sachant en outre, d'après l'allure de régime que l'on compte adopter, quel nombre de tours, ou de coups doubles [3] du piston, la machine effectuera par seconde, on évaluera le poids de la cylindrée.

Nous possédons d'ailleurs la quantité u_2, et par suite le poids spécifique :

$$\frac{1}{u_2+0,001},$$

de la vapeur détendue, au moment où elle occupe tout le cylindre [4]. On en déduira donc le volume du cylindre lui-même.

(1) Je rappelle (n° 9) que le timbre est la pression *effective* exprimée en *kilogrammes par centimètre carré*. Le nombre d'atmosphères diffère donc peu (sans lui être pourtant égal) du timbre augmenté d'une unité.

(2) Il est clair que ce facteur ne doit pas être confondu avec celui que nous avons évalué ci-dessus et désigné par η (n° 385). On pourrait tout au plus assimiler λ à ε_1. M. Zeuner, pour éviter l'ambiguïté qui plane trop souvent sur l'usage du mot *rendement*, désigne λ sous le nom de *coefficient de construction*.

(3) Dans une machine *à double effet*.

(4) Moins celui du piston, et moins la portion qui correspond à l'échappement anticipé.

Il reste encore à se fixer sur le diamètre de cet organe et la longueur de la course. Si la machine doit être, au départ [1], capable d'un effort statique déterminé, cette circonstance fournira la section, puisque l'on connaît déjà la pleine pression par unité de surface. Il s'ensuivra la valeur de la course.

Si, au contraire, on s'impose *a priori*, pour la *vitesse moyenne* [2] du piston, une limite que l'on ne veut pas voir dépasser par cet organe, on déduira la course du nombre ainsi déterminé des cylindrées, et, comme conséquence, le diamètre, puisque le volume est déjà connu.

505 — *Formule de Poncelet.* — La marche de calcul que nous venons d'esquisser présente de grandes complications. A l'époque où la théorie était encore peu avancée, Poncelet a donné une relation très simple, fondée sur la loi de Mariotte, seul mode de détente que l'on admît alors pour les fluides compressibles. Un tel écart par rapport aux lois véritables qui régissent la vapeur saturée avait tout naturellement jeté plus tard sur cette équation un grand discrédit. On y est cependant revenu, et l'on s'en sert encore journellement, d'après la remarque formulée ci-dessus (n° 501, note 2), que l'équation de Mariotte représente convenablement la détente réelle de la vapeur, dans les conditions pratiques des machines, mieux que l'hypothèse adiabatique, et d'autant plus exactement que le fluide est plus humide. Établissons donc la formule de Poncelet [3].

Nous désignerons par V_1 le volume de la portion du cylindre qui est parcourue à pleine pression. Le travail de cette période aura pour valeur $p_1 V_1$.

Si l'on coupe la vapeur après que le piston a engendré la fraction $\frac{1}{k}$ du volume total du cylindre, le travail de la détente effectuée

(1) Comme, par exemple, dans une machine d'extraction de mine.

(2) C'est-à-dire son parcours total dans un temps un peu prolongé, divisé par ce temps, pour faire disparaître les inégalités extrêmement accusées du mouvement sinusoïdal.

(3) Gouilly. Effet calorifique du cylindre à vapeur (*Génie civil*, t. XI, p. 147).

conformément à la formule de Mariotte, a pour expression $p_1 V_1 Lk$ (20).

La vapeur détendue occupe alors l'espace $k V_1$. C'est ce volume qu'il reste à balayer dans le condenseur par la course rétrograde, en refoulant pour cela la pression constante p' de cette enceinte; d'où un travail résistant égal à $-kV_1p'$. Nous le mettrons de préférence sous la forme $-p_1V_1 . k\frac{p'}{p_1}$.

Le total des trois opérations fournit d'après cela, pour le travail d'une cylindrée, l'expression :

$$p_1V_1\left(1 + Lk - k\frac{p'}{p_1}\right).$$

Désignons par N le timbre de la chaudière. On aura :

$$p_1 = 10\,000\,(N + 1).$$

Supposons que la pression du condenseur soit égale à $\frac{1}{m}$ d'atmosphère *métrique* (1). Nous pourrons écrire :

$$p' = \frac{10\,000}{m}.$$

Représentons enfin par V le volume du cylindre (2), il viendra :

$$V_1 = \frac{V}{k}.$$

Le travail d'une course simple prendra donc la forme :

$$10\,000\,(N + 1)\frac{V}{k}\left[1 + Lk - \frac{k}{m(N + 1)}\right].$$

(1) C'est-à-dire de la pression qui correspond à un kilogramme par centimètre carré. Nous avons vu (n° 490, 3°, note 1) qu'on peut en général admettre : $m = 5$.

(2) Défalcation faite, comme ci-dessus, du corps du piston et du volume qui correspond à l'échappement anticipé, que l'on ajoutera après coup à V, pour connaître les dimensions de la pièce à fondre.

Admettons que l'arbre de la machine fasse n tours *par minute*. La machine étant à double effet, développe en une minute $2n$ fois le travail qui vient d'être calculé, ou $\frac{n}{30}$ fois ce même travail en une seconde. Il faut diviser ce résultat par 75 pour le réduire en *chevaux nominaux*, et multiplier par λ pour convertir ce dernier nombre en *chevaux effectifs*.

Il vient ainsi pour la force Φ en chevaux effectifs :

$$\Phi = \frac{n\lambda}{30.75} \cdot 10\,000\,(\mathrm{N}+1)\frac{\mathrm{V}}{k}\left[1 + 2{,}3\,\mathrm{Log}\,k - \frac{k}{m(\mathrm{N}+1)}\right],$$

ou, en effectuant :

$$\Phi = 4{,}44\,\frac{n\lambda(\mathrm{N}+1)\mathrm{V}}{k}\left[1 + 2{,}3\,\mathrm{Log}\,k - \frac{k}{m(\mathrm{N}+1)}\right].$$

Inversement, on déduira, de la valeur Φ directement assignée, le volume V de la cylindrée, et à partir de là, ainsi qu'il a été expliqué tout à l'heure, le diamètre et la course du piston.

506 — *Consommations.* — La valeur de λ est naturellement assez variable dans la pratique. On peut, avec les machines convenablement établies, compter sur un rendement des trois quarts environ (¹).

Mais ce n'est pas ordinairement sous cette forme que l'on presente cette donnée dans la pratique des ateliers. On définit la plus ou moins grande perfection de la machine en indiquant le nombre de kilogrammes de charbon qu'elle oblige à brûler pour entretenir pendant une heure une force de cheval ; c'est-à-dire ce que l'on appelle, dans un langage condensé, un *cheval-heure* (²).

(¹) Charpentier. Sur les divers rendements théoriques que l'on doit considérer dans les machines à vapeur d'eau. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 19 mars 1884. — Gouilly. Effet calorifique du cylindre à vapeur. *Génie civil*, 2 juillet 1847. p. 147.

(²) Les ingénieurs anglais procèdent inversement, et indiquent le nombre de *pieds-livres* que l'on retire d'un kilogramme de houille. C'est ce qu'ils appellent *Duty* et *Service* d'une machine à vapeur.

Une machine qui consomme 1 kilogramme est excellente. Au-dessous de ce chiffre, le résultat doit être considéré comme tout à fait remarquable. On est arrivé à 900, et même à 800 grammes de charbon. Un moteur de 2 ou de 3 kilogrammes est encore très acceptable. Au delà, il devient discutable. Lorsque, dans une bonne construction, l'on sacrifie le rendement à des avantages d'une autre nature, ou quand l'appareil est très défectueux, on atteint des consommations de 8 à 10 kilogrammes. Les premières machines de Savery brûlaient 15 kilogrammes ([1]).

On commence cependant à réagir contre cette manière de qualifier l'efficacité d'une machine; et en effet rien n'est au fond plus obscur et plus indéterminé. On voit d'abord qu'une telle donnée a pour résultat d'amalgamer d'une manière confuse, avec les qualités du moteur, celles du charbon. Parler en effet d'un kilogramme de houille, sans que l'on sache à quelle sorte elle appartient, est presque ne rien dire. Une machine marine, qui ne brûle que d'excellents combustibles, ne vaudra souvent pas mieux au fond que le moteur d'extraction établi sur le puits d'un charbonnage dont on lui affecte les produits invendables, bien que ce dernier consomme trois ou quatre fois plus que la première.

En second lieu, lors même qu'il s'agirait de combustibles absolument comparables, ce mode aurait encore l'inconvénient de confondre, avec les qualités ou les défauts du moteur, ceux de la chaudière elle-même, qui constitue un appareil absolument distinct. La machine effectue naturellement un travail proportionnel à la quantité de vapeur qu'elle consomme ; et celle-ci proviendra en proportion très variable de la combustion d'un kilogramme de charbon de qualité constante sur la grille de tel ou tel générateur, suivant le plus ou moins de perfection de ce dernier.

Pour ces divers motifs, on tend de plus en plus à substituer à la notion de la quantité de charbon qui correspond au cheval-heure, celle du poids de vapeur dépensé. Les meilleures machines consomment 6 à 7 kilogrammes ; mais on se contente encore fort bien du chiffre de 8 à 9.

([1]) Prix de revient du cheval-vapeur (*Bulletin du Ministère des Travaux publics*, mars 1884, p. 274. — *Génie civil*, t. V, p. 407).

CHAPITRE XXXI

MACHINES THERMIQUES DIVERSES

—

§ 1

COMPARAISON DES MOTEURS A VAPEUR SATURÉE OU A AIR CHAUD

507 — Nous avons déjà rencontré, en ce qui concerne l'application industrielle de la transformation de la chaleur en travail, deux modes essentiels fondés sur l'emploi des vapeurs saturées ou des gaz permanents; en d'autres termes : la machine à vapeur et la machine à air chaud ([1]). Il convient d'en effectuer la comparaison, avant d'aborder l'étude des autres machines à feu.

On a vu (n° 503) que la différence est peu tranchée au point de vue du rendement théorique. Ce chiffre ne s'élève guère, pour l'un comme pour l'autre, au-dessus d'un dixième, et il peut tomber au-dessous. Mais ce résultat final tient à des compensations qui s'effectuent entre les divers facteurs ε, ε_1, ε_2, ε_3 qui entrent dans la composition de η. Or ces derniers présentent, au contraire, de l'un de ces moteurs à l'autre, certaines différences qu'il convient de faire ressortir.

Au point de vue du coefficient économique principal ε, le moteur à air présente un avantage décisif. Nous savons en effet (n° 502)

([1]) Quant aux moteurs à gaz, à pétrole ou à poussière de charbon (chap. XXV), ils ne constituent à proprement parler que des modes spéciaux d'échauffement d'une machine à air chaud.

que l'on a intérêt, sous ce rapport, à élever la température de la source chaude. Or l'équation-typique des gaz parfaits nous montre que, pour ces fluides, la pression croît (à volume constant) proportionnellement à la température absolue, tandis que, avec la vapeur saturée, elle dépend de cette variable d'après une exponentielle à double étage; ce qui lui confère une rapidité d'accroissement énormément plus accusée.

Comme il convient (nº 384), en vue de ménager le mécanisme des moteurs à air chaud, de ne pas élever θ_1 au delà de 273, c'est-à-dire t_1 au delà de 2×273, la pression n'y dépassera jamais deux atmosphères absolues, ou une atmosphère effective. Au contraire, si l'on extrapolait la formule de Regnault (123) jusqu'à une telle température, elle indiquerait une tension de 57 atmosphères absolues, ou 56 effectives. La tendance à la rupture des enveloppes serait donc, à cette limite extrême, 56 fois moindre pour la machine à air chaud que pour le moteur à vapeur. Sans atteindre de pareils écarts, ni même en approcher, on voit que l'excès de tension de ce dernier appareil nécessitera des surépaisseurs, et des poids correspondants.

508 — En ce qui concerne le coefficient économique spécifique ε_1, la vapeur présente, au contraire, un avantage marqué, en raison de la facilité qu'elle procure pour réaliser les isothermes du cycle de Carnot; puisque c'est le propre de cet agent, quand la permanence de la pression est assurée par les soupapes de sûreté, de présenter par cela même une température constante.

En revanche l'adiabaticité, qui forme la seconde base essentielle du cycle de Carnot, est beaucoup moins bien assurée qu'avec l'air, attendu que ce dernier, assez mauvais conducteur, est peu propre à transmettre rapidement dans toute sa masse l'impression calorifique des parois, dès qu'une sorte de fourreau gazeux a subi pour son propre compte leur influence. Au contraire, la vapeur saturée est beaucoup plus impressionnable et plus instable. Dès qu'une pellicule de ce fluide a disparu le long du métal par voie de condensation, une seconde couche, identique à la précédente, se retrouve au contact de ce dernier.

La balance entre ces deux effets opposés paraît du reste conduire à un résultat satisfaisant, puisque nous avons reconnu que l'on peut compter pour ε_1, avec la vapeur, sur une valeur de 90 °/₀ au moins.

509 — Relativement au coefficient économique thermique ε_1, l'on peut remarquer que le peu de conductibilité de l'air le rend plus difficile à échauffer, et qu'il expose à de plus grandes pertes de chaleur. Le peu de densité du fluide exige, pour faire intervenir des masses de quelque importance, de plus grands générateurs qu'avec l'eau [1]. De là un rayonnement et des pertes par conductibilité plus marquées. Les moteurs à air chaud seront, pour ce motif, contre-indiqués dans les circonstances où l'on dispose d'un emplacement limité, comme dans la marine.

510 — A l'égard de ε_3, qui est d'un ordre purement mécanique, la différence sera peu marquée. On peut faire observer toutefois que les lourdes masses en mouvement occasionnent des frottements qui leur sont proportionnels, d'où un affaiblissement du rendement plus accusé pour la machine aérothermique.

On avait fondé, dans le principe, beaucoup d'espoir sur cette circonstance que les gaz parfaits ne donnent pas lieu à un travail interne, tandis qu'il en faut fournir pour constituer la vapeur. Mais cet argument s'évanouit devant cette considération que, les appareils fonctionnant dans un cycle fermé, l'énergie interne reprend nécessairement la même valeur, quelles que soient les vicissitudes par lesquelles elle a pu passer dans l'intervalle.

511 — Il convient d'ajouter que le rendement, malgré l'importance si grande qu'il présente pour l'industrie, n'est pas la seule considération qui doive entrer en ligne de compte dans le choix d'une machine. Or on peut citer à l'actif de la vapeur d'eau les avantages suivants :

Elle n'est pas oxydante pour le métal autant que l'air, surtout lorsque ce dernier se trouve porté à des températures élevées.

[1] Cette circonstance se concilie parfois assez convenablement avec l'emploi de combustibles encombrants et d'un faible pouvoir calorifique, tels que la tourbe, le bois, la tannée, etc.

Elle adoucit et conserve les garnitures, que l'air chaud tend à dessécher et à durcir.

Elle ménage les graisses, que l'air a pour effet de calciner et de réduire à un résidu charbonneux, capable de déterminer le grippement des surfaces.

L'air est plus subtil que la vapeur. On a beaucoup de peine, avec lui, à maintenir les joints étanches. Les soupapes de sûreté tiennent mal la pression.

Les périodes d'arrêt de la machine à air chaud introduisent une difficulté spéciale. En raison de la faible masse du fluide stationnaire, qui ne saurait emmagasiner beaucoup de calories, l'appareil se trouve rapidement porté au rouge, à moins que le chauffeur ne fasse tomber le feu, ce qui présente ensuite d'autres inconvénients pour reprendre l'allure. La masse d'eau qui se trouve renfermée dans la chaudière, parfois en quantité considérable, forme à cet égard un régulateur beaucoup plus satisfaisant.

512 — En revanche, l'air se trouve partout, tandis qu'il n'en est pas de même de l'eau; surtout quand on exige qu'elle soit suffisamment pure.

L'air ne coûte rien; l'eau exigera toujours des aménagements plus ou moins dispendieux.

Sa composition est constante; tandis que l'eau se charge, en proportions variables, de diverses substances solubles, qui sont de nature, en s'accumulant dans les chaudières, à y constituer des dépôts gênants et redoutables.

Avec la machine à air, les explosions demeurent insignifiantes. Si un générateur vient à se rompre, la pression se détend facilement, et l'appareil se trouve immédiatement désarmé. Avec des chaudières à eau, chaque kilogramme liquide renferme pratiquement de 100 à 200 calories, dont chacune équivaut à 424 kilogrammètres. Or chaque mètre cube de capacité renferme un millier de ces kilogrammes. De là une puissance de destruction formidable, si un accident la fait entrer subitement en jeu (1).

(1) Cette influence se trouve à la vérité très atténuée dans une catégorie spéciale de générateurs qui renferment relativement peu d'eau, et sont désignés dans l'industrie

La mise en pression du générateur à air est plus rapide, en raison de son peu de masse.

La mise hors feu, qui laisse perdre par le refroidissement la provision de chaleur accumulée, n'occasionne, avec ce type d'appareils, qu'un déficit beaucoup moindre.

Ces divers avantages sont sérieux. Ils expliquent que les moteurs à air chaud aient eu leur heure d'un engouement qui n'est pas encore arrivé à son terme de l'autre côté de l'Atlantique. Sur notre continent, ces appareils n'ont jamais pris, au contraire, qu'un développement insignifiant, si on le compare à l'énorme expansion qu'a reçue la machine à vapeur. Il convient cependant de faire à cet égard une exception pour la catégorie spéciale des machines à gaz (chap. XXV), auxquelles leurs nombreux avantages (n° 414) ont procuré un grand essor, qui tend à s'affirmer tous les jours davantage.

§ 2

AÉRO-VAPEURS

513 — On a essayé de combiner dans un même moteur l'emploi simultané des deux agents que nous venons d'examiner comparativement, à savoir : la vapeur d'eau et l'air chaud. Ce système est aujourd'hui fort délaissé.

Le point de vue auquel s'étaient placés les inventeurs visait principalement l'adiabaticité. La conductibilité des surfaces métalliques détermine, avec la vapeur saturée, une précipitation sur la paroi. La vapeur se trouvant ainsi supprimée au contact sur une certaine épaisseur, laisse subsister dans cette région une certaine quantité d'air, qui formera une sorte de gaine peu conductrice, propre à préserver dans une certaine mesure la masse générale du fluide.

par l'épithète d'*inexplosibles*. La chaudière Belleville est l'une des plus connues. Le générateur Serpollet constitue la dernière expression de cette circonstance spéciale, ainsi qu'on le verra dans la cinquième Partie de ce Cours.

Des expériences ont été exécutées dans cette voie par Reynolds[1]. Elles ont accusé un retard de la condensation qui s'accroît avec la proportion de l'air, jusqu'à ce que celle-ci atteigne le chiffre de 30 %. Au delà de ce point, elle cesse d'augmenter. Pratiquement même on ne dépassait pas 10 % dans les machines en marche industrielle. Une quantité d'air plus considérable entraverait notamment le fonctionnement de l'injecteur Giffard. Dans tous les cas, ce système est exclusif de l'emploi du condenseur, dont il surchargerait d'une manière inadmissible la pompe à air.

514 — Dans l'*aéro-vapeur Warsop*, on injecte de l'air chaud au sein de la chaudière à vapeur à l'aide d'une pompe. Ce fluide commence par circuler à travers les barreaux creux de la grille, afin d'atténuer leur température en les préservant ainsi d'une destruction rapide. En même temps, il recueille pour lui-même ces calories, qu'il apporte dans la chaudière, en évitant d'y faire tomber la pression par suite du refroidissement.

Dans d'autres types, l'air est refoulé à travers un serpentin installé au milieu de la boîte à fumée, de manière à dépouiller autant que possible les gaz brûlés du calorique qu'ils entraînent en pure perte dans l'atmosphère. On réalise ainsi une certaine économie de combustible.

Un tube percé de petits trous règne le long de la génératrice inférieure du corps cylindrique, et distribue d'une manière régulière dans la masse liquide cet air chauffé à 300 ou 350 degrés. L'inventeur estime que l'agitation produite par ce dégagement est de nature à empêcher, au moins dans certains cas, l'entartrement des chaudières, en maintenant les dépôts à l'état sableux.

On lui attribue aussi le pouvoir de faciliter l'ébullition, et d'empêcher les soubresauts dangereux qui tendent à se produire lorsque l'eau cesse de mouiller certains dépôts, et passe, d'après M. Bou-

(1) Reynolds. *Société royale de Londres*, mai 1873. — Moutier. Sur la détente d'un gaz saturé de vapeur. *Bulletin de la Société Philomathique*, 10 janvier, 14 février 1880. — Bergeron. *Congrès de Bordeaux de l'Association française pour l'avancement des sciences*, p. 202. — Furno. *Bulletin de la Société des anciens Élèves des Écoles d'arts et métiers*. — Burg. *Traité des Chaudières*. — Henderson. *Journal of Franklin Institute*, 1873.

tigny, à l'état sphéroïdal, ou quand on évapore des dissolutions salines, telles que l'eau de mer successivement rapprochée par la volatilisation.

On rencontre des éléments analogues dans l'*aéro-vapeur simplex de Davey* (¹).

515 — On peut rattacher au même ordre d'idées l'emploi de la *bouillotte Mékarski*, dont nous avons parlé ci-dessus (nº 347). En réchauffant l'air par son passage à travers une certaine quantité d'eau maintenue sous pression à une température supérieure à 100 degrés, on imprègne ce fluide d'une certaine quantité de vapeur, qui vient travailler avec lui dans le cylindre; et l'on évite en même temps les inconvénients qui résulteraient de la congélation de la neige et de la glace dans les mécanismes.

La *machine à nuage blanc de Marchant* (²) était encore plus compliquée. L'air s'y trouvait comprimé plusieurs fois de suite, avec refroidissement intermédiaire au milieu d'une masse d'eau, dans le sein de laquelle il se chargeait successivement d'humidité. Il était finalement chauffé à l'aide d'un serpentin avant son admission dans le cylindre moteur.

Les *machines à foyer fermé et à vent forcé* ont été indiquées originairement par Belou, puis réalisées par Pascal (³), et perfectionnées par M. Dufaÿ, ingénieur de la marine. Le foyer est complètement isolé. Il reçoit le combustible à l'aide d'un sas, moyen d'alimentation qui évite (pour le dire en passant) le refroidissement dû à l'ouverture des portes, et au courant d'air qui s'établit momentanément du foyer à la cheminée. Le vent est donné à la fois au-dessus et au-dessous de la grille par un système de tuyères, en consommant pour cet objet une partie de la force motrice. L'eau est fournie par un pulvérisateur au ciel du foyer. Les produits, gaz brûlés et vapeur d'eau, s'engagent ensemble dans le cylindre moteur, en y entraînant malheureusement des cendres et des escarbilles, qui encrassent et rayent les surfaces. L'on s'efforce d'ar-

(¹) *Portefeuille économique des machines*, 1881, p. 22.
(²) *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, t. XXVIII, p. 465.
(³) *Génie industriel*, janvier 1861, p. 37.

rêter en route ces dernières (n° 328) au moyen de chicanes et de gouttières renversées, destinées à barrer le passage aux *fines* qui montent le long des parois. Le jeu du pulvérisateur est parfois un

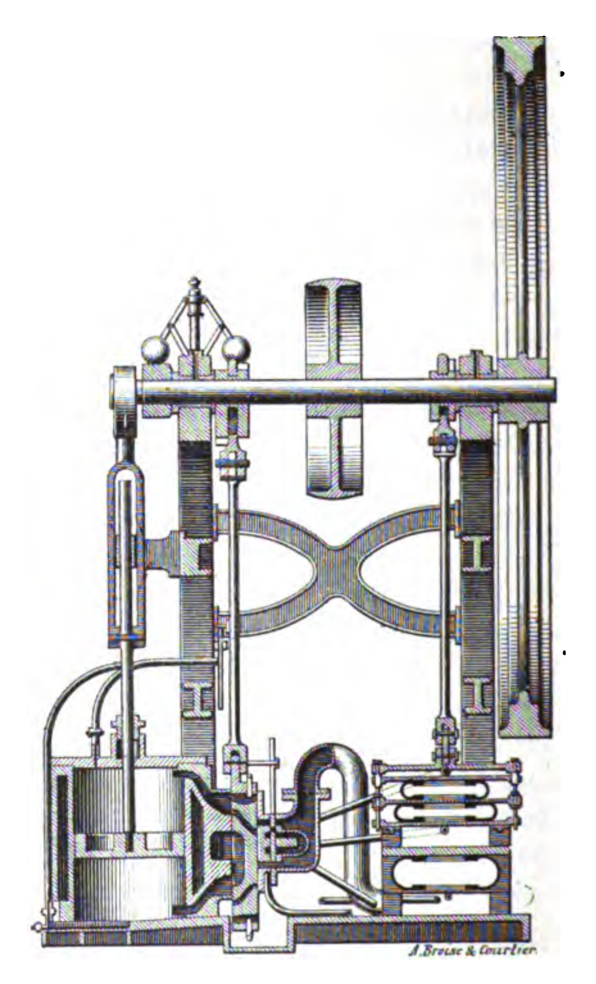


Fig. 290. — Moteur à gaz Hugon (coupe verticale).

peu incertain. S'il lance trop d'eau, le feu s'éteint; si ce liquide n'est pas en quantité suffisante, la température devient excessive, brûle les graisses et fait gripper le piston.

La vapeur d'eau se retrouve encore dans la *machine à gaz de*

Hugon [1], dans le but d'amortir la température excessive de l'inflammation, en soustrayant à la masse les calories nécessaires pour la vaporisation de l'eau. Ce liquide est injecté par un pulvérisateur avant la déflagration du mélange (fig. 290). On remarquera qu'il ne s'agit plus dans ces derniers exemples, comme au commencement de ce paragraphe, d'une quantité relativement faible d'air noyée dans une masse prépondérante de vapeur. Les termes de la question sont maintenant renversés.

On rencontre une donnée identique dans le *moteur Éclipse* et dans la *machine de Boulton*.

§ 3

MACHINES A VAPEUR SURCHAUFFÉE

516 — Nous pouvons théoriquement envisager comme un intermédiaire entre la machine à vapeur saturée et le moteur à air chaud, l'emploi de la vapeur surchauffée [2]. Ici encore, c'est l'eau

[1] Tresca. *Annales du Conservatoire des arts et métiers*, 1866. — Résal. *Mécanique générale*, t. IV. p. 442. — Hirsch. *Rapports de la Commission internationale de l'Exposition universelle de* 1878, groupe VI, classe 54, p. 305. — Sciama. *Moteurs industriels*, p. 219. — Haton de la Goupillière. *Revue des Cours scientifiques*, 18 ma 1867.

[2] Leloutre. Machine à vapeur surchauffée de M. Hirn. *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, 29 août 1865. — Cazin et Hirn. Mémoire sur la détente de la vapeur surchauffée. *Annales de chimie et de physique*, 1867, 4e série, t. X, p. 349. — Croullebois. Détente de la vapeur surchauffée. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXI, p. 592. — Testud de Beauregard. Application de la vapeur surchauffée. *Cos mos*, t. XX, p. 109. — Armengaud. *Traité des moteurs à vapeur*, t. II, p. 458. — *Génie industriel*, septembre 1862. — Surchauffe. *Dictionnaire des arts et manufactures*. — Hirn. *Exposition analytique et expérimentale*, t. II, p. 118. — Couche. *Voie, matériel roulant et exploitation technique des chemins de fer*, t. III, p. 789. — Briot. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 120. — Combes. *Principes de la théorie mécanique de la chaleur*, p. 204. — Callon. *Cours de machines*, t. I, p. 401. — Mallet. *Étude sur les machines marines*, p. 27.

Rankine. *Steam engine*, 1876, p. 428. — Fairbairn et Tate. On the law of expansion of superheated steam. *Philosophical Transactions*, t. CLII, p. 591. — Zeuner (Ueber das Verhalten der ueberhitzten und der gemischten Wasserdampfe. *Civil Ingenieur*, t. XIII, 1867. — *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 420. — *Journal de la Société des Ingénieurs allemands*, t. XI, p. 1867).

qui sert de véhicule à la chaleur, mais la vapeur, après avoir été formée au moyen d'un générateur ordinaire, vient recevoir un coup de feu dans un serpentin qui se trouve placé à l'intérieur de la boite à fumée [1], à une distance assez grande du liquide pour que, grâce à la vitesse du courant, elle puisse en être considérée comme effectivement détachée, sans quoi elle resterait forcément saturée. Dans les machines compound, la séparation est encore plus nette, et l'on surchauffe la vapeur pendant son trajet du petit au grand cylindre [2].

Le fluide s'éloignant ainsi de la saturation, l'on se place en quelque sorte sur le chemin des propriétés asymptotiques qui caractérisent les gaz parfaits. Ce simple aperçu suffit pour concevoir que quelques-uns des avantages qui ont été signalés ci-dessus (§ 1) comme appartenant aux moteurs à air chaud, puissent être réalisés en partie, sans abandonner cependant les qualités accessoires qui sont propres à la vapeur d'eau.

Le bénéfice le plus net consiste en ce que ce fluide, en acquérant, par sa séparation de son liquide, la faculté de se charger de nouvelles calories, se trouve en état, comme l'air de l'aéro-vapeur (n° 514), de recueillir une partie de la chaleur que les produits de la combustion sont en train d'emporter en pure perte au dehors. On améliore d'autant le coefficient économique calorifique ε_2.

Le facteur ε_1 est influencé de son côté, attendu que le cycle effectif se rapproche mieux des adiabatiques du cycle de Carnot. En effet la vapeur surchauffée, lorsqu'elle se trouve au contact d'une paroi froide, a une certaine étendue de l'échelle thermométrique à parcourir, avec une faible perte de chaleur, avant d'arriver à la saturation, où elle se dépouille d'un seul coup, par sa condensation, de tout le calorique r. Par compensation, à la vérité, les isothermes

[1] On a parfois employé à cet effet une enveloppe de vapeur. Mais l'on ne saurait obtenir ainsi qu'une simple dessiccation de l'humidité entraînée, et non une surchauffe réelle de l'ensemble, puisque la température ne peut être qu'inférieure à celle de la chaudière.

[2] Il existe encore d'autres moyens de surchauffer la vapeur. On peut, par exemple, avoir recours à la compression, à l'aide d'un travail extérieur; ou à la dilatation sans production de travail externe. Mais le chauffage direct est le seul mode qui soit employé industriellement dans les machines, bien que certaines circonstances accessoires de la distribution se rattachent à l'un ou l'autre des deux modes précédents.

seront plus difficiles à maintenir que dans la machine à vapeur saturée.

On obtient, enfin, une certaine amélioration du fait de ε, puisque la température peut être portée plus haut qu'avec la vapeur, sans exagérer autant la pression.

La surchauffe, en supprimant l'humidité entraînée par la vapeur, et diminuant, ainsi qu'il vient d'être dit, les condensations sur les parois, restreint pour ce double motif la précipitation d'eau liquide, dont nous avons détaillé ci-dessus les inconvénients au point de vue thermique (n° 499), et qui expose à des coups d'eau capables de faire sauter les fonds du cylindre, si l'on ne manœuvre pas en temps utile les purgeurs.

517 — Au point de vue théorique, les lois de la vapeur surchauffée manquent encore d'une précision suffisante pour nous permettre d'y asseoir une doctrine certaine relativement à l'emploi de cet agent [1]. On ne peut que procéder d'une manière approximative, en faisant une hypothèse sur la chaleur spécifique à pression constante C′ de la vapeur surchauffée. Indiquons la marche à suivre à cet égard.

Nous écrirons à cet effet l'équation de Clausius (n° 438), en égalant à zéro l'entropie du cycle fermé que parcourt le kilogramme moteur, depuis sa sortie de la chaudière jusqu'à son retour à ce point de départ pour s'y volatiliser de nouveau.

[1] M. Hirn a formulé une loi, d'après laquelle l'énergie intérieure U d'une vapeur surchauffée varie proportionnellement au produit pv, depuis le point de condensation jusqu'à ce qu'elle puisse être assimilée à un gaz parfait. La rigoureuse exactitude de cet énoncé a été révoquée en doute par M. Zeuner, bien qu'il la trouve concordante avec le degré de précision des expériences actuelles (*Théorie mécanique*, p. 450). Ce dernier auteur admet que l'adiabatique de la vapeur surchauffée a pour équation :

$$pv^{\frac{4}{3}} = \text{const.},$$

(*Théorie mécanique*, p. 448). La courbe isotherme serait, d'après lui :

$$pv - Cp^{\frac{1}{4}} = Rt.$$

M. Ledoux a rattaché par le calcul ces deux équations l'une à l'autre (*Annales des mines*, juillet-août 1878, p. 176).

1° La volatilisation exige la quantité de chaleur r_1, à la température constante t_1 du générateur ; d'où l'entropie :

$$\frac{r_1}{t_1}.$$

2° La surchauffe consomme à chaque instant, sous la même pression constante [1], l'élément calorifique $C'dt$; d'où l'entropie élémentaire $\frac{C'dt}{t}$, qu'il nous faut intégrer depuis t_1 jusqu'à la température t' de la surchauffe :

$$\int_{t_1}^{t'} \frac{C'dt}{t}.$$

3° La détente est supposée adiabatique. Elle n'a donc pas d'entropie.

4° Cette détente, en refroidissant la vapeur, l'a rapprochée progressivement de la saturation, que celle-ci a fini par atteindre. A partir de là se produira la condensation partielle (n° 486) d'une quantité de vapeur $1 - x_2$, de telle sorte qu'il ne reste plus à la fin que le poids inconnu de vapeur x_2. Cette masse possède encore la chaleur de vaporisation $r_2 x_2$, qu'elle cède finalement au condenseur pendant le refoulement dans cette enceinte. Si nous en confondons la température avec t_2, l'entropie de cette période isotherme sera :

$$-\frac{r_2 x_2}{t_2}.$$

5° Une compression adiabatique refoule le liquide dans la chaudière. L'entropie est nulle.

6° Le corps se réchauffe alors de t_2 à t_1, en consommant graduellement des quantités de chaleur $d\mu$, à des températures croissantes t ; d'où l'entropie :

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t}.$$

(1) En supposant une libre communication avec la chaudière.

L'équation de Clausius devient donc, en réunissant ces différents termes :

$$\frac{r_1}{t_1} + \int_{t_1}^{t'} \frac{C'dt}{t} - \frac{r_2 x_2}{t_2} + \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t} = 0.$$

Elle nous fournit x_2, teneur en vapeur à la fin de la détente, qui était restée inconnue :

$$r_2 x_2 = t_2 \left[\frac{r_1}{t_1} + \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t} + \int_{t_1}^{t'} \frac{C'dt}{t} \right].$$

518 — Évaluons actuellement la quantité de chaleur qui a été convertie en travail.

Le kilogramme moteur a d'abord reçu, sous la forme liquide, le calorique $\mu_1 - \mu_2$ pour le porter de la température t_2 à t_1. En second lieu, il lui a fallu r_1 pour se volatiliser. Puis on lui a communiqué, pendant la surchauffe, le total $\int_{t_1}^{t'} C'dt$.

De cet ensemble, la quantité $r_2 x_2$ est seule parvenue au condenseur. La chaleur utilisée dans la machine est donc :

$$\mu_1 - \mu_2 + r_1 - r_2 x_2 + \int_{t_1}^{t'} C'dt,$$

ou, en remplaçant $r_2 x_2$ par sa valeur :

$$\mu_1 - \mu_2 + r_1 + \int_{t_1}^{t'} C'dt - t_2 \left[\frac{r_1}{t_1} + \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t} + \int_{t_1}^{t'} \frac{C'dt}{t} \right].$$

Si maintenant nous nous reportons à l'expression (141) qui a été trouvée pour la chaleur utilisée à l'aide de la vapeur saturée sèche :

$$(143) \qquad \mu_1 - \mu_2 + r_1 \left(1 - \frac{t_2}{t_1} \right) - t_2 \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\mu}{t},$$

on reconnait, en prenant la différence, que l'excédent d'effet

utile réalisé dans le cas actuel se résume dans l'expression :

$$\int_{t_1}^{t'} \left(1 - \frac{t_2}{t}\right) C'dt.$$

L'avantage *proportionnel* serait marqué par le quotient de ces deux dernières fonctions.

519 — Ainsi que nous l'avons annoncé, nous ne pouvons achever le calcul, en l'absence de connaissances certaines, qu'en faisant sur C' l'hypothèse qui paraîtra la plus plausible.

Considérons simplement ce coefficient comme constant et égal à 0,48 (¹). Dans ces conditions, la dernière intégrale devient :

$$(144) \qquad 0,48\left(t' - t_1 - t_2 L \frac{t'}{t_1}\right).$$

Si, pour prendre un exemple, on suppose un condenseur à 40 degrés, une chaudière à 5 atmosphères, ou 152 degrés, et une surchauffe à 300 degrés (²) du thermomètre usuel, nous devrons faire :

$$t_2 = 313, \qquad t_1 = 423, \qquad t' = 573.$$

L'expression (144), multipliée par E, représente pour l'unité de poids :

$$10250^{\text{kgm}}.$$

Comme on a d'ailleurs :

$$\mu_1 - \mu_2 = 112, \qquad r_1 = 499,$$

la fonction (143), multipliée par E, a pour valeur :

$$62528^{\text{kgm}}.$$

(¹) La moyenne des nombres fournis par les expériences de Regnault est 0,48051.

(²) En pratique, il est difficile de dépasser 220 degrés, sous peine de brûler les garnitures, en déterminant le grippement des pistons et des tiroirs.

Le rapport de ces deux nombres est 0,16. La surchauffe, dans ces conditions moyennes, donnerait donc théoriquement un bénéfice d'un sixième environ [1].

§ 4

MACHINES A ACIDE CARBONIQUE

520 — *Acide carbonique.* — Nous avons actuellement épuisé toute la série des applications thermiques de l'air et de l'eau. Mais l'imagination des inventeurs ne s'en est pas tenue à ces deux fluides, et s'est encore donné carrière sur un assez grand nombre d'autres corps, en vue de les utiliser comme véhicules de la chaleur.

Si nous revenons au type de la machine à vapeur saturée pure et simple, nous pourrons citer l'emploi sous cette forme de l'*acide carbonique liquéfié* [2]. Lorsque, entre les mains de Thilorier, ce gaz cessa d'être incoercible, Brunel conçut l'idée de le substituer à l'eau comme agent des machines motrices, afin d'utiliser son énorme tension de vapeur [3].

En 1855, Ghilliano et Cristin [4] reprirent cette idée dans les con-

[1] On remarquera qu'il ne s'agit ici que d'un simple exemple numérique, évalué à un point de vue abstrait, auquel la pratique viendra mêler des correctifs de diverses sortes Il ne faut donc pas trop s'étonner de l'extrême divergence des vues qui ont été émises sur ce sujet. Tandis que Briot (*Théorie mécanique de la chaleur*, p. 123) regarde l'emploi de la vapeur surchauffée « comme l'un des perfectionnements les plus importants qui « aient été apportés à la machine à vapeur » ; M. Pochet (*Nouvelle mécanique industrielle*, p. 144) estime que « à aucun point de vue la surchauffe ne procure d'avantage. Elle « crée au contraire des inconvénients réels qui se traduisent par une perte de rende- « ment. Aussi ne paraît-elle appelée à aucune espèce de succès pratique. » M. Moutier (*La thermodynamique et ses principales applications*, p. 293) apprécie de la manière suivante l'état actuel de la question : « Il ne faut pas songer à établir *a priori* une « théorie de la machine à vapeur d'eau surchauffée. L'étude expérimentale de cette « machine est nécessaire pour renseigner sur ce point important : Est-il avantageux de « surchauffer la vapeur ? »

[2] Clausius a fourni les données numériques relatives à ce gaz dans un article inséré au recueil *La Lumière électrique*, t. XVII, p. 241.

[3] Brunel. *L'Industriel*, 1827. — Laboulaye. *Dictionnaire des arts et manufactures*.

[4] Armengaud. *Traité des moteurs*, t. II, p. 457. — De Graffigny. *Les Moteurs anciens et modernes*, p. 274.

ditions suivantes (fig. 291). Un canon épais en fer forgé et embouti renferme le liquide. Le cylindre-moteur est chauffé au bain-marie à la température de 90 degrés. Le retour du piston refoule le gaz dans un condenseur de surface, qui est formé d'un serpentin environné d'eau froide. Une pompe y reprend le liquide, et le refoule

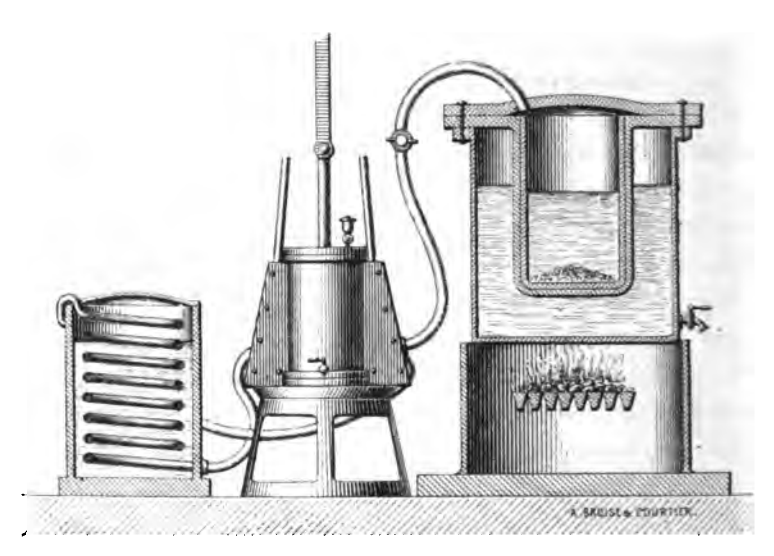


Fig. 291. — Moteur Ghilliano et Cristin à acide carbonique (coupe verticale).

dans le réservoir, où il termine le cycle de son évolution. Les épaisseurs et la qualité du métal doivent être à toute épreuve, car les pressions sont formidables. Lorsque le bain-marie atteint une température de 100 degrés, la tension est de 158 kilogrammes par centimètre carré.

Le prix de revient assez élevé du liquide importerait peu au fond dans la circonstance actuelle ([1]), car c'est toujours la même quantité qui fonctionne, et il y a lieu tout au plus de réparer de temps en temps les pertes. Mais l'idée fondamentale qui avait conseillé son emploi manquait de justesse. La pression gigantesque qui

([1]) Ce prix s'est du reste beaucoup abaissé dans ces derniers temps (*Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 27 février 1885). Je noterai ici, à ce propos, que l'on a installé, sur un point de dégagement naturel de ce gaz, dans la vallée du Rhin, une fabrication d'acide carbonique liquide, en vue de diverses applications, et notamment pour celles qui intéressent les brasseries.

avait évidemment séduit l'inventeur présente peu d'avantages, en même temps qu'elle expose aux plus grands dangers. Nous savons en effet que le coefficient ε qui règle le rendement ne dépend que de l'écart des températures extrêmes, lesquelles sont précisément très rapprochées dans ce programme. Ce n'est d'ailleurs assurément

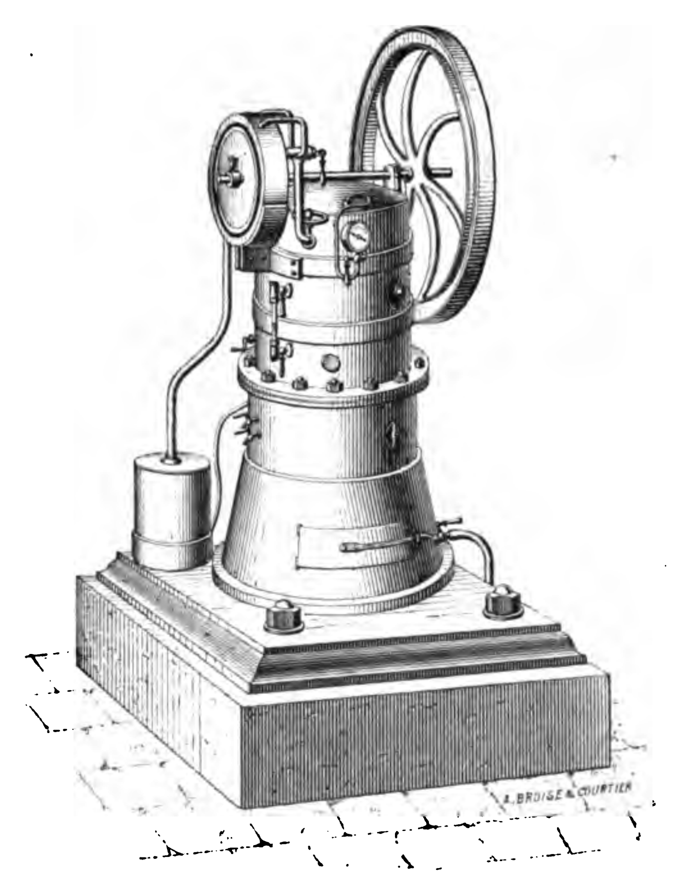


Fig. 292. — Moteur Marquis à acide carbonique (vue perspective).

pas d'après des considérations accessoires, de nature à influencer les autres facteurs ε_1, ε_2, ε_3 du rendement, que l'on pourrait, dans des conditions aussi défavorables, espérer racheter cette infériorité fondamentale. On n'aperçoit *a priori* qu'un seul avantage : le volume extrêmement réduit du récepteur, pour une puissance déterminée.

M. Marquis [1] a néanmoins insisté de nouveau sur cette idée. Son moteur rotatif (fig. 292) est contenu dans un petit cylindre placé au sommet du dôme qui constitue la chaudière, et au pied duquel se trouve le condenseur renfermant le serpentin.

Un essai plus récent paraît avoir eu lieu sur les tramways de Chicago [2]. Le chargement ne demande que seize minutes pour fournir à un service de six heures, sans bruit, sifflement, fumée, vapeur, flammèches ni escarbilles répandues sur la voie publique, circonstances impossibles à éviter avec les tramways à vapeur.

M. Mékarski a également présenté un projet analogue en 1884 [3].

521 — *Alcool, éther, gaz ammoniac.* — En dehors de l'acide carbonique, on a essayé divers liquides volatils ou gaz liquéfiés.

Cartwright en 1797, et plus récemment MM. Tissot [4], Beghin [5], le docteur Herr, ont proposé des machines à vapeur d'alcool ou d'éther, espérant retirer des propriétés de ces corps certains avantages spéciaux. On a également essayé le gaz ammoniac, liquéfié par la pression en dehors de la présence de l'eau [6].

D'une manière générale, on peut rappeler à cet égard le théorème de Carnot, d'après lequel la nature du corps véhicule de la chaleur reste sans influence sur le rendement, sous tout autre rapport que celui des températures qu'il peut permettre d'atteindre pratiquement. Tel est précisément le côté saillant de la substitution de l'air à l'eau (n° 507), et le principal objectif à ne pas perdre de vue dans la voie en question, qui paraît du reste devoir être peu féconde; les propriétés des corps les plus répandus étant déjà très complètement connues.

522 — *Vapeur de pétrole.* — Ajoutons cependant que la va-

(1) De Graffigny. *Les Moteurs anciens et modernes*, p. 277.

(2) *Moniteur industriel*, 10 juin 1886, p. 181. — *Courrier de Londres*, 1886.

(3) *Congrès de Blois de l'Association française pour l'avancement des sciences*, p. 155.

(4) Tissot. Mémoire sur une nouvelle machine à vapeur d'éther. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLV, p. 525.

(5) Beghin. Machine propre à tirer avantageusement parti de la force expansive de la vapeur d'éther sulfurique. *Ibidem*, t. LII, p. 1025.

(6) Il ne faut pas confondre ces moteurs avec ceux qui feront l'objet du paragraphe 6, et qui reposent sur l'emploi d'une solution aqueuse d'ammoniaque.

peur de pétrole a paru se recommander par une circonstance spéciale : l'excellente lubrifaction qu'elle entretient dans les organes. En outre, la faiblesse de sa chaleur spécifique permet d'effectuer sa condensation à l'aide de surfaces refroidissantes inférieures à celles que réclame la vapeur d'eau.

M. Yarrow de Londres a construit un *moteur à vapeur de pétrole* (¹) qui diffère essentiellement des moteurs à pétrole examinés ci-dessus (nº 428). Cet hydrocarbure ne figure dans les précédentes machines qu'à titre de combustible incessamment renouvelé, et destiné à échauffer l'air, qui forme alors le véritable véhicule dilatable de chaleur. Ici, au contraire, l'essence de pétrole sert elle-même de véhicule pour le calorique ; et une quantité déterminée de ce fluide, toujours la même, se trouve enfermée dans l'appareil, où elle accomplit son cycle de transformations.

L'essence employée a pour densité 0,72. Pour plus de simplicité, l'on se sert en même temps de pétrole comme combustible, à bord de l'embarcation sur laquelle a été installé ce moteur. Il marche à 5 kilogrammes de pression, avec une consommation de 2 litres par cheval et par heure. En estimant le prix de l'essence à 0 fr. 10 le litre, le cheval-heure ressortirait à 0 fr. 20, c'est-à-dire beaucoup plus cher qu'avec la houille et les conditions ordinaires. Ce n'est donc pas au point de vue de l'économie, mais seulement d'après certains avantages accessoires que pourrait se recommander ce récepteur.

§ 5

MACHINES A VAPEURS COMBINÉES

523 — En restant encore sur le terrain des vapeurs saturées, il nous reste à parler des *machines à vapeurs combinées* (²). On peut

(¹) *La Nature*, 21 juillet 1888, p. 113. — *Chronique industrielle*, 1ᵉʳ et 29 juillet 1888. — *Génie civil*, t. XIII, p. 173, 217. — *The Engineer*, 25 mai 1888. — *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, mai 1888, p. 680 ; août 1888, p. 348.

(²) Stapfer (Utilisation des vapeurs autres que la vapeur d'eau. *Bulletin de la Société scientifique et industrielle de Marseille*, 1880, p. 187. — Amiral Pâris. *Traité de l'hélice propulsive*. — *Publication industrielle* d'Armengaud, t. V. — *Les Mondes*, t. LV,

se figurer un tel appareil comme constituant *une série* de moteurs que la chaleur parcourt successivement, en passant de l'un dans l'autre. Le condenseur de chacune d'elles constitue le générateur de la suivante; et le liquide refroidissant pour la précédente, devient, pour celle qui lui succède, le véhicule de la chaleur qu'il vient de soustraire à sa conjuguée. Il va sans dire que ces liquides successifs (si, pour mieux mettre le principe en évidence, nous concevons un nombre quelconque de moteurs, lequel en réalité s'est toujours réduit à deux) doivent être de plus en plus volatils. De cette manière, lorsque la température de la première substance s'est abaissée au point que sa tension de vapeur vient à défaillir complètement, et n'est plus capable d'exercer un effort de quelque importance sur un piston, on fait passer la chaleur dans un autre corps qui, pour cette même gamme de températures, possède en propre une pression beaucoup plus nette, et souvent même considérable.

Le premier terme d'un tel accouplement est toujours la vapeur d'eau. Du Trembley, initiateur de ce principe, utilisa comme second liquide, à diverses époques, l'éther sulfurique [1], ou le chlorure de carbone; M. Lafond, le chloroforme [2]; M. Frot, l'esprit de bois [3]; M. Ellis, le sulfure de carbone [4]. On a également proposé l'emploi de l'alcool, du chlorure de méthyle, de l'acide sulfureux liquide.

p. 671. — *Revue industrielle*, 1881, p. 281). — Babrock. Remplacement de la vapeur d'eau comme force motrice. *Bulletin de la Société des ingénieurs civils*, janvier 1887, p. 154. — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*. Traduction de M. Gustave Richard, p. 470. — Haton de la Goupillière. *Revue des travaux scientifiques*, t. II, p. 596.

[1] Sur le navire qui portait son nom, en 1840. Une machine fixe de ce genre a également fonctionné à la cristallerie de la Guillotière, à Lyon.

Paul-Vincent du Trembley (*Manuel du constructeur de machines à vapeurs combinées ou machines binaires*, Lyon, 1850. — Machines à vapeur combinées. *Annales des mines*, 5e série, t. IV, p. 203, 281). — *Rapport* de Georges Rennie, 1852. — *Rapport* lithographié de E. Gouin sur l'essai du navire *le Brésil*, 1855. — James Janneson. *Mémoire à l'Institution des ingénieurs civils de Londres*, février 1859.

[2] Sur le navire *le Galilée*. — Du Trembley. Application du chloroforme aux machines binaires. *Annales des mines*, 5e série, t. IV, p. 219.

[3] *Bulletin de l'Association scientifique de France*, mars 1870, p. 170.

[4] Sonnet. *Dictionnaire de mathématiques pures et appliquées*, p. 736. — Boca. *Congrès de Blois de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 1884, p. 155. — Rankine. *Manuel de la machine à vapeur*, note de M. G. Richard, p. 683. — Machine Robert Lake. — Machine Félix Roland.

Les corps très volatils présentent malheureusement en général le défaut de l'inflammabilité, redoutable surtout à la mer, nécessitant l'emploi des lampes de sûreté dans les soutes des machines, et exposant à des explosions si des fuites de vapeur arrivent sur le feu nu des foyers. Leur grande subtilité détermine en effet, à travers les joints, des fuites dangereuses et des pertes anti-économiques. Leur toxicité est nuisible aux mécaniciens. Plusieurs cas d'asphyxie ont été signalés; et il devenait alors nécessaire, pour parvenir jusqu'aux victimes et les retirer de ce milieu délétère, de se munir des appareils de mines destinés à ménager l'accès des milieux irrespirables ([1]). Quelques-unes de ces substances attaquent les garnitures, comme le chloroforme. En réalité, ce type de machines peut être considéré comme complètement abandonné.

M. Zeuner a dressé ([2]) un tableau instructif des diverses températures qui correspondent, pour quelques-uns de ces liquides, à une échelle graduée de pression. Il y a joint, à titre de comparaison, quelques substances étrangères à la question actuelle. On peut présenter ce tableau de la manière suivante, en le transposant d'après l'ordre même de volatilité des corps qui le composent :

([1]) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II, p. 577.

([2]) Zeuner. *Théorie mécanique de la chaleur*. Traduction Arnthal et Cazin, p. 247. — Gault et Maury. The Efficiency of fluid in vapor engines. *Van Nostrand's Engineering Magazine*, novembre 1884, p. 415.

TABLEAU.

PRESSIONS — Atmosphères	TEMPÉRATURE CENTIGRADE USUELLE DES VAPEURS SATURÉES						
	ÉTHER	SULFURE DE CARBONE	ACÉTONE	CHLOROFORME	ALCOOL	EAU	MERCURE
1	34,956	46,254	56,319	60,180	78,299	100,000	357,347
2	55,866	69,251	78,029	82,587	96,823	120,600	397,317
3	69,607	84,456	92,303	97,550	108,832	133,910	423,010
4	80,211	96,174	103,262	109,041	117,980	144,000	442,469
5	88,961	105,863	112,301	118,563	125,485	152,220	458,528
6	96,473	114,209	120,077	126,784	131,910	159,220	471,851
7	103,085	121,593	126,951	134,082	137,567	165,340	483,709
8	109,005	128,252	133,146	140,664	142,647	170,810	494,316
9	114,369	134,342	138,811	146,706	147,276	175,770	505,152
10	119,389	139,972	144,019	152,543	151,543	180,310	513,907

524 — Il est facile de reconnaître qu'en théorie le principe des *cascades de chaleur* d'un corps à un autre ne peut rien donner de plus que l'emploi direct d'une substance unique, *si les températures extrêmes restent les mêmes* [1].

Supposons en effet que l'on opère avec une première vapeur entre les températures t_1 et t'. Le coefficient économique maximum ε aura pour valeur (n° 437) :

$$\frac{t_1 - t'}{t_1} = 1 - \frac{t'}{t_1}.$$

Ce que l'on recueille dans le condenseur de surface est donc la fraction non utilisée $\frac{t'}{t_1}$ de la chaleur fournie.

Dans le cycle de la seconde substance, qui opère entre les températures t' et t_2, on utilise de même la fraction $\frac{t' - t_2}{t'}$ de la chaleur qui s'y trouve employée. Mais celle-ci n'est plus que la quantité disponible $\frac{t'}{t_1}$. On obtiendra donc dans le second moteur :

$$\frac{t' - t_2}{t'} \cdot \frac{t'}{t_1} = \frac{t' - t_2}{t_1},$$

et par conséquent, pour l'ensemble des deux appareils :

$$\frac{t_1 - t'}{t_1} + \frac{t' - t_2}{t_1} = \frac{t_1 - t_2}{t_1},$$

quantité identique à celle que l'on eût retirée d'emblée à l'aide d'un cycle de Carnot unique, fonctionnant directement entre les températures t_1 et t_2.

Comme d'ailleurs toute complication surabondante amène tou-

[1] C'est absolument comme si, dans le domaine de l'hydraulique, on fractionnait en deux parties une hauteur de chute déterminée, pour les attribuer respectivement à deux récepteurs distincts, dont le second serait alimenté avec l'eau abandonnée par le moteur supérieur. L'effet utile ne serait nullement modifié en théorie par cette subdivision.

jours un supplément de résistances passives et de pertes de travail, on peut s'attendre *a priori* à voir décliner ε_2, si ε est resté le même; c'est-à-dire, en définitive, à une infériorité réelle.

525 — Cependant les observations ont constamment accusé un certain bénéfice, bien que peu considérable. On peut rapporter cette circonstance à deux motifs distincts.

D'une part, la condition essentielle à laquelle reste subordonné le calcul précédent a pu être écartée. Au lieu que le fonctionnement du nouvel appareil doive rester confiné entre les mêmes températures que celui d'une machine à vapeur d'eau, tout au contraire le second liquide est toujours choisi de façon à permettre d'utiliser efficacement une échelle de températures plus basses; ce qui est la seconde manière d'augmenter ε (nº 384), quand on ne peut plus élever davantage t_1.

Il est facile d'apprécier la valeur numérique de cette amélioration. Si t' désigne, comme ci-dessus, la température à laquelle on est forcé par les propriétés du premier liquide de l'abandonner, on n'aurait pu réaliser dans un moteur simple que le coefficient économique :

$$\frac{t_1 - t'}{t_1}.$$

Avec les machines à vapeurs combinées, on a obtenu, ainsi que nous venons de le voir :

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1}.$$

Le rapport de ces rendements mesure l'avantage de ce dernier système :

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t'} = 1 + \frac{t' - t_2}{t_1 - t'}.$$

Il nous montre que l'on gagne *proportionnellement* :

$$\frac{t' - t_2}{t_1 - t'} = \frac{\theta' - \theta_2}{\theta_1 - \theta'}.$$

Supposons, par exemple, l'emploi de l'éther sulfurique, qui bout à la température $\theta' = 38$. Un condenseur ordinaire, supposé maintenu à 40 degrés, suffira donc pour volatiliser l'éther dans ces conditions. Imaginons en même temps une machine marine d'assez basse pression : 2,6 atmosphères. La température correspondante de la vapeur d'eau est $\theta_1 = 129$. On pourra facilement réaliser la condensation de l'éther avec de l'eau froide à 20 degrés. On aura par suite, en reportant cette valeur de θ_2 et celles des autres températures dans l'expression du bénéfice proportionnel :

$$\frac{38 - 20}{129 - 38} = \frac{18}{91},$$

soit un cinquième environ.

526 — En second lieu, l'on retire un nouvel avantage en ce qui concerne le coefficient économique spécifique ε_1, pour ce motif que le cycle réel se trouve plus rapproché d'un cycle de Carnot, ou mieux d'une succession de cycles de Carnot, qu'avec les machines à un seul liquide. On réalise en effet une meilleure adiabaticité à l'aide d'une succession de cylindres analogue au type connu sous le nom de *machine compound*. Tandis que l'ensemble utilise une chute de température de t_1 à t_2, chacun des cylindres n'en met à profit pour son propre compte qu'une fraction. Les surfaces métalliques subissent donc des alternatives thermiques moins étendues, en se mettant successivement en communication avec l'admission et l'échappement. Or ce sont ces écarts qui déterminent les liquéfactions, si nuisibles au point de vue du rendement; et le défaut d'adiabaticité grandit avec leur importance.

527 — On doit encore noter une propriété des machines à vapeur combinées, qui peut avoir sa valeur lorsque l'emplacement se trouve mesuré avec parcimonie, comme c'est le cas de la marine par exemple. Elles présentent, à égalité de puissance, des cylindres sensiblement plus courts que les moteurs à vapeur d'eau et à cylindre unique.

Supposons en effet que ce dernier permette de réaliser le cycle représenté sur la figure 293 par le profil ABCD, dans lequel DC mesure le volume total de la vapeur à la fin de la détente, égal à

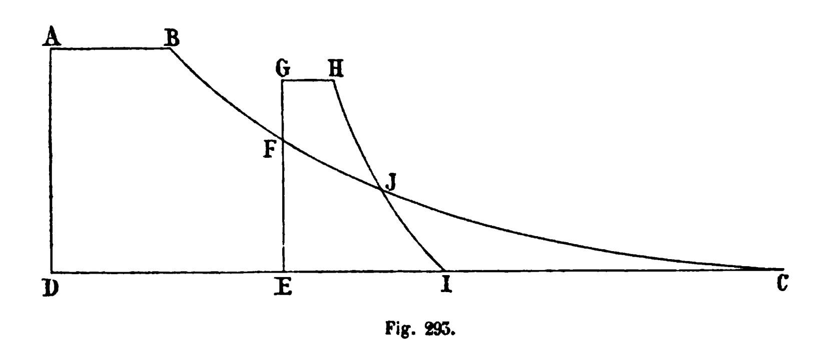


Fig. 293.

celui du cylindre, de telle sorte que l'on puisse considérer les abscisses comme proportionnelles aux longueurs des corps de pompe, supposés tous de même section.

Une fois arrivé en E, à l'extrémité d'un cylindre DE beaucoup plus court que DC, l'on trouve la pression EF trop affaiblie pour pouvoir pousser plus loin la détente. On liquéfie donc la vapeur d'eau sur la paroi d'un condenseur de surface, à travers la paroi duquel la chaleur passe dans l'éther. La pression se relève subitement de EF en EG ; et une évolution analogue GHIE se reproduit dans un cylindre de longueur EI moindre, non seulement que DC, mais même que EC.

En effet, puisque nous effectuons la comparaison des deux machines à égalité de puissance, il est nécessaire que l'aire GHIE soit équivalente à la partie FCE qui vient d'être supprimée dans le cycle ABCD. Il faut donc pour cela que la ligne HI traverse en un point J la courbe de détente BC, de telle sorte qu'il y ait équivalence entre les aires GHJF et JCI. On voit par là que les nouveaux cylindres DE et EI, même mis l'un au bout de l'autre, n'atteindraient pas la longueur du cylindre unique DC.

528 — *Machines à huile.* — La notion de l'échange de chaleur entre des substances successives a encore fourni le point de départ

d'une conception, plus originale sans doute qu'utile, qu'il convient de mentionner ici.

A l'aide de la vapeur d'échappement d'une machine ordinaire, on échauffe, non plus un autre corps plus volatil que l'eau, mais au contraire un liquide relativement fixe, tel que l'huile. On conçoit que, malgré la faible dilatation dont les liquides sont susceptibles, on puisse cependant recueillir un travail appréciable, en raison de l'extrême intensité des efforts qui se trouvent alors mis en jeu. L'incompressibilité de ces corps est en effet bien connue, et ne se laisse vaincre que par des forces énormes.

C'est dans ces conditions que M. Tommasi a proposé son *moteur hydrothermique* (1). Les avantages qu'il en attend sont la petitesse du générateur (un litre par force de cheval), et l'innocuité relative des explosions, puisque l'agent moteur n'est susceptible que d'une expansion insignifiante, avant de se trouver désarmé.

M. Follard (2) et M. Brayton (3) ont également présenté des moteurs fondés sur le principe de la dilatation des liquides.

§ 6

MACHINES A AMMONIAQUE

529 — Tous les moteurs précédents (4) sont basés sur la dilatation qu'éprouve un corps *homogène* sous l'empire de la chaleur, en prenant la forme gazeuse, soit qu'il accomplisse en cet état toute son évolution, comme l'air, soit qu'alternativement il rentre dans l'état liquide pour en sortir de nouveau, comme l'eau.

Or le phénomène de la vaporisation n'est pas le seul mécanisme moléculaire qui permette cette énorme expansion d'un liquide à l'état aériforme. La dissolution d'un gaz dans l'eau en fournit un

(1) *Les Mondes*, t. XXX, p. 494; XXXVIII, 589. — *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, t. XXIV, p. 409. — *The universal Engineer*, 18 octobre 1878, p. 51.

(2) *L'Aéronaute*, mai 1871.

(3) *Ibidem*, août 1876, p. 209.

(4) A la seule exception de ce dernier (n° 528).

autre mode ([1]). La quantité dissoute est essentiellement une fonction de la température et de la pression ([2]). Un tel corps pourra donc se prêter à un jeu semblable à celui des vapeurs saturées, suivant les variations que viendront à subir ces deux éléments essentiels. Il suffira pour cela d'emprunter au répertoire de la chimie un gaz qui présente pour l'eau une solubilité à la fois considérable et très rapide.

Or il est un corps qui possède ces deux propriétés au plus haut degré. C'est le gaz ammoniac ([3]). A 15 degrés, l'eau en dissout 743 fois son volume, et avec une étonnante vitesse. L'initiative de son emploi dans les machines semble devoir être reportée à M. Frot, ingénieur de la marine ([4]). Un moteur analogue a été construit également par M. Pietro Cordenons, à Rovigo ([5]).

La dissolution ammoniacale est chauffée au moyen d'un générateur (fig. 294) dont la pression peut atteindre 15 atmosphères ([6]). L'ammoniaque se dégage, et il s'y joint une certaine quantité de vapeur d'eau, qui entre en action pour son propre compte ([7]). On peut estimer la proportion de cette dernière à un sixième environ. Ce mélange, après avoir agi sur le piston, passe à travers un condenseur de surface, et se rend de là dans un dissoluteur qui

([1]) La dissociation réversible constitue encore un phénomène analogue à la vaporisation, mais sa grande lenteur relative la met ici hors de cause.

([2]) Raoult. Remarques sur un calcul de M. Van t'Hoff relatif à la tension des vapeurs des dissolutions. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, juin 1887, p. 1857.

([3]) D'après Carius (*Annales des mines*, juillet-août 1878, p. 82), le coefficient de solubilité du gaz ammoniac dans l'eau est représenté par cette formule empirique :

$$1049,624 - 29,4963\,\theta + 0,676873\,\theta^2 - 0,0095621\,\theta^3.$$

([4]) Frot. *Bulletin de l'Association scientifique de France*, mars 1870. — Mouchot. *La Chaleur solaire et ses applications industrielles*, p. 203.

([5]) Bitard. *La Science populaire*, mars 1881. — De Graffigny. *Les Moteurs anciens et modernes*, p. 285.

([6]) M. Frot a proposé à cet égard la formule empirique suivante, pour exprimer *en atmosphères* la pression P, en fonction de la température θ :

$$P = 0,13\,\theta - 5,50.$$

M. Rouart a donné, de son côté, une table faisant connaître, pour les diverses températures, la pression de la chaudière ammoniacale (Ledoux. *Annales des mines*, juillet-août 1878, p. 103).

([7]) En formant une association que l'on peut rapprocher par la pensée, jusqu'à un certain point, de celle de l'air et de l'eau dans les aéro-vapeurs (n° 513).

complète sa liquéfaction; après quoi une pompe alimentaire refoule dans la chaudière la solution alcaline. La mise en pression est assez rapide; en un quart d'heure on atteint facilement le chiffre de 6 atmosphères. Le cuivre et le bronze ne sauraient entrer dans la composition de cette machine; l'ammoniaque les attaque. On se voit donc obligé de les remplacer par le fer. Cet alcali exerce en même temps sur les huiles et sur les graisses une action saponifiante, qui tend à aveugler les fuites.



Fig. 294. — Moteur Cordenons à ammoniaque (vue perspective).

M. Tixier, de Bordeaux ([1]), a proposé l'emploi de l'ammoniaque, alternativement séparée de l'eau, avec liquéfaction dans un condenseur, et recombinée à ce liquide en produisant un dégagement de chaleur que l'on utilise pour la transformation en travail. Des expériences de Fabre et Silbermann portent à 540^{cal},5 par kilogramme de gaz dissous le calorique dégagé dans cette réaction ([2]).

M. Pollard ([3]) a mis en avant un système de réservoirs mobiles à ammoniaque comprimée. Ils sont chargés dans une usine spéciale, et transportés dans les ateliers pour lesquels, par exemple, on redoute le voisinage du feu; ce qui en éloigne les machines à vapeur ou à gaz. L'ammoniaque, en se détendant, fait marcher un récepteur installé à poste fixe, et se liquéfie dans un réservoir qui est portatif comme le récipient lui-même. L'idée particulièrement originale du projet de M. Pollard consiste à opposer l'un à l'autre le refroidissement du récipient et l'échauffement du condenseur, qui, séparés, nécessiteraient l'emploi de deux courants extérieurs, l'un d'eau froide, l'autre d'eau chaude. L'auteur renferme à cet

([1]) De Graffigny. *Les Moteurs anciens et modernes*, p. 287.

([2]) Fabre et Silbermann. Sur la chaleur produite par les combinaisons chimiques. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XVIII, p. 695; XX, 1565; XXI, 944; XXII; XXIII; XXIV, 1081; XXVI; XXVII; XXVIII, 627; XXIX, 440.

([3]) Haton de la Goupillière. *Bulletin des Sociétés savantes*, 3e série, t. I, p. 305.

effet le récipient dans le condenseur, en calculant avec précision les éléments du système, de manière à obtenir une compensation exacte au moyen de cet antagonisme. Cet ensemble d'idées est assurément fort ingénieux, mais trop compliqué.

Citons encore la proposition de MM. Tommasi et Francisque Michel (1) pour le transport des dépêches dans des tubes souterrains, au moyen de trains (2) actionnés par l'ammoniaque, que l'on dégage ou que l'on condense alternativement sur l'une ou l'autre face du piston-convoyeur, au moyen d'appareils fixes placés aux extrémités.

Je mentionnerai de même les locomotives de tramways mues par l'ammoniaque et chauffées à l'eau chaude, que le docteur Zamin a fait fonctionner à la Nouvelle-Orléans (3).

M. Tellier (4) a proposé de faire chauffer par les rayons du soleil une machine à ammoniaque, qui se rattache ainsi aux moteurs solaires dont nous parlerons plus loin (n° 532).

C'est encore dans la même catégorie de moteurs que se range la pompe solaire à ammoniaque et à impulsion directe, de M. Théophile Foucault (5), analogue aux pompes *à impulsion directe* de vapeur (6). On a soin alors de séparer, au moyen d'une couche d'huile de pétrole, l'ammoniaque de l'eau à élever, dans laquelle, en l'absence de cette précaution, le gaz moteur disparaîtrait instantanément, en raison de son extrême solubilité.

Je me bornerai enfin à citer les machines à ammoniaque Arnous-Lamm, Barker, Boulet, Broomann-Flandrin, Dufrené, Fiot, Henderson, Campbell, Hughes-Lepène, Mewburn-Gamgee, Mort, Patrick-Jay-Mahon, Pollack, Rees-Reece.

(1) *Les Mondes*, t. XXXI, p. 542.

(2) Voy. ci-dessus, n° 516.

(3) Tellier. *Les Mondes*, t. XXV, p. 525. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LX, p. 59. — *Annales des Ponts et chaussées*, 5e série, t. XVI, p. 261. — *Génie civil*, t. IX, p. 339. — *Proceedings of the Institution of civil Engineers*, t. LVI.

(4) Tellier. Sur une nouvelle application du gaz ammoniac à la mécanique. *Mém. scient.*, t. VII, p. 124. — *Génie civil*. t. VII. p. 285. — *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 20 juillet 1886, p. 336. — *La Nature*, 1885, 2e semestre, p. 221.

(5) *Portefeuille économique des machines*. 1880, p. 149. — *Les Mondes*, t. XLI, p. 389. — *Moniteur universel*, 9 novembre 1877.

(6) Haton de la Goupillière. *Cours d'Exploitation des mines*, t. II. p. 967.

530 — Des tentatives ont été faites dans le même sens, en substituant à l'ammoniaque l'acide carbonique. Il ne faut pas confondre cette sorte de *machine à eau de Seltz* avec les appareils redoutables que l'on a fondés sur l'emploi de l'acide carbonique liquéfié par la pression (n° 520). La solubilité de ce gaz dans l'eau étant du reste beaucoup moins nette que celle de l'ammoniaque, on n'aperçoit pas de motif de préférence en sa faveur. M. Bord avait installé à Bordeaux [1] un moteur de ce genre, à la pression de 6 atmosphères. On peut encore citer, dans cet ordre d'idées, les machines Bourne, Geisenberger-Cherpit, Lake-Kellog.

M. Kercado a proposé de même d'avoir recours au gaz acide chlorhydrique, qui semble devoir soulever encore plus d'objections que le précédent.

M. Barker s'est rejeté sur la dissolution d'éther sulfurique; système qu'il ne faut pas non plus confondre avec le mode d'emploi direct de ce corps qui a été signalé plus haut (n° 521).

§ 7

FULMI-MOTEURS

531 — Le dégagement d'un gaz hors de sa dissolution aqueuse nous présente déjà une sorte de décomposition chimique d'une substance homogène, que l'on ne saurait cependant assimiler à un composé à proportions définies. En poursuivant dans cette voie, nous rencontrons des moteurs à action chimique proprement dite, c'est-à-dire fondés sur l'expansion considérable que certains corps, ou mélanges de corps, acquièrent par le développement de la réaction chimique dont ils sont susceptibles.

Les plus avantageux pour cet usage seront naturellement ceux que l'on désigne sous le nom d'explosifs. On les emploie d'ordinaire pour produire, en un temps extraordinairement court, une action violente, telle que la rupture des rochers, ou la propulsion de pro-

[1] *Les Mondes*, t. XXXI, p. 246.

jectiles d'artillerie. Certains esprits ont entrepris de dompter et d'assouplir cette force, en l'employant à la production industrielle du travail, dans des machines qui ont reçu le nom de *fulmi-moteurs*.

La première idée de cette application a été émise, à une date fort ancienne, et d'ailleurs d'une manière assez confuse, par l'abbé de Hautefeuille. Il proposait de se servir de la poudre à canon pour produire, par suite du refroidissement qui succédait à l'explosion, un vide artificiel dans une capacité au sein de laquelle l'eau s'élèverait ensuite sous l'empire de la pression atmosphérique.

Cette notion fut reprise en 1682 par Huyghens de Zulichen, qui établit, avec le concours de Papin, une véritable machine atmosphérique (¹).

M. Gros a construit en 1865 une *machine-revolver* dont les canons venaient détoner successivement dans un générateur maintenu à la pression de 15 atmosphères. De là le gaz était admis dans un récepteur à tiroir. Des mécanismes automatiques faisaient tourner le revolver, enlevaient les vieilles cartouches, et en introduisaient de nouvelles.

M. Debriat a proposé, sous le nom de *dynamophone*, un moteur à poudre avec inflammation par l'étincelle électrique (²).

M. Thomas Shaw, ingénieur américain, a eu l'idée d'effectuer à l'aide de cet explosif l'enfoncement des pilotis (³). Une cartouche est déposée sur la tête du pieu. Le mouton l'écrase, et sa déflagration détermine l'enfoncement, en même temps qu'elle relève le mouton jusqu'au déclic qui le retient suspendu.

Le colonel de Prodanovic, du Corps du Génie autrichien, a repris la même idée (⁴). A l'aide de 300 grammes de dynamite, bourrée au sable, il obtenait 5 coups par minute d'un mouton de 750 kilogrammes tombant d'une hauteur de 3 mètres.

MM. Hureau de Villeneuve et Pénaud ont proposé l'emploi d'ex-

(¹) De Graffigny. *Les Moteurs anciens et modernes*, p. 69. — Armengaud jeune. *Conférence sur les machines à gaz*, Imprimerie nationale, 1879. — *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 1883, p. 161.

(²) *Lumière électrique*, t. XXVI, p. 297.

(³) *Gazette des Ingénieurs du Hanovre*. — *Les Mondes*, t. XXXVII, p. 309.

(⁴) *Génie civil*, t. III, p. 88. — *Annales industrielles*, 1883, t. I, p. 485. — Haton de la Goupillière. *Revue des travaux scientifiques*, t. IV, p. 89. — *Wochenschrift der Œsterreichen Ingenieur und Architekten Vereins*, 1883.

plosifs azotés, en mettant en présence leurs éléments primitifs, de manière que le composé se forme et détone successivement ([1]).

M. Renoir a présenté dans ce sens un projet de machine à nitroglycérine. MM. Wolf et Pietzcker ([2]) ont également formulé une description dont j'indiquerai sommairement les éléments (fig. 295).

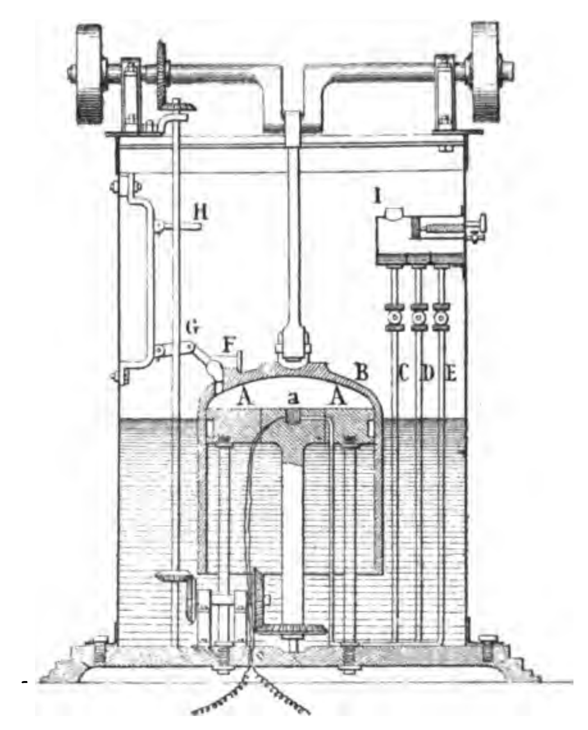


Fig. 295. — Moteur Wolf et Pietzcker à nitroglycérine (coupe verticale).

Le piston A reste fixe. Le cylindre B est soulevé par l'expansion des gaz, et attaque l'arbre coudé par l'intermédiaire d'une bielle. Cette explosion se produit sous l'influence de conducteurs électriques, et de commutateurs tournant avec l'arbre. Sur la surface supérieure du piston se trouve pratiqué un godet *a*, dans lequel parviennent la glycérine, l'acide azotique et l'acide sulfurique. Ces liquides sont

([1]) Hureau de Villeneuve. *L'Aéronaute*, octobre 1874, p. 301. — Alexandre Ciurco. Propulseur à réaction alimenté par un explosif spécial. *Le Figaro*, 13 octobre 1888.

([2]) *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale*, 4e série, t. II, p. 246. — *Dingler's polytechnisches Journal*, 1887.

distribués dans ce récipient par un disque tournant, à l'aide des trois tubes C, D, E. Les gaz sont évacués au moyen du robinet F, alternativement ouvert ou fermé par les taquets G et H, que manœuvre une tringle commandée par l'arbre moteur. Pour arrêter la machine, il suffit de déclencher le commutateur électrique. On peut également se servir, pour obtenir ce résultat, d'un piston I, qui interrompt la distribution des liquides, et fait remonter ces derniers dans les trois tubes, de manière à vider le godet *a*, en vue d'éviter l'accumulation de l'explosif pendant l'arrêt de l'appareil.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer, en terminant ce paragraphe, à quel point ces diverses propositions sont encore précaires, dangereuses et éloignées de la sanction de la pratique.

§ 8

MOTEURS SOLAIRES

532 — Les différents moteurs que nous avons énumérés dans ce chapitre, se distinguent les uns des autres par le choix du corps employé comme véhicule de chaleur. Il n'en est plus de même pour la dernière catégorie dont nous avons encore à parler : celle des moteurs solaires ([1]). Ici la caractéristique réside uniquement dans

([1]) Mouchot (*La chaleur solaire et ses applications industrielles*. Paris, Gauthier-Villars, 1869. — *Les Mondes*, t. LII, p. 49. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 4 octobre 1875; t. LXXXI, p. 571. — *Engineering*, décembre 1875, p. 512). — Abel Piffre (Appareils solaires et services qu'ils peuvent rendre. *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, 20 février 1880. — Les récepteurs solaires. *Annales industrielles*. 10 août 1879, p. 170. — *Conférence sur l'utilisation de la chaleur solaire*, Imprimerie nationale, 1878. — *Mémoire sur les appareils solaires et leur application en Afrique*, 1880, in-4°. — L'héliodynamique et les applications de la chaleur solaire. *Revue des cours scientifiques*, 6 janvier 1883, p. 15). — Tellier (Élévation d'eau par la chaleur atmosphérique. *Génie civil*, t. XI, p. 386. — Machines solaires à ammoniaque. *La Nature*, 1885, 2e semestre, p. 221). — Foucault (Fontaine solaire à ammoniaque. *Portefeuille économique des machines*, 1880, p. 149. — *Moniteur universel*, 9 novembre 1877. — Machine solaire à ammoniaque. *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 20 juillet 1886, p. 330). — Gilbert. L'énergie solaire. *Revue des questions scientifiques de la Société de Bruxelles*, 1885, p. 513. — Cazin. Les forces motrices. *Revue des cours scientifiques*, 19 février 1870, p. 186. — Bontemps. La machine solaire de M. Mouchot. *La Nature*, 15 janvier 1876, p. 102. — Louis de Royaumont. *La Conquête du Soleil*, 1882. — Crova. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XCIV.

le mode de chauffage ([1]), qui, au lieu de dériver d'un foyer construit de main d'homme et alimenté avec un combustible effectif, se trouve puisé directement dans cet immense réservoir de calorique que le soleil déverse sans relâche à travers le monde, et dont une minime partie se trouve arrêtée au passage par le globe terrestre. De cette dernière portion, l'humanité ne saurait jamais utiliser, dans ses rêves les plus ambitieux, qu'une fraction relativement insignifiante; mais celle-ci pourrait cependant suffire théoriquement à fournir le total d'énergie nécessaire pour la plupart des besoins industriels, si nous étions en mesure, d'une part, de la capter sur une grande échelle, et, en même temps, d'en uniformiser l'emploi; programme qui, précisé en ces termes, reste encore chimérique dans l'état actuel de la question.

On sait en effet, d'après les expériences de Pouillet et de M. Violle ([2]), qu'un mètre carré de surface exposé normalement aux rayons du soleil *à Paris* reçoit, *dans les conditions les plus favorables*, environ 13 calories par minute, ce qui représente *théoriquement* en chevaux-vapeur :

$$\frac{13 \times 424}{60 \times 75} = 1,22;$$

c'est-à-dire plus d'un cheval ([3]). La superficie d'un hectare sous une

p. 943. — Bertrand. *Journal des savants*, septembre 1871. — *Bulletin de la Société des sciences de Nancy*, 2e série, t. III, p. 91. — *Bulletin de la Société des anciens Élèves des Écoles d'arts et métiers*, mai 1883, p. 563. — The utilisation of solar heat for the elevation of water. *Scientific American*, 3 octobre 1885, p. 214. — *The Engineer*, 17 janvier 1887, p. 39. — Machine Weston, fondée sur l'action de la lumière solaire sur le sélénium. *La Lumière électrique*, t. XXX, p. 190.

([1]) Quant au choix du corps qui sert de véhicule à la chaleur, il reste absolument arbitraire; c'est tantôt la dilatation de l'air, ou une chaudière à vapeur d'eau, l'ammoniaque, etc.

([2]) Pouillet. Mémoire sur la chaleur solaire. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. VI et VII. — Violle. *Annales de chimie et de physique*, 5e série, t. X. — Soret. Sur l'intensité de la radiation solaire. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXV, p. 526. — Plaar. Mémoire sur la chaleur solaire reçue en un point quelconque de la terre. *Ibidem*, t. XLIII, p. 1005. — W. Siemens. *Die Erhaltüng der Sonner Energie*, 1884. — W. Thomson. *Treatise on natural philosophy*, 1883. — Aisecchi. *Le Soleil*, t. II, p. 258.

([3]) Si l'on tient compte à la fois de l'absorption par l'atmosphère terrestre et de la distance, on trouve que l'émission calorifique de la surface entière du soleil représente l'équivalent d'une énergie mécanique égale à : 217×10^{20}, ou environ 2 sextillions de chevaux-vapeur.

lumière zénithale correspondrait par conséquent à plus de dix mille chevaux nominaux ([1]).

Ce genre d'application acquerrait évidemment une importance toute spéciale dans des contrées beaucoup plus méridionales que Paris, plus chaudes par conséquent, et supposées dénuées d'eau et de moyens de communication qui permettent de se procurer économiquement le combustible. L'une des applications les plus curieuses que l'on y pourrait effectuer, serait assurément l'association des moteurs solaires avec les appareils frigorifiques qui formeront l'objet du chapitre suivant, en vue d'appliquer directement la chaleur torride des tropiques à la fabrication de la glace sans aucun secours étranger ([2]); d'où une influence inappréciable sur les effets du climat et sur l'hygiène.

Ainsi que nous venons de le dire, les résultats pratiques sont encore aujourd'hui dans l'enfance. Il n'en est pas moins intéressant d'insister sur l'importance d'une telle ressource pour le jour où quelque trait de génie, qu'il est encore impossible de soupçonner, aurait mis l'homme en possession d'un moyen simple et pratique d'utilisation de la chaleur solaire, sous une forme régulière et suffisamment concentrée. Il s'agit, en effet, d'une source d'énergie qui est, de sa nature, absolument inépuisable; car si elle devait jamais décliner, elle commencerait par entraîner l'humanité dans sa ruine. Le combustible minéral, au contraire, a ses jours marqués. On peut varier beaucoup sur l'appréciation de l'échéance définitive de son épuisement, et elle est assurément fort éloignée de notre époque, mais elle n'en est pas moins fatale. Cet antique approvisionnement, que l'homme dissipe si légèrement aujourd'hui, aura un jour son terme inexorable ([3]).

([1]) On verra plus loin (n° 555) que l'on n'a réussi jusqu'ici à en utiliser que la vingtième partie environ, et avec des appareils dont la puissance individuelle ne saurait pratiquement dépasser deux ou trois chevaux.

([2]) Buchwalder. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXVIII, p. 555.

([3]) On peut signaler comme un réservoir analogue d'une quantité rigoureusement inépuisable d'énergie, le phénomène des marées, en vue du jour où l'on posséderait pour la capter sérieusement des ressources qui manquent encore, et où, en même temps, les moyens de transport de la force permettraient de la disséminer convenablement dans l'intérieur du territoire.

Ce problème est lui-même dans l'enfance. Il y a même lieu de se demander s'il est

533 — L'intérêt de cette question est tel qu'il n'y a pas lieu de s'étonner qu'elle ait depuis longtemps fixé l'attention des investigateurs. On trouve des essais de machines solaires jusque dans les *Pneumatiques* de Héron d'Alexandrie (1), où cet auteur parle d'inventions de ce genre *léguées par les anciens*. Après un long sommeil, ce problème a été repris à partir du XVIe siècle par Porta (2), Salomon de Caus (3), Drebbel (4), Robert Fludd, Martini (5), Kircher (6), de Châles (7), Bélidor (8), de la Cliche, Evans (9), Deliancourt (10), Ericsson (11).

Aujourd'hui les applications effectives se réduisent à la machine Mouchot, dont la première idée peut être cherchée dans les expériences de Tyndall sur la chaleur rayonnante de la lune (12). Cet appareil a été beaucoup perfectionné par M. Abel Piffre, qui a fini par l'amener à un état vraiment pratique, quoique limité à de faibles puissances.

Un grand réflecteur, en forme de tronc de pyramide (fig. 296, 297), dont les faces sont constituées de plaques argentées, est monté à la manière d'un héliostat, de manière à pouvoir suivre le soleil dans son mouvement diurne. Il en concentre l'irradiation sur sa

de nature à faire jamais de grands progrès. J'ai indiqué déjà (n° 240) l'état de la question à cet égard.

On remarquera qu'il s'agit encore ici, comme pour les moteurs solaires, de forces d'origine cosmique, tandis que l'industrie actuelle se sert uniquement de forces essentiellement terrestres. Mais il ne faut pas oublier (n° 386) que si ces dernières ont actuellement leur siège à la portée de notre main, elles ne s'en rattachent pas moins à la même source, soit quotidiennement, par le phénomène de l'insolation qui alimente nos cours d'eau, soit à l'époque reculée de la flore houillère, où l'énergie solaire s'employait avec une grande activité, sous l'influence d'une température qui a sensiblement diminué depuis lors, à fixer dans les plantes l'acide carbonique répandu dans l'atmosphère en plus grande quantité qu'à notre époque, séparée de ce temps par l'immense formation des carbonates jurassiques et crétacés.

(1) Quarante-septième appareil. 120 ans avant l'ère chrétienne.

(2) Porta. *Magie naturelle*, livre XIX.

(3) Salomon de Caus. *Raisons des forces mouvantes*, 1615.

(4) Alsted. *Encyclopédie*.

(5) Martini. *Explication d'une figure et d'une machine réalisant le mouvement perpétuel sous forme d'horloge*, 1640.

(6) Le P. Kircker. *Traité de l'aimant*.

(7) Milliet de Châles. *Monde mathématique*.

(8) Bernard Forest de Bélidor. *Architecture hydraulique*.

(9) Rapport sur les travaux de M. de Valcourt. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 1821.

(10) *La Science pour tous*, 16 février 1865.

(11) Mouchot. *La chaleur solaire*, p. 204.

(12) Tyndall. *La chaleur considérée comme un mode de mouvement*, in-12, 1864, p. 401.

ligne focale, occupée par une petite chaudière à vapeur d'eau, dont la surface a été noircie afin d'accroître son pouvoir absorbant. Une

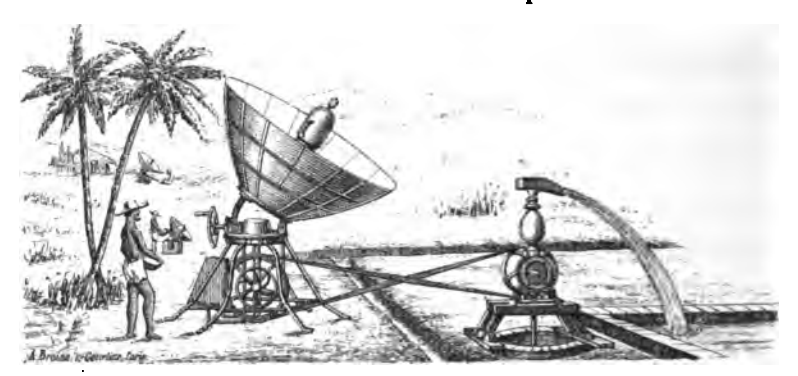


Fig. 296.— Moteur solaire Mouchot-Piffre (vue perspective).

enveloppe de verre augmente encore la concentration de la chaleur solaire dans cette région. Sous l'empire de la vapeur ainsi engen-

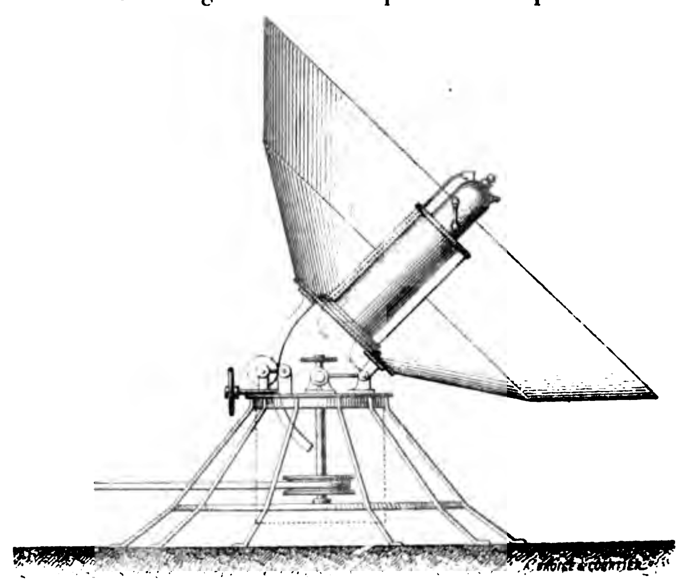


Fig. 297. — Moteur solaire Mouchot-Piffre (coupe verticale).

drée, des transmissions de mouvement actionnent une ingénieuse petite machine rotative imaginée par M. Piffre.

On estime que chaque mètre carré d'ouverture du réflecteur fournit pratiquement une force d'un vingtième de cheval.

CHAPITRE XXXII

MACHINES FRIGORIFIQUES

—

§ 1

THERMOGÈNE

584 — *Généralités.* — En ce qui concerne les gaz parfaits, qui ont formé le point de départ de notre étude, nous avons envisagé successivement les moteurs fondés sur l'emploi de ces agents sous les trois formes distinctes de l'énergie : moteurs éoliens, pour la force vive (chap. XXI); moteurs à air comprimé, pour le travail potentiel (chap. XX); moteurs à air chaud, pour la chaleur (chap. XXIII, XXIV, XXV). Quant aux opérateurs, deux seulement des catégories correspondantes ont été étudiées jusqu'ici : les machines soufflantes, pour la force vive (chap. XVIII); et les compresseurs, pour le travail potentiel (chap. XIX).

Il nous reste, pour compléter cette énumération, à considérer les opérateurs qui sont destinés à influencer directement, à l'aide de moyens mécaniques, la quantité de chaleur renfermée dans l'air. Nous leur consacrerons le présent chapitre. Nous avons dû suspendre jusqu'ici cet examen, en vue de ne pas disjoindre l'étude des machines frigorifiques à air de celle des appareils tout semblables qui sont fondés sur l'emploi des vapeurs, et pour lesquels les matériaux théoriques renfermés dans les chapitres XXVIII et XXIX nous étaient indispensables.

535 — L'on peut entreprendre dans deux sens opposés d'influencer, à l'aide de moyens mécaniques, la quantité de chaleur qui se trouve renfermée dans l'air : soit en vue de l'augmenter, soit pour la diminuer. De là deux catégories distinctes de machines : les *appareils calorifiques* et les *appareils frigorifiques*.

Les premiers sont à peine représentés dans l'industrie; et il ne pouvait en être autrement, car les ressources que nous fournit la chimie pour élever la température (la combustion et les foyers) sont si simples et si puissantes, que l'emploi des moyens mécaniques ne pouvait qu'être absolument délaissé.

L'inverse a lieu en ce qui concerne le refroidissement. Les artifices chimiques (mélanges réfrigérants) destinés à retirer la chaleur contenue dans les corps sont compliqués, coûteux, et de peu de portée sur l'échelle des températures. On doit donc considérer comme l'une des plus brillantes conquêtes de l'industrie, l'invention des appareils frigorifiques basés sur l'intervention des moyens mécaniques (¹).

536 — *Thermogène.* — Dans le premier ordre d'idées, je citerai un appareil, dès longtemps disparu, qui avait été proposé par Beaumont et Mayer sous le nom de *thermogène* (²).

On sait que certaines peuplades se procurent du feu en faisant subir à du bois sec un frottement intense. On n'a également que

(¹) Elle est en même temps l'une des plus paradoxales en apparence, puisque les moteurs que l'on emploie d'ordinaire à cet effet (bien que n'importe quelle source de travail puisse évidemment convenir), sont des machines à vapeur; de telle sorte que c'est dans un brasier que se trouve le point de départ de la congélation artificielle.

(²) Beaumont (Description d'un appareil destiné à utiliser la chaleur dégagée par le frottement. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXI, p. 347. — Expériences industrielles avec le thermogénérateur. *Cosmos*, t. XVI, p. 454). — Beaumont et Mayer. Description d'un appareil procurant de la chaleur au moyen du frottement. *Compte rendus de l'Académie des sciences*, t. XL, p. 983. — *Le Thermogénérateur, appareil de chauffage sans combustible*, in-8°. — Général Morris. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLII, p. 719. — H. Tresca. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 3ᵉ série, t. X, p. 313. — Haton de la Goupillière. *Ibidem*, 4ᵉ série, t. I, p. 458. — *Cosmos*, 1ᵉʳ juin et 24 août 1855. — Becquerel. Précis de nouvelles recherches sur le dégagement de la chaleur dans le frottement. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. VII, p. 303. — Rumfort. An inquiry concerning the source of heat excited by friction. *Philosophical Transactions abridged*, 1798, t. XVIII. — Pitter. On the production of heat by friction. *Mechanical Magazine*, t. XLVI, p. 492.

trop souvent, sur les chemins de fer, à combattre des commencements d'incendie dus à la friction mal lubrifiée des fusées dans les boîtes à graisse. C'est ce principe qui a été mis en œuvre pour la machine en question.

Une certaine quantité d'eau y est échauffée par le frottement développé entre la paroi d'un vase de révolution dans lequel elle se trouve renfermée, et une garniture autour de laquelle on fait tourner ce récipient sous l'empire de la force disponible. L'appareil consiste en une chaudière cylindrique horizontale, de 2 mètres de long sur 0^{m},50 de diamètre. Elle est traversée suivant son axe par un tube de cuivre creux légèrement conique, ayant 0^{m},30 et 0^{m},35 comme diamètres extrêmes. Un cône en bois, recouvert d'une tresse de chanvre enroulée en hélice, est monté sur un axe en fer soutenu à l'aide de coussinets fixes, qui sont placés au delà des extrémités de la chaudière. On lui imprime, au moyen d'engrenages, un mouvement de rotation rapide. Un vase plein d'huile placé au-dessus de l'appareil sert à lubrifier les surfaces au degré nécessaire pour adoucir le mouvement, sans toutefois annihiler le frottement. La forme conique de l'arbre est destinée à obvier à l'usure qui supprimerait rapidement toute adhérence entre des surfaces cylindriques. Une vis de rappel sert à maintenir constamment la pression mutuelle la plus convenable. La chaudière est munie des appareils usuels de sûreté et d'alimentation. Son mode de chauffage seul diffère de l'ordinaire. La température s'y élevait à 130 degrés, et la pression à deux atmosphères et demie.

Cette industrie n'avait, bien entendu, d'autre prétention que d'utiliser des forces perdues, sur des points privés de combustible. Employer du charbon à faire marcher un moteur à vapeur pour fournir la commande à un tel appareil eût constitué un cercle vicieux absurde. Elle n'en a pas moins été frappée de stérilité par le peu d'importance des résultats thermiques obtenus. Tresca l'a exprimé d'une manière frappante en faisant remarquer qu'il serait plus efficace, en fait de dégagement calorifique, d'employer directement comme combustible l'huile nécessaire pour le graissage.

537 — *Procédé d'évaporation Piccard.* — On peut rattacher

au même principe le procédé d'évaporation Piccard [1], à l'aide duquel on fait intervenir avec plus de succès le travail mécanique dans les phénomènes calorifiques. On se fonde à cet effet sur un artifice très ingénieux.

Le travail serait en effet impuissant à fournir lui-même l'énorme quantité de chaleur nécessaire pour convertir en vapeur toute l'eau qui se trouve unie au sel traité dans une saline de quelque importance; calorique qui est, avec le mode ordinaire, incessamment perdu dans l'atmosphère comme cette vapeur elle-même. Mais l'inventeur ne demande plus, en principe, au moteur que de s'employer à retirer de la vapeur le stock d'énergie calorifique une fois fourni par la combustion d'une certaine quantité de charbon de mise en train, et de ramener de nouveau cette chaleur dans le bain d'évaporation, de manière à chasser par son influence une nouvelle quantité de liquide sous forme de vapeur. Celle-ci, à son tour, sera dépouillée de cette provision thermique, qui fera encore retour dans l'appareil, et ainsi de suite indéfiniment. La question posée de cette manière diffère totalement, comme on le voit, de la précédente; et l'insuccès de celle-ci ne saurait évidemment compromettre la réussite du nouveau problème. Seulement, nous n'en avons formulé jusqu'ici que l'énoncé, et il reste à en présenter le moyen de solution.

Pour y arriver, commençons par nous rendre compte numériquement des éléments de la question. Quand on veut chasser en vapeur dans l'atmosphère un kilogramme d'eau, supposé pris à zéro, il faut lui fournir, en nombres ronds, en premier lieu 100 calories, afin de porter sa température à 100 degrés, puis 537 autres pour opérer à ce moment sa gazéification. Ces 637 calories par litre d'eau se trouvent purement et simplement perdues avec le procédé classique, qui a pour résultat de décomposer la *saumure* en deux produits distincts, à savoir : 1° du sel solide, 2° de la vapeur d'eau. Le problème tel que nous venons, au contraire, de le poser, consisterait à résoudre finalement cette saumure en deux produits

[1] *Portefeuille économique des machines*, 3e série, t. X, p. 50 et 66. — Rateau. *Annales des mines*, 1889. — Haton de la Goupillière. *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 25 juin 1886.

différents : 1° du sel solide; 2° de l'eau froide. On arriverait ainsi à récupérer les 637 calories que l'on avait temporairement unies à cette dernière, et que l'on pourrait appliquer de nouveau à un second kilogramme d'eau, tenant en dissolution une quantité correspondante de sel.

Dans ce but, un moteur actionne une pompe qui aspire la vapeur émise par le bain de saumure, et la comprime ensuite, par le mouvement rétrograde du piston, jusqu'à la pression de 2 atmosphères. La vapeur se trouve alors un peu surchauffée par l'addition de la chaleur résultant du travail mécanique qui a été fourn pour opérer sa compression, et qui équivaut à 26 calories. Nous avons vu en effet (n° 486) que la détente adiabatique de la vapeur d'eau saturée et sèche s'accompagne d'une précipitation liquide. La compression inverse de l'ensemble devrait le ramener à l'état initial. Si donc l'on supprime préalablement la présence du liquide, en ne comprimant que la vapeur sèche, on n'obtiendra plus ce point précis de saturation, mais au contraire une certaine surchauffe.

Le fluide ainsi amené à la tension de 2 atmosphères possédera par conséquent une température un peu supérieure à celle de 120 degrés, qui correspondrait à cette pression, d'après la loi de *Regnault*, pour une vapeur saturée. La pompe le refoule dans un serpentin immergé au milieu de la saumure, laquelle se trouve pour son propre compte à 100 degrés, puisqu'elle est en train de se volatiliser en communication avec l'air libre. En raison de cette différence de température de l'intérieur à l'extérieur, le serpentin se comporte comme un condenseur de surface, et ramène le fluide intérieur à l'état liquide; sa chaleur latente traversant le métal pour se rendre dans le bain ambiant. Le kilogramme d'eau considéré en était parti avec 637 calories. Il en a acquis 26 en route. Il revient donc dans le serpentin avec 663 calories. Reprenant l'état liquide à 100 degrés, il ne retient plus que 100 calories, et en cède 563 à l'enveloppe métallique, c'est-à-dire, par cet intermédiaire, au bain d'évaporation.

Mais il y a plus, et l'on peut également récupérer les 100 dernières calories qui manquent encore à l'appel; auquel cas les

26 additionnelles formeront, après restitution complète, un surcroît, qui eût été, dans tous les cas, nécessaire pour parer aux pertes et aux mécomptes de toute nature, négligés dans cet aperçu trop absolu, tandis que l'on ne saurait les éviter dans une réalisation industrielle.

Pour y parvenir, on engage cette eau chaude, à 100 degrés de température, dans un second serpentin immergé au milieu de la saumure froide qui est destinée à l'alimentation de la chaudière. Cette nouvelle quantité de liquide se tiédit ainsi, en se chargeant des 100 dernières calories qu'elle ramènera finalement dans le bain, au moment où l'on alimentera. Le stock entier de 637 calories, entraîné par le torrent de vapeur, aura donc fait retour intégralement, avec un appoint supplémentaire de 26 autres qui s'y sont adjointes pendant le trajet, et sauf défalcation des pertes accessoires de toute nature dont il a été fait abstraction dans ce raisonnement.

Nous voyons maintenant comment la transformation du travail en chaleur, bien loin d'intervenir ici pour fournir, comme dans l'appareil Beaumont et Mayer, 637 calories par litre d'eau, n'en produit, au contraire, que 26, lesquelles disparaîtront dans les effets accessoires, mais auront eu pour rôle essentiel de provoquer la *régénération*, la *révivification* du stock de 637 calories, qui a été fourni une fois pour toutes, et reste ensuite perpétuellement en roulement.

Le rapport de 26 à 637 étant égal à 4 %, on s'explique bien facilement que si le premier système était totalement condamné à l'impuissance, le second, auquel on ne demande plus qu'un résultat d'une importance vingt-cinq fois moindre, ait pu, au contraire, obtenir un réel succès.

Mais, dès lors, on peut faire encore un pas de plus. Il est bien clair, comme nous l'avons fait remarquer, que le thermogène de Beaumont et Mayer ne pouvait prétendre qu'à l'utilisation de forces perdues, telles que les chutes hydrauliques sans emploi. Ici, au contraire, bien que les forces gratuites doivent, bien entendu, recevoir, quand il y aura lieu, la préférence, rien n'empêchera, en chargeant un peu le prix de revient, de demander le faible

appoint auquel a été réduite toute la question, à une machine à vapeur, lorsqu'on voudra s'installer dans des conditions quelconques loin des cours d'eau.

§ 2

MACHINES FRIGORIFIQUES A AIR

538 — Le principe des appareils frigorifiques ([1]) consiste employer une certaine quantité de travail, fournie par un moteur spécial, pour comprimer un fluide quelconque. On y provoque par là une élévation de température, en même temps que de pression. On fait évanouir la première par l'application d'un courant d'eau froide, puis la seconde par la détente. Si cette expansion s'était effectuée sans refroidissement préalable, elle eût, en la supposant réglée d'après la même loi que la compression, ramené le gaz aux conditions initiales, aux dépens de l'accroissement momentané de

([1]) Ledoux. Les machines à froid. *Annales des mines*, juillet-août 1878, p. 121. — Tellier (*Application de la thermodynamique à la production de la force motrice et du froid.* — Fabrication industrielle de la glace. *Génie civil*, t. III, p. 278). — Terquem. Sur la théorie des machines frigorifiques. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXXXIV, p. 602, 648. — Pictet. Machines frigorifiques à liquide dissociable. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. C, p. 329. — Production du froid. *Dictionnaire des arts et manufactures.* — Péclet. *La Chaleur*, t. III. — Cazin (Sur la détente des gaz. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 9 août 1869. — *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. XX). — Moutier. Sur la détente des gaz. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 29 novembre 1869. — Armengaud (*Revue des cours scientifiques*, 1880, p. 1023. — *Bulletin de l'Association scientifique de France*, juillet 1880, p. 225). — Lebreton. Méthode Poetsch pour le fonçage par congélation du terrain. *Annales des mines*, 8e série, t. VIII, p. 111.

Coleman. The mechanical production of cold. *Royal Institution of Great Britain*, 29 mai 1885. — Ward. On production of cold by mechanical means. *Rep. of British Association*, 1852, p. 131. — Kirk. On refrigerating machinery. *Inst. of civil Engineer*, London, 20 mars 1884. — Lightfoot. On refrigerating and making machinery. *Inst. of mechanical Engineers*, mai 1886. — Rowbotham. The abstraction of heat by mechanical energy. *Franklin Institute*, février 1885. — Copeland. Damp air refrigerating machine. *Engineering*, 7 décembre 1888. — Richmond. The refrigeration machine as a heater *Ibidem*, août 1886. — Schröter. *Untersuchungen an Kältemaschinen verschiedener Système*, Leipzig, 1887, in-8°. — Wilner. Refroidissement artificiel des eaux de condensation. *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, novembre 1884, p. 507. — Gottlieb Behrend. *Eis Maschinen.* — *Œsterreichische Zeitschrift*, 1884. — Agostino Cavellero. *Le Macchine a vapore.*

chaleur interne. Mais celui-ci vient d'être préalablement dissipé, et il n'en faut pas moins faire, pour la détente, un emprunt à l'énergie interne. On abaissera donc par là le niveau thermométrique du corps beaucoup au-dessous du point de départ. Cela fait, on relève enfin sa température, de manière à le ramener aux conditions initiales et à fermer le cycle. Seulement on a soin (en employant pour la transmission un bain liquide incongelable) d'emprunter les calories nécessaires pour cette dernière opération aux objets que l'on se propose de refroidir industriellement : eau à convertir en glace, viande à maintenir au-dessous de la température de décomposition, etc.

Pour la réalisation de ce programme, il convient d'établir entre les divers frigorifères une distinction essentielle d'après la nature du fluide employé. A cet égard, on peut établir trois catégories d'appareils, suivant que le gaz est incoercible dans les limites de l'expérience, ou qu'il est liquéfiable, ou enfin qu'il est soluble dans l'eau. Nous les appellerons, d'après l'usage établi, frigorifères *à gaz*, *à liquide*, ou *à affinité*.

539 — Dans une machine frigorifique à air, les quatre

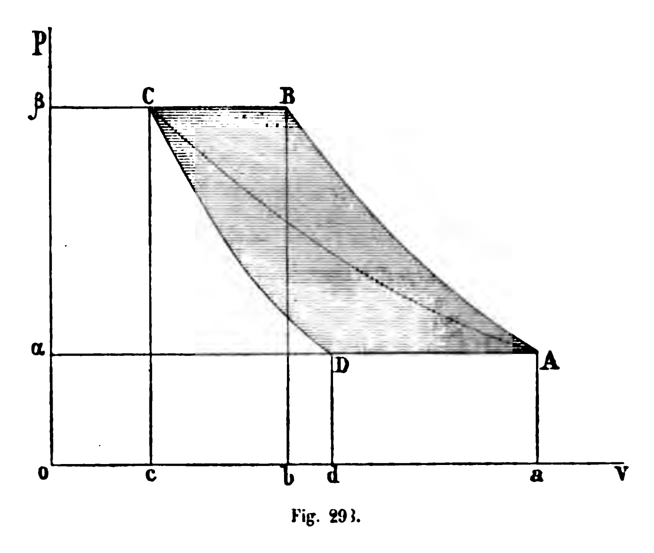


Fig. 298.

phases se développent de la manière suivante (fig. 298).

L'air part de l'état figuré par le point A. Son volume est $0a$. Sa tension 0α est égale à la pression atmosphérique.

Une compression, que nous supposerons d'abord adiabatique, l'amène par la transformation AB, à l'état B. Le volume a diminué jusqu'à $0b$. La pression a augmenté en 0β.

On refroidit extérieurement le corps par une application d'eau fraîche, et à pression constante, de telle sorte que le point figuratif décrive le profil BC. Le volume se contracte en $0c$, la tension restant égale à 0β.

La détente, que nous supposerons de même adiabatique, fait passer le corps de l'état C à celui qui est marqué par le point D, en suivant le contour CD. Le volume s'accroît en $0d$; la tension retombe à la pression atmosphérique 0α.

On réchauffe alors l'air à pression constante aux dépens des corps soumis à l'expérience. Le volume redevient $0a$, la pression restant égale à 0α.

540 — Pour connaître le degré d'échauffement produit par la compression adiabatique, nous invoquerons la relation (25) :

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

en désignant par t la température initiale, et par t' celle de l'échauffement.

Dans la seconde phase, la pression reste égale à p', et la température se trouve ramenée à t.

La détente fait ensuite retomber la tension de p' à p, et la température de t à un certain degré de refroidissement t'', que détermine encore l'équation (25) de la détente adiabatique :

$$\frac{t''}{t} = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

On remarquera la relation très simple :

$$t'' = t^2,$$

qui nous montre que le refroidissement se règle d'après l'échauffement temporaire dû à la compression, de telle sorte qu'ils comprennent entre eux la température initiale à titre de moyenne géométrique. En d'autres termes, les deux écarts de température, en plus et en moins, sont en raison inverse l'un de l'autre, quand on les caractérise au moyen des températures absolues.

541 — Le coefficient économique d'un appareil à froid est le rapport des deux quantités de chaleur suivantes : 1° celle que l'on parvient à soustraire aux objets à refroidir, pour la céder à l'air dans la dernière phase DA de son évolution (ou, si l'on veut, CA, puisque la période CD est adiabatique); 2° celle AT qui correspond théoriquement à l'aire du cycle figuratif, c'est-à-dire au travail effectif T qu'il a fallu fournir industriellement pour réaliser l'opération.

On peut remarquer qu'une telle évolution est exactement l'inverse du cycle réversible d'une machine à air chaud, dans laquelle, partant de l'état C, on aurait échauffé le fluide jusqu'en B à pression constante, pour le laisser se détendre en BA, le contracter ensuite suivant AD au contact de la source froide, et le comprimer enfin artificiellement le long de l'adiabatique DC de manière à le ramener à son état initial.

Le coefficient économique d'un tel moteur aurait pour expression le rapport de la chaleur qui correspond au travail effectif représenté par l'aire du cycle (c'est-à-dire AT) à la chaleur Q' qu'il aurait fallu fournir pour aller de C en A; ou, plus simplement, de C en B, puisque la phase BA est adiabatique.

542 — Cette interversion permet de ramener la théorie des appareils frigorifiques à celle des moteurs à air chaud.

Supposons d'abord que le cycle suivi dans les uns et les autres soit celui de Carnot (ce qui, à la vérité, n'a pas lieu dans le cas précédent, puisque les droites horizontales ne sont pas les isothermes de l'air). On aurait, entre les quantités de chaleur Q et Q', qui correspondent aux phases AD et BC, l'équation de Carnot (52) :

$$\frac{Q}{t} = \frac{Q'}{t'} = \frac{Q' - Q}{t' - t} = \frac{AT}{t' - t}.$$

Le coefficient économique ε' du moteur à air chaud conjugué du frigorifère serait :

$$\varepsilon' = \frac{AT}{Q'} = \frac{t' - t}{t'} = 1 - \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Celui ε de l'appareil à froid aura pour valeur :

$$\varepsilon = \frac{Q}{AT} = \frac{t}{t' - t} = \frac{1}{\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}.$$

On voit donc, qu'à l'inverse de ce qui a lieu pour les moteurs aéro-thermiques, le rendement d'une machine à froid est d'autant plus satisfaisant que les températures extrêmes sont moins écartées. C'est au détriment de l'économie que l'on arrive à exagérer l'intensité du refroidissement.

548 — Ainsi que nous venons de le faire remarquer, le cycle effectif d'un frigorifère à air n'est pas celui de Carnot. Il y a donc lieu (en reprenant les notations du n° 385) d'associer au coefficient économique principal ε, un coefficient spécifique ε_1, ainsi d'ailleurs que les facteurs ε_2 et ε_3.

En ce qui concerne ε_1, on peut améliorer le résultat en superposant l'une à l'autre les deux phases de compression et de refroidissement, de manière à lutter d'une manière progressive contre la tendance à l'échauffement, au lieu d'attendre que ce phénomène soit consommé, pour en abattre alors d'un seul coup le résultat.

On peut même concevoir un si juste équilibre entre les moyens de compression et de refroidissement, que la température reste constante pendant toute l'opération, au lieu de s'élever d'abord, pour être abaissée ultérieurement La compression devient par là isotherme, tandis que, dans le mode précédent, elle était supposée

adiabatique [1]. Avec un tel mode, on doit concevoir qu'une isotherme AC réunisse les deux états figurés par les points A et C, et que cette transformation remplace à elle seule les opérations distinctes et consécutives AB et BC du cycle précédent, en réduisant le nouveau tracé à la forme *triangulaire* ACD.

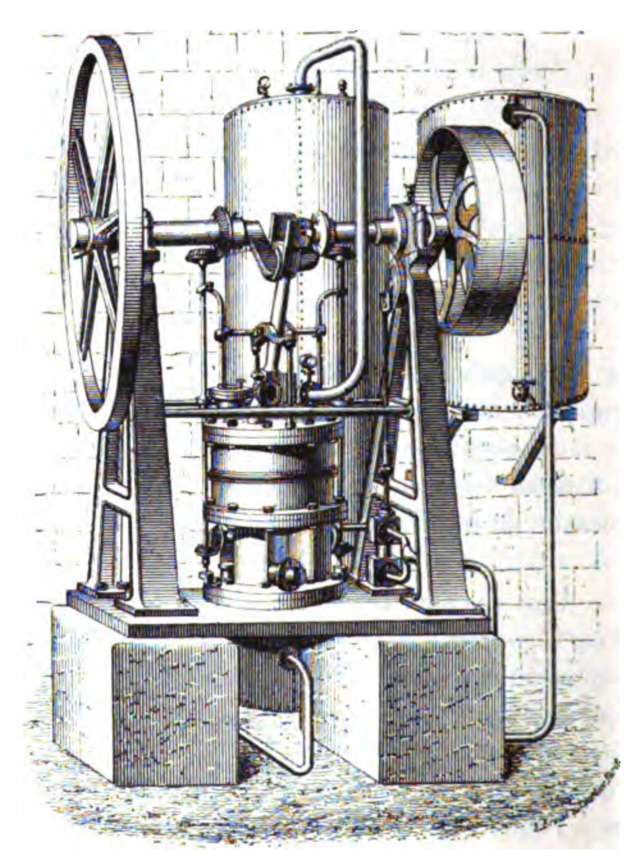


Fig. 299. — Machine frigorifique à air de Giffard (vue perspective).

Il est facile de reconnaître que ce procédé procure un meilleur rendement que le précédent. En effet, la chaleur soustraite aux objets à refroidir continue à correspondre à l'aire AD*ad*, tan-

[1] Telle est précisément l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placé ci-dessus (n° 333), pour les calculs relatifs aux machines soufflantes menées avec une lenteur suffisante.

dis que le travail à fournir n'est plus que ACD, au lieu de ABCD.

544 — Parmi les nombreux types de machines frigorifiques à air qui figurent dans l'industrie (¹), je décrirai comme exemple celle

(¹) Machine Allen. — Mach. Bell et Coleman. *Revue industrielle*, 1881, p. 233. — M. Brice Douglas. — M. Burnham. — M. Dalton. — M. Dufrené. — M. Ellis. — M. Gwynne. — M. Hall. *The Engineer*, 1er octobre 1880, p. 249 ; 18 novembre 1887, p. 410. — M. Haskett. — M. Hick et Hargreaves. *Revue industrielle*, 1881, p. 233. — M. Hunt. — M. Kirck (*Revue industrielle*, 1881, p. 233. — On compressed air and other refrige-

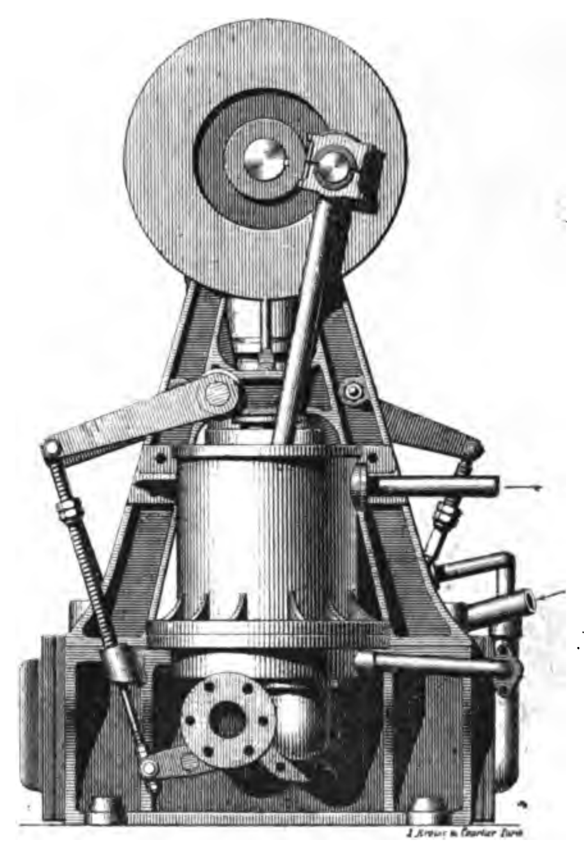


Fig. 300. — Machine frigorifique à air de Lightfoot (élévation latérale).

rating machinery. *Institution of civil Engineers*, 20 mars 1884). — M. Klein. — M. Knott. — M. Kyle. — M. Lightfoot (fig. 300 et 301) (*Revue industrielle*, 1881. p. 233. — *Engineering*, 1886, p. 467. — *Proceedings of the Institution of mechanical Engineers*, janvier 1881, p. 205 ; mai 1886, p. 201. — *Scientific American Supplement*,

de Giffard ([1]), dont les figures 299 et 302 représentent une vue perspective et un ensemble schématique.

Un cylindre à simple effet A, enveloppé d'un courant d'eau froide, reçoit l'air par sa partie supérieure. Celui-ci traverse les clapets d'un piston creux *a* pendant la course ascendante de ce dernier.

7 juillet 1886, p. 8778). — M. Lloyd. — M. Matthews. *Industries*, 5 octobre 1888. 1p 319. — M. Millan. — M. Northcott. — M. Pootle. — M. Schulz. — M. Sturgeon

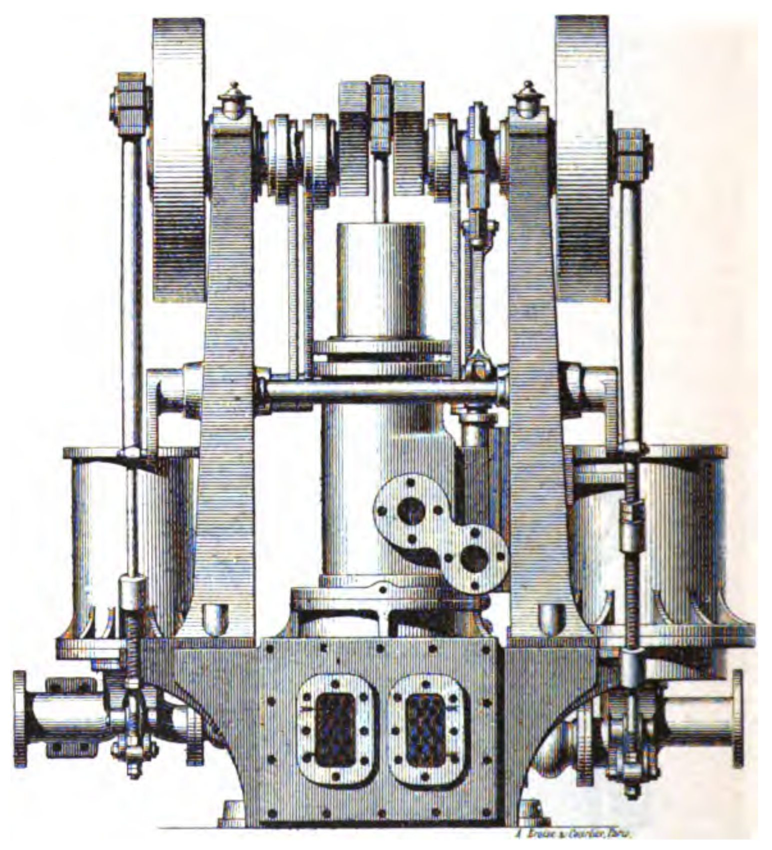


Fig. 301. — Machine frigorifique à air de Lightfoot (élévation longitudinale).

Revue industrielle, 1881, p. 233. — M. Teal et Fryer. — M. Windhausen. *Revue industrielle*, 1881, p. 233. — M. Tessié du Motay et Rossi. *The Engineer*, 20 avril 1884, p. 144.

([1]) *Revue industrielle*, 1881, p. 233. — *Comptes rendus mensuels des séances de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne*, juin 1876.

A la course descendante, le fluide se trouve comprimé, et refoulé à travers le tube L dans un réfrigérant R, alimenté par l'eau froide qui a traversé l'enveloppe du cylindre A. Un réservoir R' est annexé à R. De là, le gaz se rend par le tuyau M au cylindre détendeur B, dont le piston plein *b* se meut à contresens du précédent, d'après

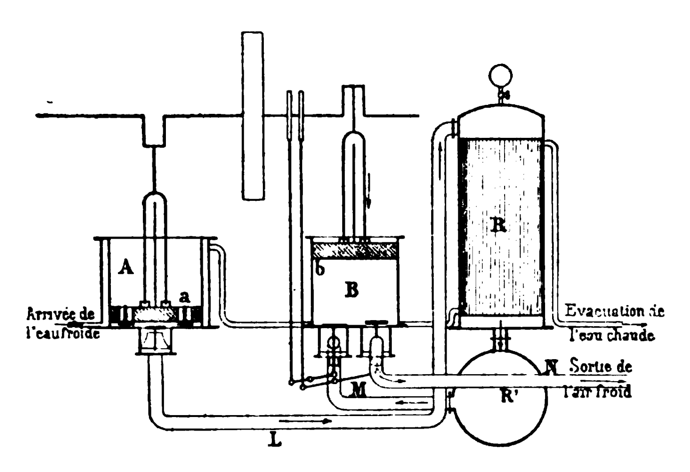


Fig. 302. — Machine frigorifique à air de Giffard (coupe schématique).

le calage de leurs manivelles sur l'arbre moteur. Pendant la course descendante, l'air refroidi est évacué à travers la conduite N, et va remplir son office de réfrigération. Les soupapes sont commandées par des excentriques montés sur l'arbre tournant. On reste maître d'en modifier la levée, de manière à faire varier l'admission dans le cylindre détendeur B, à augmenter par conséquent la pression dans le réservoir R' (puisque le piston ne cesse d'y refouler l'air), et finalement le degré du refroidissement.

Comme le gaz doit toujours sortir à la pression atmosphérique, on voit qu'il existe une limite inférieure de tension qu'il est nécessaire d'observer d'après l'équation-typique, dans le choix des dimensions respectives des cylindres, en fonction des températures initiale et finale.

545 — Pratiquement, on obtient avec les machines à air froid un rendement de 1200 *calories négatives* par cheval-heure. La

pression la plus favorable paraît être de 4 atmosphères. On peut compter sur un résultat de 25 calories environ par mètre cube d'air passé dans la machine.

L'influence de l'humidité atmosphérique est nuisible. La vapeur se condense finalement en eau, et même en neige ou en glace. Elle restitue à ce moment ses calories de constitution, qui deviennent nuisibles, puisqu'elles tendent à réchauffer l'air que l'on s'est proposé de refroidir (1). On peut donc trouver une sorte de paradoxe dans l'emploi, assez fréquent dans la pratique, d'une injection d'eau froide à l'intérieur du cylindre compresseur. Mais il ne faut pas oublier l'avantage qui résulte, ainsi que nous l'avons reconnu, de la compression isotherme, ou tout au moins d'un ralentissement marqué de l'échauffement, au moyen de cette injection qui permet de mener de front les opérations de la compression et du refroidissement.

Dans la machine de Bell Coleman, l'air rafraîchi après sa compression à l'aide d'une injection d'eau, passe dans une série de tuyaux que l'on maintient à une basse température au moyen d'un emprunt fait au réservoir de froid. Il y abandonne presque toute son humidité avant d'arriver au cylindre détendeur, ce qui évite la formation de la neige dans ce dernier (2). Dans l'appareil frigorifique de Lightfoot (fig. 300, 301), l'air se purge de la même manière à l'intérieur d'un premier cylindre détendeur, avant de se rendre au second, où s'accomplit la détente décisive (3).

Les espaces libres exercent également une influence fâcheuse comme pour toutes les questions de détente (4). Elle peut atteindre ici une perte de 100 calories négatives par cheval et par heure (5). Le moyen d'y remédier consiste à fermer la soupape d'émission

(1) On éviterait cet inconvénient avec des machines fermées, dans lesquelles une même quantité d'air, préalablement desséché, fonctionnerait indéfiniment.

(2) *Institution of civil Engineers*, 14 février 1882. — *The Engineer*, 9 septembre 1887, p. 219.

(3) *Institution of mechanical Engineers*, janvier 1881.

(4) Les diverses circonstances relatives à la distribution : détente, compression, espace nuisible, laminage, etc., ne sauraient être qu'effleurées dans cette partie du Cours. Elles ne pourront acquérir un degré suffisant de clarté que dans la *quatrième partie*, consacrée tout entière à l'étude du mécanisme des machines à vapeur.

(5) Ledoux. *Annales des mines*, juillet-août 1878, p. 150.

du cylindre détendeur avant la fin de la course, de manière à reformer la pression dans les espaces nuisibles.

§ 3

MACHINES FRIGORIFIQUES A VAPEUR LIQUÉFIABLE

546 — Comme exemple de frigorifère basé sur l'emploi d'une vapeur liquéfiable, je considérerai, pour fixer les idées, l'appareil Pictet à acide sulfureux ([1]).

Le fluide est admis par un jeu de soupapes convenablement réglé dans un cylindre à double effet A (fig. 305), enveloppé d'un cou-

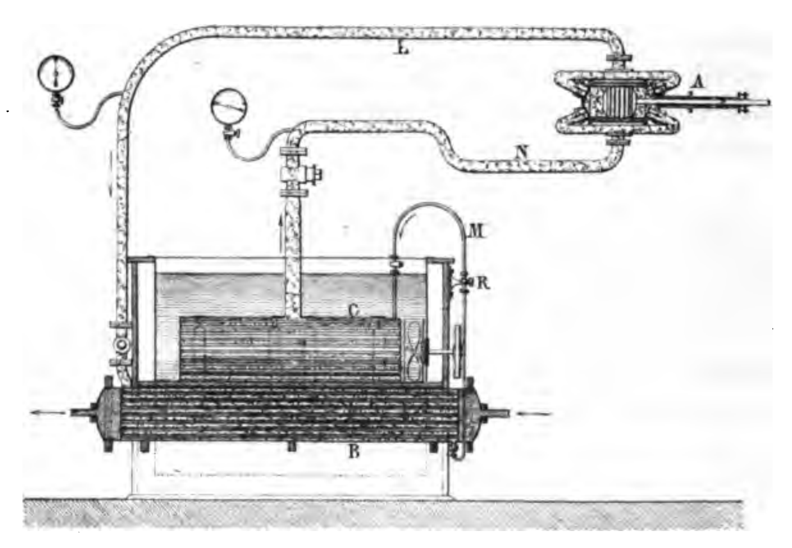


Fig. 305. — Machine frigorifique à acide sulfureux de Pictet (coupe schématique).

rant d'eau à la température t' dont on dispose. La vapeur comprimée jusqu'à la pression p' qui correspond à ce degré de l'échelle

([1]) Raoul Pictet (*Nouvelles machines frigorifiques basées sur l'emploi de phénomènes physico-chimiques*, Genève, 1885, in-8°. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 9 février 1885. — *La Nature*, 3 mars 1877 ; juin 1882. — *Revue industrielle*, 4 octobre 1882, p. 390.

La machine frigorifique Gillet emploie également l'acide sulfureux liquide.

thermométrique [1], est refoulée à travers le tuyau L dans un condenseur de surface B. Elle s'y liquéfie sous cette pression et à cette température [2]. Cette capacité est mise en communication avec le détendeur C, au moyen d'un tube M, muni d'un robinet R qui sert, en étranglant à volonté la section de la veine, à en régler l'écoulement, et à faire par là varier arbitrairement la pression p dans le détendeur, ainsi que la température t qui lui correspond d'après la loi des tensions de l'acide sulfureux. Ce dernier organe est construit comme le précédent, et plongé dans une solution de chlorure de calcium, suffisamment concentrée pour être incongelable aux températures d'expérience. C'est ce bain liquide qui sert d'intermédiaire entre la vapeur refroidie par sa détente et les corps proposés. Il cède incessamment ses propres calories au détendeur, et s'empare en même temps de celles des objets que l'on met en rapport avec lui, tels par exemple que des cylindres pleins d'eau à convertir en glace. Enfin la vapeur retourne, par le tube N, du détendeur au cylindre compresseur, pour y achever son cycle de transformations.

547 — Si l'on admet que la compression et la détente soient adiabatiques, et que les échanges de la chaleur avec les liquides extérieurs s'effectuent à des températures rigoureusement constantes, on aura réalisé par la pensée un cycle de Carnot. Dès lors le théorème de Carnot s'appliquera comme ci-dessus, puisqu'il est indépendant de la nature du corps, et l'on aura encore la formule :

$$\varepsilon = \frac{t}{t' - t},$$

identique à celle que nous avons établie plus haut pour les machines frigorifiques à air. Notons donc que le choix du corps qui sert de véhicule à la chaleur reste indifférent dans le fonctionnement des frigorifères, *tant que l'on opère entre les mêmes températures extrêmes*.

(1) Ordinairement $1^{kg},8$ ou 2 kilogrammes de pression effective.

(2) La superficie de ce conducteur doit être calculée sur le pied de 48 mètres carrés pour 100 000 calories effectives par heure, évaluées d'après le poids de glace congelée.

Il faut toutefois remarquer que toutes les substances ne se prêteront pas avec la même facilité à ce que l'on réalise effectivement leur cycle de Carnot. En outre, tels ou tels écarts de température seront plus ou moins aisés à atteindre avec les divers fluides. Sous ce rapport donc, il faudrait bien se garder de prendre l'énoncé précédent dans un sens trop absolu.

548 — Nous pouvons, par exemple, constater de suite que les gaz parfaits permettront un abaissement thermométrique plus marqué que l'emploi des vapeurs saturées. En effet le travail nécessaire pour modifier l'énergie interne du kilogramme de vapeur dans la compression adiabatique a pour valeur (132) :

$$\mu' - \mu + \rho' x' - \rho x, \tag{145}$$

tandis que la variation de la chaleur interne d'un gaz parfait (18) est égale à :

$$c\,(t' - t).$$

Or la chaleur spécifique de l'air à volume constant c est bien moindre que celle de l'eau. Cette dernière expression est donc inférieure à $\mu' - \mu$, et *a fortiori* à la fonction (145). Par conséquent, à égalité de travail dépensé, la chute de température obtenue variera dans le sens inverse.

On pourra dès lors obtenir un résultat d'une importance donnée avec des frigorifères à liquide de moins grandes dimensions qu'avec une machine à air froid, ce qui constitue un avantage considérable.

Comme compensation, il convient de remarquer que l'air se trouve partout et ne coûte rien, tandis que les liquides volatils ont une valeur industrielle, et seront d'un emploi plus embarrassant. Enfin il importe encore d'ajouter que les variations de pression que comporte un écart thermométrique déterminé sont très faibles avec l'air, tandis qu'elles deviennent importantes pour les liquides volatils, et peuvent alors exiger des surcroîts d'épaisseur. Il ne

faudrait pas, d'un autre côté, employer des corps doués de tensions tellement faibles que, pour agir avec une intensité suffisante, on se trouvât entraîné à des dimensions exagérées. Nous avons déjà fait observer que l'air pèche comparativement dans ce sens.

549 — Il existe encore une autre différence essentielle entre ces deux sortes d'agents. Nous avons vu (nº 543) quel avantage s'attache, pour les gaz parfaits, à superposer les deux phases de compression et de refroidissement. Avec une vapeur saturée, ces périodes resteront forcément distinctes. En effet, les changements de volume exécutés sous pression constante ne modifient pas la température. On voit seulement une partie de la vapeur quitter ou reprendre la forme liquide.

S'il arrive au contraire que la vapeur cesse d'être au contact de son liquide, elle se comporte plus ou moins exactement comme un gaz permanent ; et la compression mécanique tend à la surchauffer, si l'on n'enlève pas en même temps la chaleur dégagée. Nous avons reconnu d'ailleurs (nº 540) que cette circonstance est plutôt de nature à faciliter l'extension du refroidissement. Nous chercherons dans un instant (nº 551) à préciser par le calcul les conditions qui placeront le fonctionnement de l'appareil dans l'un ou l'autre de ces deux cas.

550 — Lorsque la vapeur ne cesse pas un seul instant de rester saturée, la question se pose de la manière suivante.

La température t' du réfrigérant dépassera, suivant les conditions de son établissement, de 5 à 10 degrés environ celle de l'eau dont on dispose. Celle-ci se tiendra elle-même à 11 ou 12 degrés, si elle est puisée dans un puits profond, et pourra atteindre 30 à 35 degrés quand elle sera prise à la surface dans des pays chauds.

Lorsque l'on emploie des liquides dont la tension croît rapidement avec la température, on peut trouver insuffisant le refroidissement par l'eau. On y a toujours recours, bien entendu, pour commencer le rafraîchissement, mais on vient en aide à cet agent en sacrifiant une partie de la détente pour achever la conden-

sation au sein de ce liquéfacteur, au détriment de l'expansion décisive qui s'effectuera dans le détendeur ([1]).

La température du réfrigérant étant une fois déterminée, la pression p' s'en déduit d'après la loi des tensions propres à la vapeur saturée de la substance employée.

Si l'on fixe, d'autre part, le point t auquel on veut abaisser l'état thermométrique du corps, la pression p en deviendra elle-même une conséquence d'après ce tableau.

Les valeurs de ces éléments p et p' ([2]), jointes à la situation du point critique du liquide volatil ([3]), à son prix de revient, aux facilités plus ou moins grandes que l'on trouvera pour se le procurer dans le commerce, aux inconvénients de son action sur les métaux, aux dangers de son inflammation, de sa toxicité, etc., limitent beaucoup le choix à cet égard. On a vu figurer jusqu'ici dans les frigorifères à liquide : l'éther sulfurique ([4]), l'acide sulfureux ([5]), l'éther méthylique ([6]), le chlorure de méthyle ([7]), l'éthylène ([8]), l'acide carbonique anhydre ([9]), le gaz ammoniac anhydre ([10]).

([1]) Ce principe se trouve appliqué dans la nouvelle machine à acide carbonique de Raydt.

([2]) Il ne faut pas oublier notamment que si le travail *théorique* de la pompe de compression reste le même, quel que soit le choix du gaz liquéfiable, pour un même rendement thermique de la machine, cependant le coefficient économique organique diminue avec l'importance matérielle que prend cette pompe.

C'est ainsi par exemple, d'après M. Windhausen, que, à pouvoir frigorifique égal, le piston de la pompe n'a besoin d'engendrer, avec l'acide carbonique, qu'un volume 15 fois moindre qu'avec le gaz ammoniac, 25 fois moindre que pour l'acide sulfureux, 50 fois moindre qu'avec l'éther. On compte, en valeur absolue, que pour une production de 100 kilogrammes de glace *à l'heure*, le piston de la pompe de compression doit engendrer *par minute* 1 mètre cube dans les machines à gaz ammoniac.

([3]) Par exemple le point critique de l'acide carbonique se trouve à 30°,9 du thermomètre usuel, température dont nous rapprochent souvent nos conditions climatériques. La pression est alors de 77 atmosphères. On comprend donc combien il est important d'employer des moyens énergiques de refroidissement, ainsi que nous venons de l'expliquer.

([4]) Machine Jeddelay et Mackay. *Appleton Dictionary of mech.*, t. II, p. 134.

([5]) Voy. ci-dessus, n° 546, note 3.

([6]) Machine Tellier, *Annales industrielles*, 10 septembre 1871, p. 822.

([7]) Machine Vincent. — Mach. Crespin, *Revue industrielle*, 1880, p. 61; 1886, p. 341.

([8]) Wroblewski. Emploi de l'éthylène comme réfrigérant. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 20 juillet 1880, p. 136.

([9]) Machine Gaujce. — Mach. Rayet. — M. Windhausen.

([10]) Lightfoot. The use of ammonia as a refrigerating agent. *Scientific American*

L'éther n'a plus que des pressions tout à fait défaillantes dans les températures inférieures. Aussi son emploi a-t-il disparu. Le gaz ammoniac présente au contraire des tensions excessives aux températures élevées ([1]). Cependant son usage s'est beaucoup répandu, et ce corps, qui n'est pas sujet à l'incendie, tend aujourd'hui à prévaloir. L'acide sulfureux, l'éther méthylique ont des tensions mieux réglées ([2]), ainsi que le montre le tableau suivant ([3]) :

SUBSTANCES	PRESSION EN KILOGRAMMES PAR MÈTRE CARRÉ	
	à — 20 degrés	à + 30 degrés
Éther sulfurique	917	8 651
Acide sulfureux	6 519	46 659
Éther méthylique	11 992	64 961
Gaz ammoniac	19 003	120 083

551 — Occupons nous de formuler les conditions qu'il est nécessaire d'observer pour que le fonctionnement de la vapeur s'opère sans surchauffe, et qu'elle reste constamment saturée. On

Supplement, 26 mai 1888, p. 10337. — Machine Bollantine. — Mach. Fixary (*Revue industrielle*, 1er janvier 1886, p. 1. — *Génie civil*, t. IX, p. 282. — *Chronique industrielle*, 28 novembre 1886. — *Revue universelle de la brasserie et de la malterie*, 22 juillet 1888. — Dr Collineau. *La Réfrigération*, in-8°). Voy. fig. 304, 305, 306. — M. Gibier. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 4 juin 1883, p. 1624. — M. Rilbourn. *Engineering*, 11 mars, 28 octobre 1881 ; 20 octobre 1882 ; 28 mai 1886. — M. La Vergne (*Revue industrielle*, 28 juillet 1888, p. 293. — *Engineering*, 15 juin 1888. — *American Machinist*, 11 octobre 1884). Voy. fig. 307. — M. Lebrun. *La Gazette des brasseurs*, 19 février 1888, p. 109. — M. Richmond. *The Engineer*, 1880, 2e semestre, p. 211. — M. Tessié du Motay. *The Engineer*, 20 août 1880. — M. Wood et Baitle. *American Machinist*, 28 juin 1884. — M. *Éclipse*. *Ibidem*. 19 novembre 1887.

([1]) Sa pression atteint 160112 kilogrammes par mètre carré, à 40 degrés du thermomètre usuel.

([2]) Les points d'ébullition sous la pression normale sont les suivants :

Acide sulfureux	— 10,0
Chlorure de méthyle	— 23,0
Gaz ammoniac	— 38,5
Acide carbonique	— 72,0

([3]) Ledoux. *Annales des mines*, juillet-août 1878, p. 160 et 205.

se placera en deçà ou au delà de ce point, suivant que l'on voudra adopter l'une ou l'autre allure.

Je désignerai à cet effet par x la proportion de vapeur qui se trouve renfermée dans le corps refroidi à la température t, lorsque, au moment du recul du piston, il se rend par le tube N à l'aspiration du cylindre A. Un kilogramme de ce fluide apporte avec lui la quantité de chaleur interne $\mu + \rho x$ (¹).

Le liquide entre en vapeur intégralement, mais sans dépasser la limite qui ferait passer dans le domaine de la surchauffe. On a donc, pour la température t', la valeur $x' = 1$, et la chaleur interne devient $\mu' + \rho'$. Le gain qu'elle a subi s'exprime dès lors par :

$$(\mu' + \rho') - (\mu + \rho x).$$

Il doit être équivalent au travail de compression proprement dit. Pour subvenir en outre au travail de refoulement à travers le tube, on a, d'une part, le terme $Ap'v'$ (ou approximativement $Ap'u'$, si l'on néglige, dans le total v', le volume du liquide w' devant l'expansion u' due à la vaporisation). En sens contraire, le piston subit de la part de la contre-pression le travail $-Apux$. Nous aurons donc pour l'ensemble :

$$A\,(p'u' - pux).$$

Si l'on réunit ce résultat avec le précédent, on obtient une expression algébrique toute semblable, dans laquelle seulement la lettre r vient remplacer ρ (132); ce qui donne pour le travail total T' de compression et de refoulement :

$$AT' = (\mu' + r') - (\mu + rx).$$

Mais il reste à connaître la valeur de x.

Pour y parvenir, nous invoquerons l'équation (138), qui règle la détente adiabatique des vapeurs saturées. Elle donne dans le cas actuel, pour lequel $x' = 1$:

$$\frac{rx}{t} - \frac{r'}{t'} + \int_{t'}^{t} \frac{d\mu}{t} = 0,$$

(¹) Évaluée à partir du zéro du thermomètre usuel.

d'où, en renversant l'ordre des limites :

$$rx = t\left(\frac{r'}{t'} + \int_t^{t'} \frac{d\mu}{t}\right),$$

ou, par approximation, en appelant C la chaleur spécifique du liquide :

$$rx = t\left(\frac{r'}{t'} + \mathrm{C}\,\mathrm{L}\frac{t'}{t}\right).$$

Connaissant ainsi la valeur de x, nous posséderons celle du volume ux qu'il est nécessaire d'offrir à l'expansion de l'unité de poids de la substance considérée, pour aller exactement jusqu'à la limite extrême de la saturation, sans la franchir. Inversement, on pourra connaître le poids qu'il convient, dans ce but, d'aspirer à l'intérieur d'un cylindre dont le volume serait désigné à l'avance. La question proposée se trouve donc dès à présent résolue; mais nous pouvons poursuivre plus loin cette analyse, et vérifier *a posteriori* la formule qui a été donnée ci-dessus pour le rendement.

552 — La vapeur parvient au condenseur, et y reprend la forme liquide, en cédant à la paroi une quantité de chaleur Q′, qui n'est autre que r, puisqu'il s'agit de la condensation d'un kilogramme :

$$Q' = r.$$

Le fluide passe alors dans le détendeur, où il parvient à la température t et à la pression correspondante p, d'où résulte une proportion inconnue x'' de vapeur à la fin de la détente. Le corps effectue dans cette période un travail moteur T, qui viendra en défalcation de T′ dans l'effet total à produire. La détente étant adiabatique, ce travail correspond à la variation d'énergie interne :

$$\mathrm{AT} = \mu' - (\mu + rx'').$$

Pour déterminer x'', nous reprendrons encore l'équation (138) de la détente adiabatique, en y réduisant à zéro la proportion initiale

de vapeur, puisque le corps s'est complètement liquéfié dans le condenseur :

$$\frac{rx''}{t} + \int_{t'}^{t} \frac{d\mu}{t} = 0.$$

On en tire :

$$rx'' = t \int_{t}^{t'} \frac{d\mu}{t},$$

ou encore, d'après la valeur de x :

$$rx'' = rx - \frac{t}{t'} r'.$$

Il vient par cette substitution :

$$AT = \mu' - \mu - rx + \frac{t}{t'} r',$$

et par suite, pour le travail effectif à fournir :

$$A(T' - T) = \frac{t' - t}{t'} r'.$$

Enfin, dans la quatrième phase, le corps emprunte au bain de chlorure de calcium une quantité de chaleur Q, suffisante pour ramener sa proportion de vapeur x'' au degré x avec lequel il pénètre dans le cylindre compresseur, en achevant son cycle de transformations. Il lui faut, pour cela, volatiliser le poids $x - x''$. On a donc :

$$Q = r(x - x'') = \frac{t}{t'} r'.$$

Nous pouvons actuellement former l'expression du coefficient économique, c'est-à-dire le quotient de la quantité de chaleur Q soustraite au bain que l'on soumet à l'expérience, par celle A (T'—T) qui correspond au travail effectivement fourni. On retrouve ainsi la valeur :

$$\varepsilon = \frac{t}{t' - t},$$

qui a été indiquée ci-dessus.

Les constructeurs de frigorifères à acide sulfureux annoncent des rendements pratiques de 2500 calories négatives par cheval-heure. Ces appareils, peu énergiques, ne descendent guère qu'à — [illegible] degrés.

553 — On obtient des résultats plus accentués à l'aide du gaz ammoniac anhydre, dont il ne faut pas confondre l'usage avec celui de l'ammoniaque aqueuse des appareils à affinité, qui nous occuperont dans un instant.

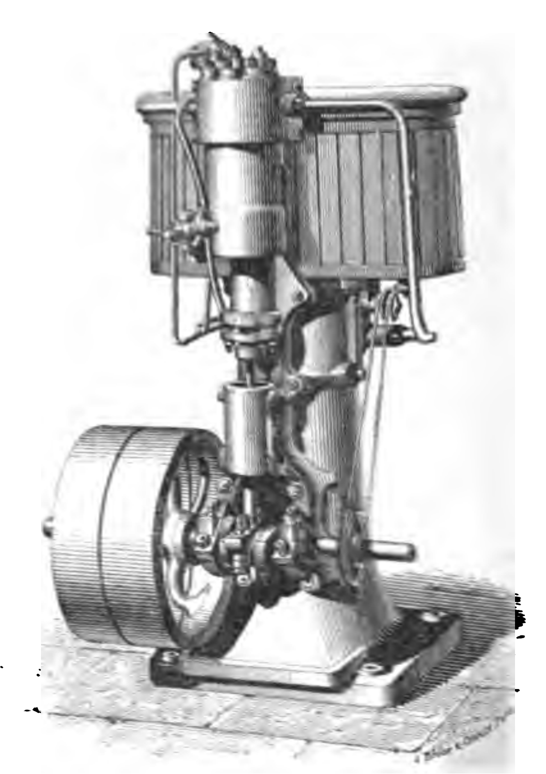


Fig. 304. — Machine frigorifique à gaz ammoniac de Fixary (vue perspective).

L'un des types les plus répandus de ce système est la machine Fixary ([1]). Une pompe de compression (fig. 304 et 305) aspire le gaz dans le congélateur, et le refoule dans le condenseur où, avant de

([1]) Voy. n° 550, note 1.

s'engager dans le serpentin, il traverse un épurateur destiné à retenir les particules d'huile qui ont été entraînées par le gaz hors de la pompe. Sous l'action de l'eau froide et de la compression produite par ce dernier appareil, le gaz se liquéfie dans un compartiment spécial. Un robinet régulateur l'admet ensuite dans les serpentins du congélateur, où il se détend en reprenant la forme gazeuse. De là, il est rappelé par la pompe, qui le renvoie de nouveau dans la circulation.

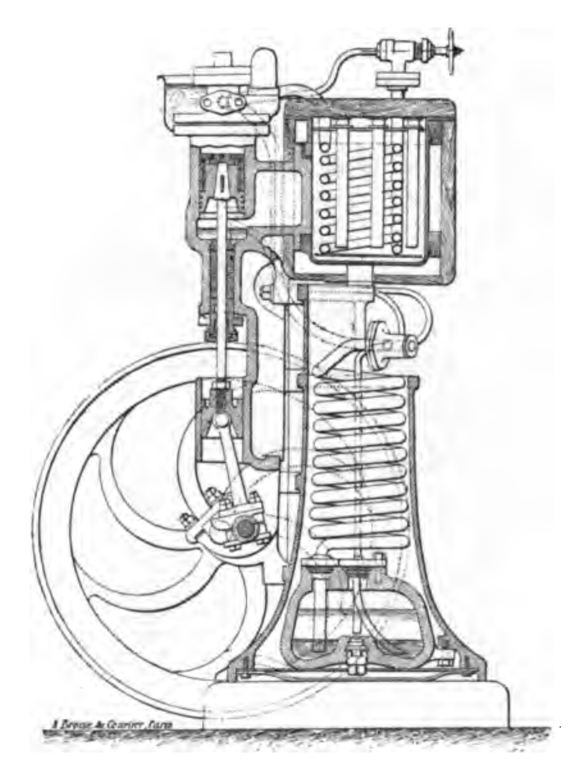


Fig. 305. — Machine frigorifique à gaz ammoniac de Fixary (coupe verticale).

L'huile qui s'est séparée du courant gazeux est ramenée automatiquement, à travers un petit tube, au-dessous du piston où elle forme joint hydraulique, comme nous allons le voir.

La pompe de compression présente une disposition des plus ingénieuses (fig. 306). Elle comprend deux cylindres verticaux A, dont chacun porte à sa partie supérieure une soupape d'aspiration B, et une

autre de refoulement C. Les pistons sont à simple effet, et le gaz ammoniac n'est admis que sur leur face supérieure, laquelle est baignée d'une couche d'huile de quelques millimètres. Ce liquide, outre sa propriété lubrifiante, présente l'avantage de supprimer tous les espaces nuisibles en s'y insinuant à la fin de la course. Au-dessous des pistons, se trouve une certaine masse d'huile

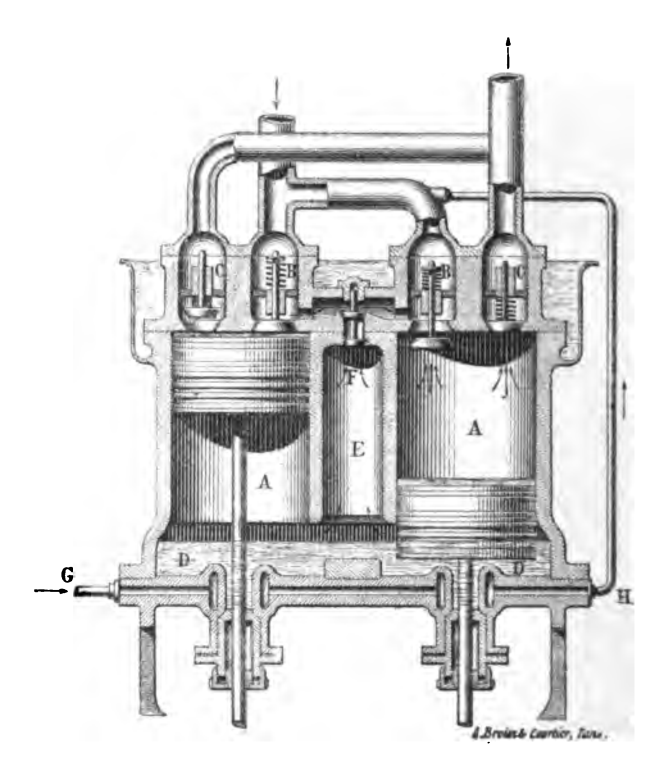


Fig. 306. — Pompe de compression Fixary (coupe verticale).

minérale D, dans laquelle plongent ces organes, qui sont munis de cannelures destinées à relever le liquide le long de la surface des cylindres.

Entre les deux corps de pompes, se trouve une chambre d'équilibre E, qui communique avec les bains d'huile D. A sa partie supérieure, une soupape d'équilibre F la met en communication, à travers des conduits latéraux, avec des soupapes d'aspiration. De cette manière, les fuites de gaz qui se produisent toujours dans les

premiers moments du fonctionnement de toute machine, passent au milieu de l'huile D. Elles s'y imprègnent de ce lubrifiant, et finissent par se concentrer sous pression dans la chambre E. Lorsque la tension ainsi formée arrive à égaler celle de l'aspiration (c'est-à-dire

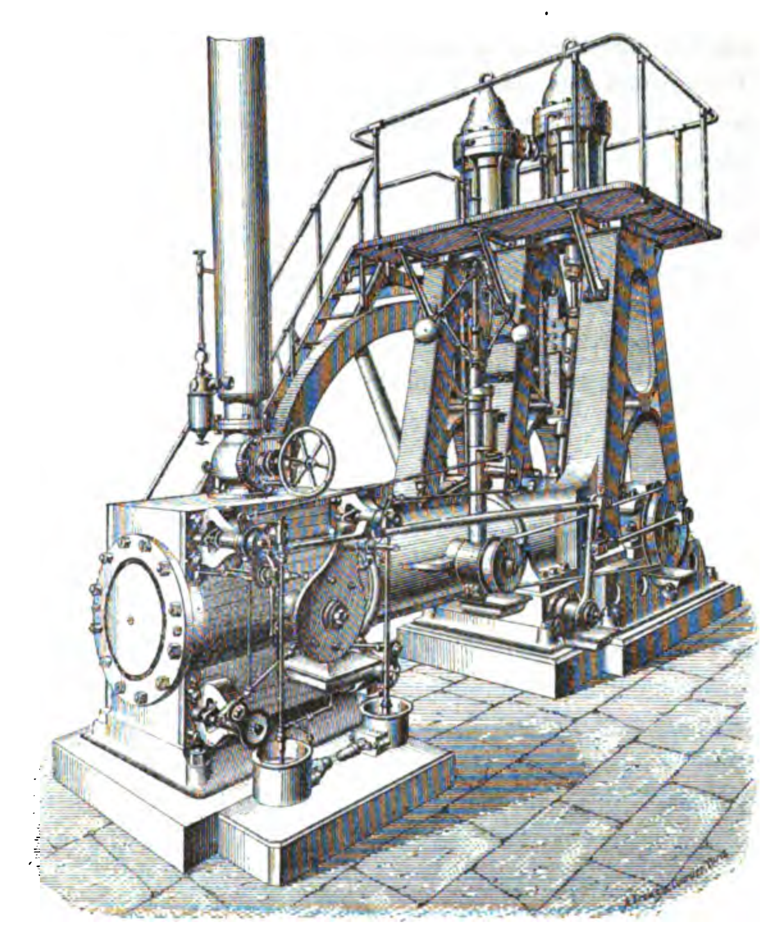


Fig. 307. — Machine frigorifique à gaz ammoniac de La Vergne (vue perspective).

1 à 1 $\frac{1}{2}$ atmosphère), le clapet F se soulève, et la perte de gaz se trouve récupérée par la masse active. On voit en outre qu'elle a servi de véhicule pour amener un peu d'huile au milieu des organes.

Ce clapet F joue en même temps le rôle de soupape de sûreté

pour l'espace qui se trouve compris sous la face inférieure des pistons. Son jeu impose une limite peu élevée à la pression de cette enceinte, et des presse-étoupes que traversent les tiges. On se trouve donc assuré de ce côté contre l'importance que pourraient prendre les fuites au dehors. On évite en même temps les pertes de gaz, l'inconvénient de leur remplacement, et la gêne de l'odeur qu'elles répandraient dans l'atelier. On augmente encore l'étanchéité sur ce point, en entourant les tiges d'un fourreau rempli d'huile, qui est congelée par une petite dérivation GH du gaz refroidi. Ce joint pâteux, à la fois imperméable et sans frottement, supprime l'échauffement des pièces métalliques auquel on se trouve exposé dans les conditions ordinaires. On peut compter avec ces appareils, en employant de l'eau de condensation à 15°, sur une production de 25 à 30 kilogrammes de glace par kilogramme de charbon, suivant la force de la machine et le rendement du moteur.

§ 4

MACHINES FRIGORIFIQUES A AFFINITÉ

554 — Il existe encore un autre moyen de faire passer alternativement un corps de la forme liquide à l'état gazeux, comme nous l'avons déjà vu à l'occasion des moteurs (n° 529) : c'est la dissolution d'un gaz dans l'eau, et en particulier celle de l'ammoniaque[1]. La machine Carré nous fournit un exemple de ce système [2]. La figure 308 en représente d'une manière schématique la disposition générale.

Une chaudière A est chauffée, soit directement au moyen d'un foyer, soit à l'aide de la vapeur qui est fournie par un générateur distinct. Elle renferme une solution ammoniacale, riche à la partie

[1] On a également eu recours à la forte affinité de l'acide sulfurique pour l'eau (Machine *la Pneumatique*. *Annales industrielles*, 1884, t. I, p. 75).

[2] Dauriac. *De la production du froid, appareil Carré*, 1863, in-12. — *Revue industrielle*, 29 janvier 1881. — Knight. *Mechanical Dictionary*, p. 488. — Pontifex et Wood. *Engineering*, 1er avril 1887, p. 289.

supérieure, plus pauvre dans le bas. Trois tubes *a*, *d*, *f*, la mettent en communication avec divers organes énumérés ci-après.

Un condenseur B est refroidi extérieurement par un courant d'eau. Il reçoit du tube *a* les vapeurs ammoniacales, qui se déposent sur le fond sous la forme liquide. Le corps se rend, à partir de là, dans le détendeur C, à travers un tube *b*. Cet écoulement est réglé à l'aide d'un robinet β.

Le détendeur C constitue le réfrigérant des corps étrangers que l'on met en rapport avec lui, en vue de les dépouiller de leur propre température. Un tuyau *c* établit sa communication avec le vase d'absorption D.

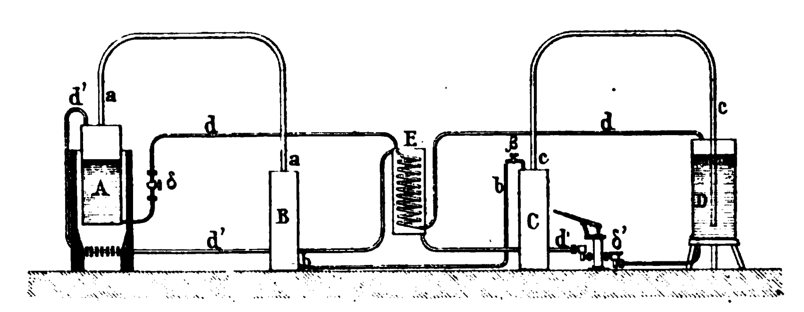


Fig. 308. — Machine frigorifique à ammoniaque de Carré (coupe schématique).

Ce dernier renferme une solution aqueuse d'ammoniaque. Un tube *d* retourne de la partie supérieure de ce récipient au pied de la chaudière. Un robinet δ sert à régler l'écoulement. Une seconde conduite *d'* met au contraire en relation le bas du vase D avec la partie supérieure de la chaudière. Une petite pompe δ' est destinée à provoquer le passage du liquide à travers ce tuyau.

Les deux tubes *d* et *d'* traversent, en E, un échangeur de températures. Expliquons le jeu de cet appareil.

555 — La chaleur provoque, dans la chaudière A, le départ du gaz hors de la solution alcaline. Il s'y développe une pression qui atteint 8 à 12 atmosphères ([1]). Un peu de vapeur d'eau se joint au courant gazeux, qui se rend par le tube *a* dans le condenseur B, et

([1]) Voy. ci dessus, n° 529, note 2.

s'y liquéfie sous l'influence d'un courant d'eau froide. La tension qui correspond à cette température, force le liquide à traverser le tuyau *b*, dont le robinet β épanouit ou étrangle à volonté le passage, de manière à régler cette pression, et à réagir par suite sur la température.

En G, le liquide se vaporise, en refroidissant les corps extérieurs. L'affinité du gaz ammoniac pour l'eau du dissoluteur D épuise incessamment le tube *c* vers cette extrémité; ce qui provoque, à travers cette conduite, l'écoulement du fluide alcalin. Le jeu de la pompe δ' envoie le liquide ainsi enrichi à la partie supérieure de la chaudière, où le titre est le plus élevé. La tension de cette capacité détermine inversement, à travers le tube *d*, le retour de la solution pauvre située à la partie inférieure, et dont le robinet δ gouverne le débit. La liqueur chaude se refroidit en E, en même temps que le liquide froid qui provient de D par le conduit *d'* vient s'y réchauffer. De cette manière, l'un et l'autre préparent leurs températures respectives, en vue du régime des enceintes vers lesquelles chacun d'eux est en train de se diriger.

Tout le maniement de l'appareil consiste dans le réglage des deux robinets β et δ, et dans le jeu de la pompe δ'. On peut arriver, à l'aide de ces organes, à modifier la pression, et, comme conséquence, la température du détendeur C.

556 — On aperçoit facilement l'identité du principe de la machine à affinité avec celui de l'appareil à liquide qui forme l'objet du paragraphe précédent.

L'aspiration du fluide hors du détendeur, pour remplir le cylindre compresseur, qui était alors provoquée par le mouvement direct du piston, se trouve ici remplacée par l'affinité du gaz ammoniac pour l'eau qui remplit la capacité D.

A la compression dans le cylindre, qui était due au recul du piston, se substitue ici la tension développée dans la chaudière en raison de l'application directe de la chaleur, qui a pour effet de rompre la combinaison et de remettre le gaz en liberté, en appauvrissant la solution aqueuse, et reformant une atmosphère gazeuse sous pression.

557 — Il résulte de cette comparaison une amélioration du rendement à l'actif de la machine à affinité, puisque la chaleur y exerce son action d'une manière immédiate et sans intermédiaires mécaniques, si l'on excepte la pompe ẟ' qui est peu importante.

Toutefois certaines causes de perte viennent affaiblir le rendement théorique. La température du dissoluteur D s'élèverait rapidement en raison de la chaleur qu'y dégage la dissolution du gaz ammoniac [1]. On se voit, pour ce motif, obligé de le refroidir à l'aide d'une enveloppe d'eau fraîche. La chaleur ainsi soustraite est définitivement perdue. Elle doit naturellement être fournie par la chaudière.

La vapeur d'eau entraînée nuit encore au rendement, car il faut la constituer au détriment des calories du foyer, et, une fois engagée dans la série des opérations, elle n'y joue aucun rôle utile, car elle ne s'évapore pas dans le réfrigérant. Tout au contraire, elle a pour effet de retenir une portion du gaz, qui se volatiliserait si elle était seule. La proportion est ordinairement de 6 à 8 d'eau pour 100 de gaz. On a réussi à l'abaisser à 3 %, en chargeant la dissolution d'une certaine quantité de chlorure de calcium.

Ces diverses influences ont pour résultat de réduire l'effet utile dans une proportion considérable. Pour la fabrication de la glace artificielle, on estime que le rendement varie entre 1200 et 1500 calories négatives par kilogramme de charbon brûlé. On atteint pratiquement des températures de — 25 et — 30 degrés.

(1) Voy. n° 529, note 2.

TABLE DES MATIÈRES

TROISIÈME PARTIE — THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE XIII. — Gaz parfaits.

CHAPITRE XIV. — Travail des gaz.

CHAPITRE XVIII. — MACHINES SOUFFLANTES.

CHAPITRE XIX. — COMPRESSEURS.

CHAPITRE XX. — MOTEURS A AIR COMPRIMÉ.

CHAPITRE XXI. — MOTEURS ÉOLIENS.

CHAPITRE XXII. — Représentation géométrique.

CHAPITRE XXIII. — Moteurs a air chaud. — Théorie.

CHAPITRE XXIV. — Moteurs a air chaud. — Description.

CHAPITRE XXV. — MACHINES A GAZ.

CHAPITRE XXVI. — THÉORÈMES DE LA THERMODYNAMIQUE GÉNÉRALE.

CHAPITRE XXVII. — ÉQUATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE GÉNÉRALE.

CHAPITRE XXVIII. — FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES.

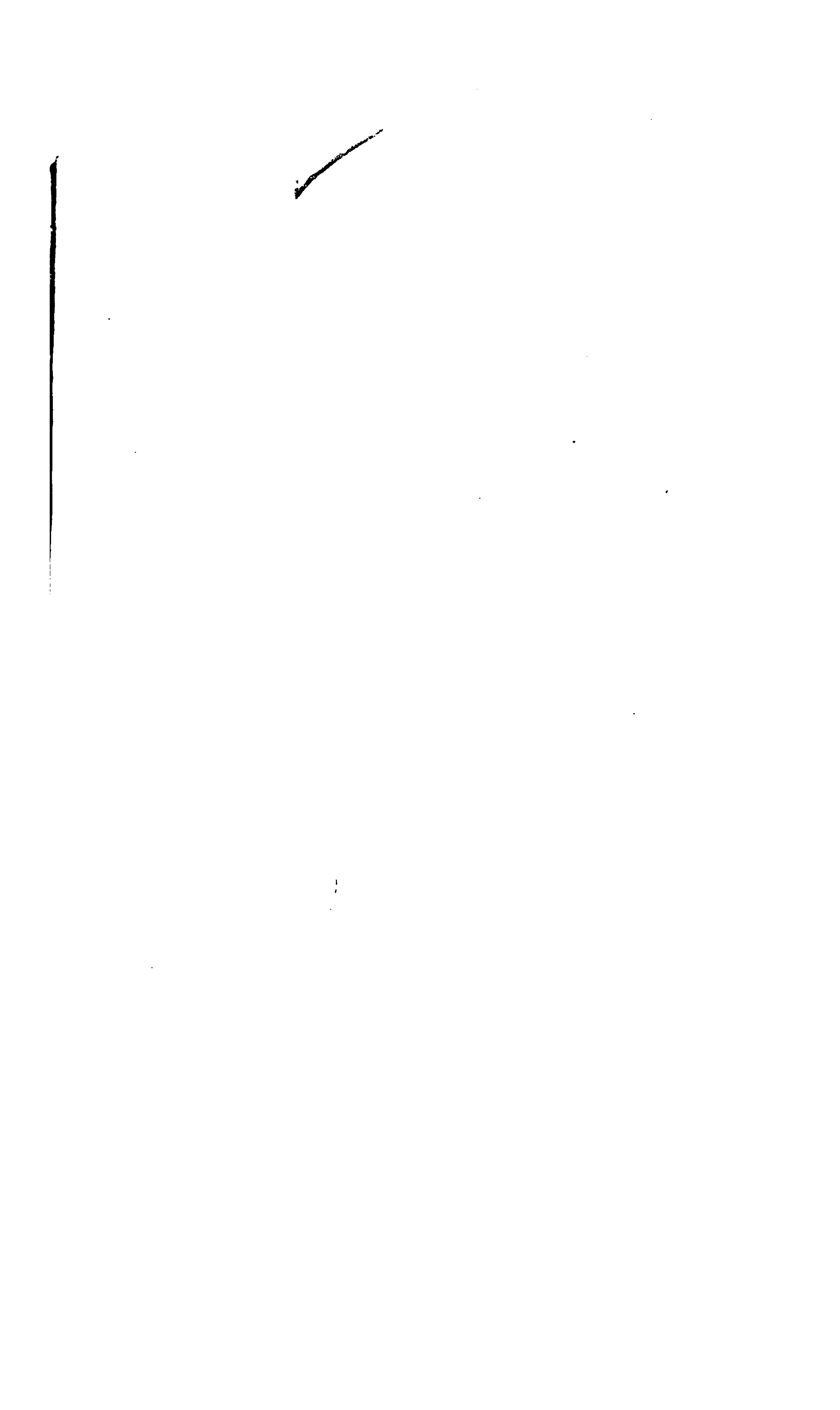
CHAPITRE XXIX. — VAPORISATION.

CHAPITRE XXX. — MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE VAPEUR SATURÉE.

CHAPITRE XXXI. — MACHINES THERMIQUES DIVERSES.

CHAPITRE XXXII. — MACHINES FRIGORIFIQUES.

17831. — Imprimerie générale A. Lahure, 9, rue de Fleurus, à Paris.




89088907274
b89088907274a




B89088907